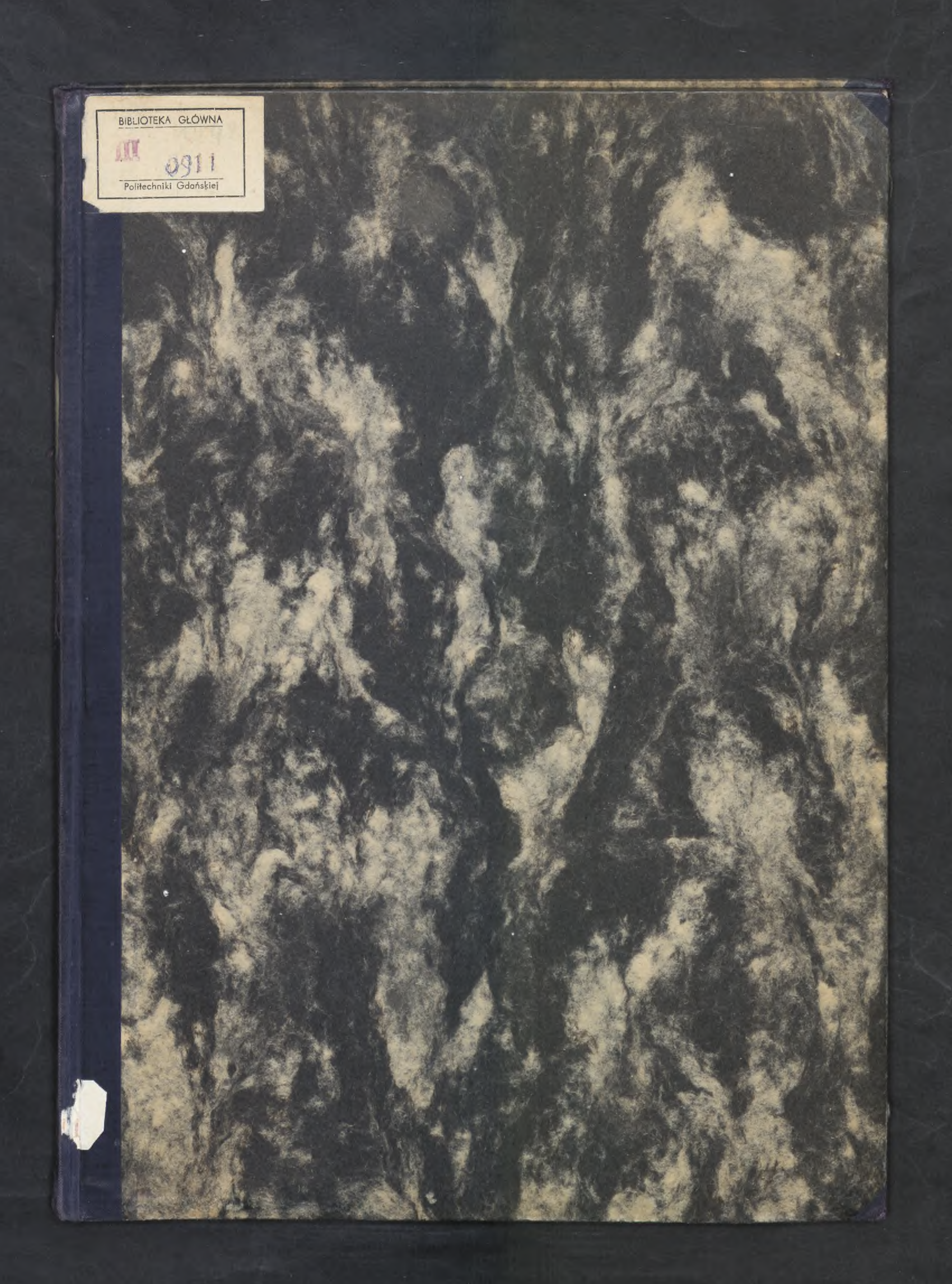


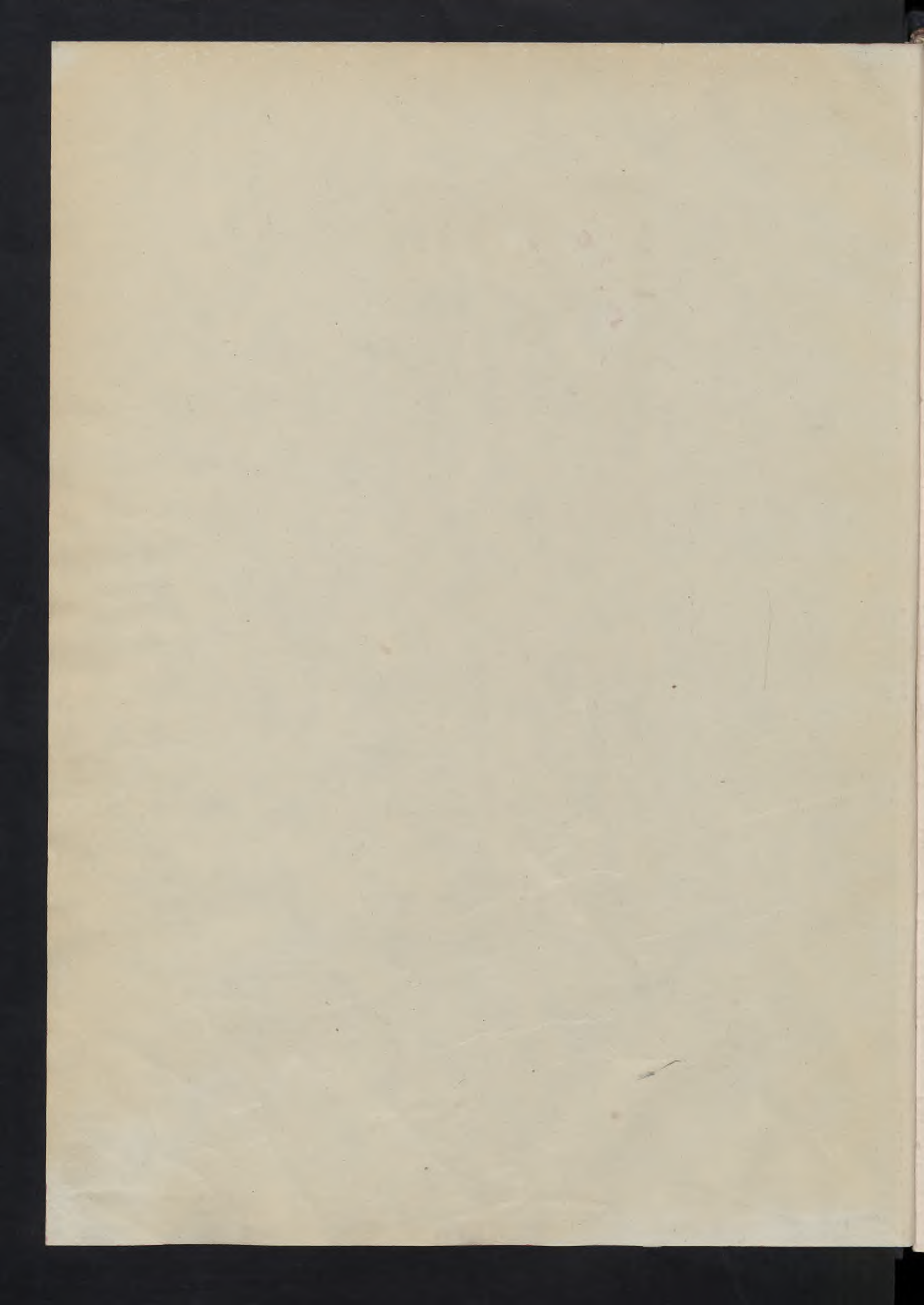
DER STAHLBAU

DIE BAUTECHNIK

15. Jahrgang

1942

Berlin 1942
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn



DER STAHLBAU

Beilage zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Schriftwaltung:

Professor Dr.-Ing. **K. Klöppel,** Darmstadt, Technische Hochschule

Professor **W. Rein,** Breslau, Technische Hochschule

15. Jahrgang

1942



Mit 185 Textabbildungen



Berlin 1942
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn

Inhalts-Verzeichnis des 15. Jahrganges, 1942.

Sachverzeichnis.

Verfasserverzeichnis.

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftwaltung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 7 RM und Postgeld

15. Jahrgang | BERLIN, 9. Januar 1942 | Heft 1/3

Kräfteverteilung an Brückenkonstruktionen, versteift durch zwei Windverbände und mehrere Querverbände.

Von Dr.-Ing. **Paul Álgyay**, Privatdozent an der Techn. Hochschule Budapest.

I. Näherungsberechnung einer Brückenkonstruktion mit zwei Hauptträgern.

Wir betrachten das in Bild 1 skizzierte räumliche Tragwerk mit zwei Hauptträgern, das durch zwei (untere und obere) Windverbände und durch mehrere Querverbände versteift ist. Im Querschnitt x—x greift die Einzellast P (Bild 2) an.

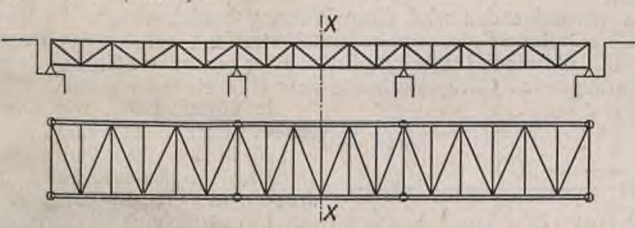


Bild 1.
Hauptträger und Windverband eines räumlichen Tragwerks.

Die am Querschnitt x—x angreifende Einzellast P und das in Bild 2 dargestellte nullwertige Kräftepaar P', $-P'$ liefern die folgenden Kraftwirkungen:

$$P = P'; \quad (P, P', -P') = P; \quad P_p = P_p' = M; \quad (P', M) = P.$$

Die Kraft P' verteilt sich in diesem Falle gleichmäßig auf die zwei Hauptträger, so daß nur die Wirkung vom Moment M untersucht werden muß.

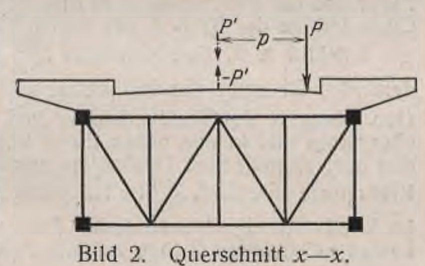


Bild 2. Querschnitt x—x.

Da in praktischen Fällen die Durchbiegung der Haupt- und Windträger gegen die Verformung der Querverbände sehr groß ist, werden die Querverbände mit guter Annäherung als unendlich starr angenommen. In diesem Falle wird die an der Stelle x wirkende Kraft nur durch den Querverband bei x verteilt, und demnach kann das Zusammenwirken anderer Querverbände außer acht gelassen werden. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß die Wind- und Hauptträger der behandelten Brückenkonstruktion parallele Gurtungen und dieselben Ausfachungen besitzen, und daß die Windverbände als selbständige Fachwerkträger mit besonderen Gurtstäben ausgebildet sind.

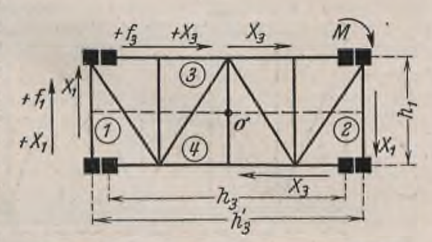


Bild 3. Lage des Drehpunktes bei gleichen Windverbänden.

Es werden die Bezeichnungen von Bild 3 eingeführt. Mit einer kleinen Vernachlässigung kann h_3 an Stelle von h_3' genommen werden.

Der Querschnitt x—x wird infolge des Moments M um den Punkt σ gedreht. Dieser Punkt σ liegt, falls die unteren und oberen Windverbände und ebenso auch die beiden Hauptträger gleich ausgebildet sind, im Schnittpunkt der waagerechten und lotrechten Achsen.

Wir bezeichnen die Durchbiegung des Hauptträgers 1 an der Stelle x mit f_1, die auf ihn an der Stelle x entfallende Einzellast mit X_1, die Durchbiegung des Hauptträgers 3 an der Stelle x mit f_3, die auf ihn entfallende Einzellast mit X_3. Wegen der Symmetrie gehören ebenso große, aber entgegengesetzte Werte von f und X zu dem Hauptträger 2 wie zum Hauptträger 1 bzw. zum Windverband 4 wie zum Windverband 3.

Das an dem Momentendrehpunkt r eines Gurtstabes vom Hauptträger 1 angreifende Moment M_r infolge der Kraft X_1 ist aus der Gleichung

$$M_r^{(1)} = a_r X_1$$

zu bestimmen, wobei a_r einen von der Auflagerung, Ausbildung und Form des Trägers abhängigen Faktor bedeutet. — Da der Windträger als ein Träger von völlig derselben Ausbildung vorausgesetzt wurde, ist das Moment am Drehpunkt des Gurtstabes vom Windverbande in demselben Feld infolge der Kraft X_3 aus der Gleichung

$$M_r^{(3)} = a_r X_3$$

zu erhalten. Wenn der Gurtstab des Hauptträgers und derjenige des Windverbandes im gleichen Felde liegen, sind die Faktoren a_r einander gleich.

Auf Grund des Drehpunktmoments erhält man für die Gurtstäbe in den Hauptträgern 1 und 3 die Beziehungen

$$S_{rg}^{(1)} = \frac{M_r^{(1)}}{h_1} = \frac{a_r X_1}{h_1} \qquad S_{rg}^{(3)} = \frac{M_r^{(3)}}{h_3} = \frac{a_r X_3}{h_3},$$

und analog für die Diagonalen

$$S_{rd}^{(1)} = b_r X_1 \qquad S_{rd}^{(3)} = b_r X_3.$$

Das Gesagte ist für den unteren wie für den oberen Windverband auch dann gültig, wenn sie nicht gleich stark, aber vom gleichen System sind.

Es ist auf Grund der Arbeitsgleichungen z. B. für den Hauptträger 1

$$X_1 f_1 = \Sigma S \Delta s = \sum_{r=1}^{n} S_{rg} \Delta s_{rg} + \sum_{r=1}^{m} S_{rd} \Delta s_{rd}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{S_{rg}^2 s_{rg}}{E F_{rg}} + \sum_{r=1}^{m} \frac{S_{rd}^2 s_{rd}}{E F_{rd}},$$

worin s_{rg} bzw. s_{rd} die Längen der Gurtstäbe bzw. diejenigen der Diagonalen, F_{rg} bzw. F_{rd} die Querschnittsflächen derselben und schließlich n die Anzahl der Gurtstäbe, m die Anzahl der Diagonalen bedeuten.

Ferner

$$X_1 f_1 = X_1^2 \cdot \frac{1}{h_1^2 E} \sum_{r=1}^{n} \frac{a_r^2 s_{rg}}{F_{rg}} + X_1^2 \cdot \frac{1}{E} \sum_{r=1}^{m} \frac{b_r^2 s_{rd}}{F_{rd}};$$

mit den Bezeichnungen

$$\frac{1}{E} \sum_{r=1}^{n} \frac{a_r^2 s_{rg}}{F_{rg}} = A_1 \qquad \frac{1}{E} \sum_{r=1}^{m} \frac{b_r^2 s_{rd}}{F_{rd}} = B_1$$

ist

$$f_1 = \frac{X_1}{h_1^2} \cdot A_1 + X_1 B_1 = f_{1g} + X_1 B_1,$$

wobei

$$f_{1g} = \frac{X_1}{h_1^2} \cdot A_1.$$

Das erste, mit f_{1g} bezeichnete Glied der rechtsseitigen Summe bedeutet einen Teil der Durchbiegung f_1, und zwar den Teil, welcher aus den Gurtstäben, das zweite Glied denjenigen, welcher aus den Diagonalen entsteht.

Mit der Einführung des Faktors c derart, daß

$$f_1 = c_1 f_{1g}, \tag{1}$$

also

$$c_1 = \frac{f_1}{f_{1g}}$$

sein soll, ist dann

$$c_1 = \frac{\frac{X_1}{h_1^2} \cdot A_1 + X_1 B_1}{\frac{X_1}{h_1^2} \cdot A_1}.$$

Mit X_1 dividiert, ist

$$c_1 = \frac{\frac{1^t}{h_1^2} \cdot A_1 + 1^t B_1}{\frac{1^t}{h_1^2} \cdot A_1} = 1 + h_1^2 \cdot \frac{B_1}{A_1}. \tag{2}$$

Aus dieser Beziehung ist zu ersehen, daß der Wert c_1 von X_1 ganz unabhängig ist.

Auf Grund der Gl. (1) wird

$$f_1 = c_1 \cdot \frac{X_1}{h_1^2} \cdot A_1 \tag{3}$$

und ganz ähnlicherweise

$$f_3 = c_3 \cdot \frac{X_3}{h_3^2} \cdot A_3. \tag{4}$$

Weicht der untere Windverband vom oberen nicht ab, dann bezieht sich Gl. (4) auch auf den unteren Windverband, im entgegengesetzten Falle aber erhält man für den unteren Windverband den Ausdruck:

$$f_4 = c_4 \cdot \frac{X_3}{h_3^2} \cdot A_4. \tag{5}$$

Die Ausdrücke (3) und (4) liefern also einfache Beziehungen zwischen den Kräften X an der Stelle x und den zu ihnen gehörigen Durchbiegungen an derselben Stelle. Der Wert $\frac{X}{h^2} \cdot A$ stellt also in den obigen Ausdrücken den aus den Gurtstäben entstehenden Teil der Durchbiegung dar, und c bedeutet einen Faktor, in dem die Wirkung der Diagonalen auf den Wert der Durchbiegung zum Ausdruck kommt und der durch die Formel (2) definiert ist.

Es kommt oft der Fall vor, daß zwei Windverbände einander nicht gleich sind und so der Drehpunkt σ nicht in die Halbierende der Höhe h_1 fällt (Bild 4). In diesem Falle gehören zum unteren Windverband andere, von den Werten f_3 und c_3 abweichende Werte f_4 und c_4. Natürlich muß $X_3 = X_4$ sein, da das äußere Moment M nur Kräftepaare hervorrufen kann.

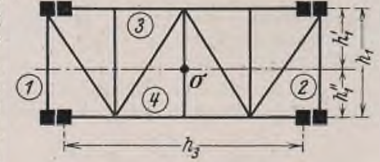


Bild 4. Lage des Drehpunktes bei ungleichen Windverbänden.

Das die Lage vom Punkt σ bestimmende h_1' erhält man in diesem Falle in folgender Weise (s. Bezeichnungen in Bild 4).

Die Verschiebungen sind proportional den Drehpunktsabständen, d. h.:

$$\frac{f_3}{f_1} = \frac{2\,h_1'}{h_3} = \frac{c_3 \cdot \frac{X_3}{h_3^2} \cdot A_3}{c_1 \cdot \frac{X_1}{h_1^2} \cdot A_1} = \frac{c_3\, h_1^2\, X_3\, A_3}{c_1\, h_3^2\, X_1\, A_1}, \tag{6}$$

daraus

$$h_1' = \frac{c_3}{c_1} \cdot \frac{h_1^2}{2\,h_3} \cdot \frac{X_3}{X_1} \cdot \frac{A_3}{A_1}.$$

Oder ganz analog aus dem Verhältnis f_4/f_1 folgt

$$h_1'' = \frac{c_4}{c_1} \cdot \frac{h_1^2}{2\,h_3} \cdot \frac{X_3}{X_1} \cdot \frac{A_4}{A_1},$$

ferner mit der Beziehung

$$\frac{h_1'}{h_1''} = \frac{c_3}{c_4} \cdot \frac{A_3}{A_4}$$

und

$$h_1'' = h_1 - h_1'$$

findet man

$$h_1' = \frac{c_3\, A_3}{c_3\, A_3 + c_4\, A_4} \cdot h_1. \tag{7}$$

Die Berechnung der auf die einzelnen Träger an der Stelle x fallenden unbestimmten Kräfte X auf Grund des an der Stelle x wirkenden äußeren Moments wird wie folgt durchgeführt.

Auf Grund der Zusammenhänge zwischen dem äußeren Moment M und den infolgedessen auftretenden Kräftepaaren X_1, X_3 ist

$$X_3 = \frac{M - X_1\, h_3}{h_1}. \tag{8}$$

Mittels Gl. (6) und (8) findet man für X_1

$$X_1 = \frac{c_3\, A_3}{c_1\, A_1} \cdot \frac{h_1}{h_3} \cdot \frac{M}{2\,h_1' + \frac{c_3\, A_3}{c_1\, A_1} \cdot h_1}. \tag{9}$$

Sind die unteren und oberen Windverbände einander gleich, dann ist mit $h_1' = \frac{h_1}{2}$

$$X_1 = \frac{1}{h_3} \cdot \frac{c_3\, A_3}{c_1\, A_1 + c_3\, A_3} \cdot M. \tag{10}$$

Ist $c_1 = c_3$, dann können noch weitere Vereinfachungen in den obigen Formeln durchgeführt werden.

Hiermit also wurden die auf die Hauptträger und auf die Windverbände einwirkenden Kräfte X_1 und X_3 infolge des Moments M der äußeren Last P ermittelt, und damit können die einzelnen Tragwände auf die Lasten von Kräftewirkung P untersucht werden.

Vorausgesetzt, daß nun in dem behandelten Falle der Windverband und der Hauptträger einen gemeinsamen oberen Gurt besitzen, was in der Praxis am häufigsten der Fall ist (s. Bild 2), kann folgende Berechnung der auf die Windverbände und auf die Hauptträger entfallenden Komponenten X eingeführt werden.

Wir nehmen unsere Konstruktion zuerst derart an, als ob die Windverbände und die Hauptträger gesonderte Gurtungen, aber mit gleichen Querschnitten haben würden.

Man erhält dann näherungsweise die in Wirklichkeit an dem gemeinsamen Gurte des Wind- und Hauptträgers angreifende Kraft als vorzeichenrichtige Summation der für die zwei Gurte erhaltenen Resultate.

Bei der Anwendung dieser Rechnungsweise für eine Konstruktion mit gemeinsamen Gurten der Hauptträger und Windverbände besteht eine Vernachlässigung darin, daß z. B. f_1, die Durchbiegung des Hauptträgers 1, nicht nur von der Kraftwirkung X_1 abhängig ist, sondern auch durch die in dem gemeinsamen Gurte auftretende Stabkraft — infolge der an dem oberen Windverband angreifenden Kraftwirkung X_3 — beeinflußt wird. Dasselbe gilt für die Durchbiegungen beider Hauptträger und beider Windverbände: sie werden voneinander gegenseitig beeinflußt. Auf letztere gegenseitige Wirkung wurde der Verfasser von Dr.-Ing. J. Kossalka, Professor der Technischen Hochschule Budapest, aufmerksam gemacht.

Im nachfolgenden wird diese Wirkung berücksichtigt. Es wird der in Bild 5 skizzierte Brückenquerschnitt betrachtet, auf den das Moment M wirkt. Die einzelnen Tragwände haben zwar gesonderte Gurte, die nebeneinanderliegenden Gurtquerschnitte aber sind einander gleich.

Bild 5. Querschnitt mit gleichen Gurtquerschnitten.

In diesem Falle, wie schon gesehen, treten die Kräftepaare X_1 und X_3 in den Tragwänden auf.

Diese Kräfte sind aus den Ausdrücken (8), (9), (10) zu berechnen.

Um die genaueren Gurtkräfte der Hauptträger und der Windverbände infolge dieser Belastungen in den gemeinsamen Gurten zu berechnen, werden in den angenommenen gesonderten Gurtstäben entsprechende äußere Kräftepaare verwendet, um außer der eigenen Gurtkraft, die in dem betreffenden Gurtstabe infolge der Kraft X des eigenen Trägers entstanden ist, auch noch eine zusätzliche Gurtkraft als innere Kraft in jedem einzelnen Gurte der Hauptträger und der Windverbände zu erzeugen, welche in dem nebenliegenden Gurte infolge der Kraft X des dazugehörigen Trägers entstanden ist.

Entsteht z. B. eine Gurtkraft $S_{rg}^{(1)}$ infolge der Wirkung von X_1 in dem $r$ten Obergurt des Hauptträgers 1 und eine Gurtkraft $S_r^{(3)}$ in dem $r$ten Obergurt des Windverbandes und denkt man in den Hauptträgerobergurten und in den neben ihnen liegenden Windverbandgurten außer den dort angreifenden Gurtkräften noch durch die Verwendung äußerer Kräftepaare eine Kraft $S_{rg}^{(3)}$ im Hauptträgerobergurt und noch eine Kraft $S_r^{(1)}$ im Windverbandgurt auftretend, dann werden die Kräfte $S_{rg}^{(1)} + S_{rg}^{(3)}$ in beiden behandelten Stäben entstehen (Bild 6).

Bild 6. Belastung der Gurtstäbe mit gedachten Kräftepaaren.

Nun werden die Hauptträger und die Windverbände infolge der neueren, durch die äußeren Kräftepaare hervorgebrachten inneren Gurtkräfte an der betrachteten Stelle x—x neuere Durchbiegungen f_1', f_3' bzw. f_4' erleiden, welche Durchbiegungen mit Hilfe der Arbeitsgleichungen folgendermaßen ausgedrückt werden können:

$$1^t f_1' = \sum_{r=1}^{n} S_{rg}^{(3)} \varDelta s_{rg}^{(1t)} = -\sum_{r=1}^{n} \frac{a_r X_3\, a_r\, 1^t\, s_{rg}}{h_3\, h_1\, E F_{rg}} = -\frac{X_3\, 1^t}{h_1\, h_3} \sum_{r=1}^{n} \frac{a_r^2\, s_{rg}}{E F_{rg}}$$

(11) und daraus

$$f_1' = -\frac{X_3}{h_1\,h_3}\cdot A_1$$

und ähnlicherweise

$$f_3' = -\frac{X_1}{h_1\,h_3}\cdot A_3.$$

Das negative Vorzeichen zeigt, daß die Durchbiegungen f' infolge positiver Werte von X_1 und X_3 entgegen den angenommenen positiven Werten von f wirken (Bild 7).

Der Wert der Verhältniszahl $\frac{f_3'}{f_1'}$ ist auf Grund der Formel (11)

$$(12)\quad \frac{f_3'}{f_1'} = \frac{X_1}{X_3}\cdot\frac{A_3}{A_1};$$

Bild 7.
Die zusätzlichen Durchbiegungen.

nach Formel (6) ist aber

$$(13)\quad \frac{f_3}{f_1} = \frac{2\,h_1'}{h_3} = \frac{c_3}{c_1}\cdot\frac{h_1^2}{h_3^2}\cdot\frac{X_3}{X_1}\cdot\frac{A_3}{A_1} \quad\text{und}\quad \frac{X_3}{X_1} = \frac{c_1}{c_3}\cdot\frac{h_3\,2\,h_1'}{h_1^2}\cdot\frac{A_1}{A_3}.$$

In einzelnen Fällen — wie z. B. bei kontinuierlichen Trägern oder bei Trägern, wo die oberen und unteren Gurte voneinander nur wenig abweichen, da sich die Summation in den Werten A auf den ganzen Gurt bezieht, ferner die Gurte der Windverbände und diejenigen der Hauptträger nach unserer Annahme gleich sind — kann näherungsweise $A_1 = A_3 = A$ gesetzt werden. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn die Ausfachungen der beiden Windverbände auch als gleich angenommen werden können; dann ist $h_1' = \frac{h_1}{2}$.

Mit diesen Vereinfachungen gestalten sich die Gl. (13) wie folgt:

$$(14)\quad \frac{f_3}{f_1} = \frac{h_1}{h_3};\qquad \frac{X_3}{X_1} = \frac{c_1}{c_3}\cdot\frac{h_3}{h_1},$$

ferner gewinnt man mittels Gl. (12) u. (13) für f_3'/f_1'

$$(14\text{a})\quad \frac{f_3'}{f_1'} = \frac{X_1}{X_3}\cdot\frac{A_3}{A_1} = \frac{c_3}{c_1}\cdot\frac{h_1^2}{h_3\,2\,h_1'}\cdot\frac{A_3^2}{A_1^2}$$

und schließlich bei Annahme gleicher Windverbände

$$(15)\quad \frac{f_3'}{f_1'} = \frac{X_1}{X_3} = \frac{c_3}{c_1}\cdot\frac{h_1}{h_3}.$$

Aus den Formeln (13) bis (15) ist also ersichtlich, daß das Verhältnis f_3'/f_1', d. h. das Verhältnis der Durchbiegungen, welche infolge der Kraftwirkungen der behandelten gegenseitigen Umlegung der Gurtkräfte entstehen, vom Verhältnis f_3/f_1 abweicht, und deshalb entspricht es nicht der Verdrehung des starren Querverbandes um den Punkt σ. Das Verhältnis der Verschiebungen müßte nämlich, der Verdrehung um den Drehpunkt σ entsprechend, dem Verhältnis der Drehpunktabstände gleich sein.

Demzufolge werden Ergänzungskräfte von X_1'' und X_3'' zu den in den einzelnen Tragwänden auftretenden Kräften X_1, X_3 eingeführt. Diese Ergänzungskräfte müssen zusammen mit den Kräften X_1, X_3 den Gleichgewichtsbedingungen entsprechen, d. h.

$$(X_1 + X_1'')\,h_3 + (X_3 + X_3'')\,h_1 = M \text{ sein;}$$

da aber
$$X_1\,h_3 + X_3\,h_1 = M,$$
so ist
$$X_1''\,h_3 + X_3''\,h_1 = 0$$
und daraus

$$(16)\quad \frac{X_3''}{X_1''} = -\frac{h_3}{h_1}.$$

Um die Gurtkräfte aber in den nebeneinanderliegenden Gurten auch bei Wirkung der neuen Ergänzungskräfte gleichzuhalten, lassen wir auf das System nicht nur die äußeren Kräfte X_1'', X_3'' einwirken, sondern es müssen die infolge X_1'' und X_3'' entstehenden Gurtkräfte — in der schon oben an Hand von Bild 6 ausführlich behandelten Weise — mittels äußerer Kräftepaare in den nebeneinander liegenden benachbarten Gurtstäben gegenseitig in Wirkung gebracht werden.

Somit erhält man außer den früheren Kräften noch ein neueres Kräftesystem, das also aus den Ergänzungskräften X'' und aus den an jedem einzelnen Gurtstab angreifenden Kräftepaaren, die den benachbarten Gurtkräften entsprechen, besteht.

Die Durchbiegung infolge dieses neuen Kräftesystems sei mit f'' bezeichnet. Die Beträge von f'' und die vorher dargestellten Durchbiegungen f' müssen zusammen die Bedingung erfüllen, daß sie ihren Drehpunktabständen proportional sein sollen, d. h.

(17)
$$\frac{f_3' + f_3''}{f_1' + f_1''} = \frac{2\,h_1'}{h_3}$$
bzw., wenn die Windverbände gleich stark sind,
$$\frac{f_3' + f_3''}{f_1' + f_1''} = \frac{h_1}{h_3}.$$

In diesem Falle aber erfüllen auch die Gesamtdurchbiegungen $f_1 + f_1' + f_1''$ und $f_3 + f_3' + f_3''$ die obige Verdrehungsbedingung, da, wie wir sahen, das Verhältnis f_3/f_1 schon ohnehin derselben Bedingung Genüge leistet, d. h.

$$\frac{f_3 + f_3' + f_3''}{f_1 + f_1' + f_1''} = \frac{2\,h_1'}{h_3} \text{ bzw. } \frac{h_1}{h_3}.$$

Die Werte von f_3'' und f_1'', auf Grund der obigen mittels Arbeitsgleichungen ausgedrückt und die schon eingeführten Bezeichnungen benutzend, erhält man

$$(18)\quad \begin{cases} f_3'' = \dfrac{c_3}{h_3^2}\cdot X_3''\,A_3 - \dfrac{X_1''}{h_1\,h_3}\cdot A_3 \\[2ex] f_1'' = \dfrac{c_1}{h_1^2}\cdot X_1''\,A_1 - \dfrac{X_3''}{h_1\,h_3}\cdot A_1 \end{cases}$$

und schließlich aus Gl. (16), (17) u. (18) nach einigen Umformungen

$$(19)\quad X_1'' = -X_1\cdot\frac{A_1\left(c_1\cdot\frac{2\,h_1'}{h_1} - \frac{c_1}{c_3}\cdot\frac{4\,h_1'^2}{h_1^2}\cdot\frac{A_1}{A_3}\right) - A_3\left(c_1\cdot\frac{2\,h_1'}{h_1}\cdot\frac{A_1}{A_3} - 1\right)}{A_1\left(c_1\cdot\frac{2\,h_1'}{h_1} + \frac{2\,h_1'}{h_1}\right) + A_3\,(c_3 + 1)}.$$

Bei Annahme $A_1 = A_3$

$$(19\text{a})\quad X_1'' = -X_1\cdot\frac{1 - \frac{c_1}{c_3}\cdot\frac{4\,h_1'^2}{h_1^2}}{1 + \frac{2\,h_1'}{h_1} + c_1\cdot\frac{2\,h_1'}{h_1} + c_3}$$

oder bei Annahme ganz gleicher Windverbände

$$(20)\quad X_1'' = -X_1\cdot\frac{1 - \frac{c_1}{c_3}}{2 + c_1 + c_3}.$$

X_3'' ist dann aus Gl. (16) zu berechnen.

Da die nebeneinanderliegenden Gurte unserer Brückenkonstruktion völlig gleiche Querschnitte haben, sind die gesamten Gurtkräfte, die in den nebeneinanderliegenden Gurten infolge des oben eingeführten ganzen Kräftesystems, bestehend aus der Belastung X und X'', und außerdem auch noch zwecks der gegenseitigen Umlegung der nebenan wirkenden Gurtkräfte eingeführten sämtlichen äußeren Kräftepaare entstehen — einander gleich. Es treten daher in einer Konstruktion mit dem in Bild 2 veranschaulichten Querschnitt, in dem die Hauptträger und Windverbände gemeinsame Gurte besitzen, unter alleiniger Einwirkung der Belastungen X und X'' ohne die Umlegungskräftepaare dieselben Gurtkräfte auf, welche in dem vorigen System durch die gleichzeitige Wirkung der Kräftepaare X und X'' und sämtlicher äußerer Umlegungskräftepaare sowohl in dem Hauptträgergurt als auch in dem neben ihm liegenden Gurt des Windverbandes erzeugt wurden. Infolgedessen werden aber im Falle des Querschnitts nach Bild 2 sowie des Querschnitts nach Bild 5 nicht nur die Gurtkräfte, sondern auch das ganze Kräftespiel und Deformationsbild des Tragwerksystems, namentlich auch die Durchbiegungen an der Stelle x, völlig übereinstimmen.

Die Kräfte X_1'' und X_3'' bedeuten also im Falle von Bild 2 die vorher erwähnten Korrektionen der Kräfte X_1 und X_3. Diese Korrektionen entsprechen also im Träger nach Bild 2 genau jener Wirkung, welche durch die Gurtkräfte infolge X_3 auf die Durchbiegung f_1 der Hauptträger und durch die Gurtkräfte infolge X_1 auf die Durchbiegungen f_3, f_4 der Windverbände ausgeübt wird.

Die Auswertung der Formeln (19) u. (20) zeigt uns eben, daß sich die Werte der Korrektionen von X_1'' bei den in der Praxis vorkommenden Werten von c_1 und c_3, welche die Stärke der Ausfachungen zwischen den Gurten von Hauptträgern und Windverbänden charakterisieren, so klein ergeben, daß sie bei Berechnung der Hauptträger meistens vernachlässigt werden können. X_3'' kann dagegen in manchen Fällen größere Werte annehmen; es empfiehlt sich daher, bei Berechnung der Windverbände diese auf die Werte X_3'' zu untersuchen. Ist die Ausfachung der Hauptträger und Windverbände von gleicher Stärke, d. h. $c_1 = c_3$, so gewinnt man aus Gl. (20) $X_1'' = X_3'' = 0$.

Im Falle ungleich starker Windverbände erhält man den Wert $X_1'' = X_3'' = 0$ dann, wenn im Zähler der Gl. (19)

$$\frac{c_1}{c_3}\cdot\frac{4\,h_1'^2}{h_1^2}\cdot\frac{A_1}{A_3} = \frac{A_3}{A_1}\cdot 1,$$

d. h.

$$\frac{c_1}{c_3} = \frac{h_1^2}{4\,h_1'^2}\cdot\frac{A_1^2}{A_3^2} = \left(\frac{h_1\,A_1}{2\,h_1'\,A_3}\right)^2$$

wird.

Wir können also in praktischen Fällen bei Berechnung der Hauptträger mit der Berücksichtigung der einfach zu berechnenden Werte von X_1 um so mehr zufrieden sein, weil die ganze vorgeführte Berechnungsweise doch auf Annäherungen beruht (vgl. die Ergebnisse der Tafel des nachfolgenden Zahlenbeispiels).

Schließlich ist noch zu bemerken, daß das hier erörterte Rechnungsverfahren in gleicher Weise auch in dem Falle angewendet werden kann, wenn die Hauptträger nicht als Parallelträger ausgebildet sind, es ist aber im allgemeinen in diesem Falle nicht eine so gute Annäherung, wie im Falle von Parallelträgern zu erwarten (vgl. Horthy-Miklós-Brücke).

II. Näherungsberechnung einer Brückenkonstruktion mit vier Hauptträgern.

Auf Grund des vorher beschriebenen Gedankenganges im Teil I für die Berechnung der Brückenkonstruktion mit zwei Hauptträgern und zwei Windverbänden können die auf die einzelnen Hauptträger und Windverbände fallenden Kraftkomponenten infolge der an einem beliebigen Knotenpunkt x angreifenden Kraft P auch im Falle des Systems mit vier Hauptträgern und zwei Windverbänden wie folgt erhalten werden (Bild 8).

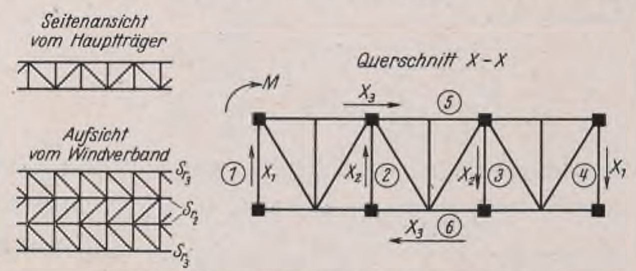


Bild 8. Konstruktion mit 4 Hauptträgern.

Wir nehmen an, daß die beiden Windverbände und ebenso die zwei äußeren Hauptträger bzw. die zwei mittleren Hauptträger einander gleich sind.

Auch in diesem Falle wird die an einer beliebigen Stelle des Querschnitts angreifende Einzellast P in zwei Teile, und zwar in eine Kraft P in der Querschnittsmitte und ein Moment M, das den Querschnitt zu verdrehen sucht, zerlegt.

Die Verteilung der Kraft P auf die vier Hauptträger wird in bekannter Weise im Verhältnis ihrer Trägheitsmomente ermittelt.

In den nachfolgenden Erörterungen werden die Kraftwirkungen infolge des — hier als positiv angenommenen — Moments M besprochen. Diese Kraftwirkungen sind: die Kräfte X_1, die auf die Hauptträger 1 und 4 an der Stelle x wirken, die Kräfte X_2, die an den Hauptträgern 2 und 3 angreifen, die auf die Windverbände wirkenden Kräfte X_3 und die zu den Kräften X gehörigen Ergänzungskräfte X''.

Auch jetzt sei zuerst für jedes Tragwerk gesondert je ein Gurt mit demselben Querschnitt der nebenanliegenden Stäbe vorausgesetzt. Die Tragwerke sind nur durch den als unendlich starr angenommen Querverband verbunden. Es wird weiterhin die Annäherung von $h_1 = h_1'$ eingeführt (Bild 9).

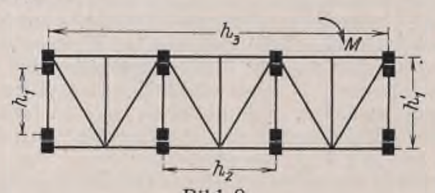


Bild 9.
Querschnitt mit gesonderten Gurtstäben der Hauptträger und der Windverbände.

Die Stabkräfte S_{r3} und S_{r2}, welche in den äußeren bzw. in den mittleren Gurten des Windverbandes im Felde r auftreten, sind dem Moment M_r, das infolge der auf den Windverband fallenden Last X_3 in der Halbierenden des $r$ten Feldes entsteht, gleichwertig. Die Berechnung der Stabkräfte S_{r3}, S_{r2} geschieht also mit Hilfe folgender Ausdrücke:

$$S_{r3} = S_{r2} \cdot \frac{h_3}{h_2} \qquad S_{r3}\, h_3 + S_{r2}\, h_2 = M_r$$

$$S_{r2} = S_{r3} \cdot \frac{h_2}{h_3} \qquad M_r = a\, X_3$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} S_{r3} &= \frac{h_3}{h_v} \cdot M_r \\ S_{r2} &= \frac{h_2}{h_v} \cdot M_r, \end{aligned} \right.$$

wo $h_v = h_2^2 + h_3^2$ ist.

Die Bedeutung des Faktors a ist dieselbe wie in Abschnitt I.

Die Formel für f_3 gestaltet sich nun folgendermaßen:

$$X_3 f_3 = c_3 \left[\sum_{r=1}^{n} \frac{h_3^2\, a^2\, X_3^2\, s_{r3}^{(g)}}{h_v\, E\, F_{r3}^{(g)}} + \sum_{r=1}^{n} \frac{h_2^2\, a^2\, X_3^2\, s_{r2}^{(g)}}{h_v\, E\, F_{r2}^{(g)}} \right],$$

worin $s_{r3}^{(g)}$ und $F_{r3}^{(g)}$, ferner $s_{r2}^{(g)}$ und $F_{r2}^{(g)}$ die Länge und den Querschnitt des $r$ten äußeren Gurtstabes bzw. dieselben des $r$ten inneren Gurtstabes des oberen Windverbandes bedeuten. (Diese sind aber den entsprechenden Gurtstäben der Hauptträger gleich!) Für die Bedeutung und Berechnungsweise des Faktors von c gilt das in Abschnitt I mitgeteilte.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{a^2\, s_{r3}^{(g)}}{E\, F_{r3}^{(g)}} = \sum_{r=1}^{n} \frac{a^2\, s_{r1}^{(g)}}{E\, F_{r1}^{(g)}} = A_1$$

und

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{a^2\, s_{r2}^{(g)}}{E\, F_{r2}^{(g)}} = A_2, \quad \text{ferner} \quad (h_3^2\, A_1 + h_2^2\, A_2) = C.$$

Es ist wohl eine kleine Abweichung zwischen den Beiwerten a in den zwei Ausdrücken von A_1, weil sich eine kleine Differenz auch in den Drehpunktstellen der $r$ten Gurtstäbe von zwei Tragwerken ergibt, doch können die zwei Ausdrücke von A_1 mit einer kleinen Vernachlässigung als gleich angenommen werden.

Mit diesen Bezeichnungen ist

$$f_3 = \frac{c_3}{h_v^2} \cdot C\, X_3$$

und die Werte f_1, f_2, c_1, c_2, c_3 und B ähnlich wie im Abschnitt I.

$$(2) \qquad f_1 = \frac{c_1}{h_1^2} \cdot A_1\, X_1 \qquad f_2 = \frac{c_2}{h_1^2} \cdot A_2\, X_2,$$

wobei

$$c_1 = 1 + h_1^2 \cdot \frac{B_1}{A_1} \quad \text{für Hauptträger 1 oder 4}$$

$$c_2 = 1 + h_1^2 \cdot \frac{B_2}{A_2} \quad \text{für Hauptträger 2 oder 3}$$

$$c_3 = 1 + h_v^2 \cdot \frac{B_3}{C} \quad \text{für Windverband 5 oder 6}$$

$$B_1 = \sum_{r=1}^{m_1} \frac{b_r^2\, s_{r1}^{(d)}}{E\, F_{r1}^{(d)}} \qquad B_2 = \sum_{r=1}^{m_2} \frac{b_r^2\, s_{r2}^{(d)}}{E\, F_{r2}^{(d)}} \qquad B_3 = \sum_{r=1}^{m_3} \frac{b_r^2\, s_{r3}^{(d)}}{E\, F_{r3}^{(d)}}.$$

Daraus, daß die Kräftepaare von X_1, X_2, X_3 mit dem äußeren Moment M im Gleichgewicht stehen, ferner folgt laut Formel (14) in Abschnitt I

$$(3) \qquad X_3\, h_1 + X_2\, h_2 + X_1\, h_3 = M$$

$$(4) \qquad \frac{f_3}{f_1} = \frac{h_1}{h_3} = \frac{c_3}{c_1} \cdot \frac{X_3}{X_1} \cdot \frac{h_1^2}{h_v^2} \cdot \frac{C}{A_1}$$

$$(5) \qquad \frac{f_2}{f_1} = \frac{h_2}{h_3} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{X_2}{X_1} \cdot \frac{A_2}{A_1}.$$

Auf Grund der Beziehungen (3), (4) u. (5) ergibt sich:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} X_2 &= \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot X_1 \\ X_3 &= \frac{h_v^2}{h_1\, h_3} \cdot \frac{c_1}{c_3} \cdot \frac{A_1}{C} \cdot X_1 \\ X_1 &= \frac{M}{\frac{h_v^2}{h_3} \cdot \frac{c_1}{c_3} \cdot \frac{A_1}{C} + h_3 + \frac{h_2^2}{h_3} \cdot \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{A_1}{A_2}}. \end{aligned} \right.$$

Mit Hilfe der obigen Formeln können die am Querverband der Stelle x wirkenden konzentrierten Kräfte X_1, X_2 und X_3 infolge des an derselben Stelle wirkenden Moments M und auf Grund dieser die Stabkräfte für die einzelnen Tragwerke nach dem bekannten Verfahren bestimmt werden.

Wie wir schon im Abschnitt I gesehen haben, ist die Berechnung dieser Kräfte auch bei einer Konstruktion durchzuführen, bei der die äußeren Gurtstäbe der Windverbände und die Gurtstäbe der äußeren Hauptträger, ferner die mittleren Gurtstäbe der Windverbände und die Gurtstäbe der mittleren Hauptträger dieselben sind, d. h. bei einer Konstruktion, deren Querschnitt in Bild 8 veranschaulicht ist. Was in dem Abschnitt I über die Kräftekorrektionen X'' festgestellt wurde, kann ohne weiteres auch für Systeme mit vier Hauptträgern übernommen werden.

Es werden hier die Formeln für die Berechnung der Korrektionen, welche daraus entstammen, daß die Gurtkräfte, infolge der an irgendeinem Tragwerk angreifenden Belastung X, auch die Durchbiegung eines anderen Tragwerks beeinflussen, das mit dem von X unmittelbar angegriffenen Tragwerk gemeinsamen Gurt besitzt, im nachfolgenden abgeleitet.

Ähnlich der Formel (11) in Abschnitt I, erhält man:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} f_1' &= -\frac{h_3}{h_1\, h_v} \cdot A_1\, X_3 \\ f_2' &= -\frac{h_2}{h_1\, h_v} \cdot A_2\, X_3 \\ f_3' &= -\frac{h_3}{h_1\, h_v} \cdot A_1\, X_1 - \frac{h_2}{h_1\, h_v} \cdot A_2\, X_2. \end{aligned} \right.$$

Ähnlich wie die Formel (I, 18) erhält man:

$$(8)\quad \begin{cases} f_1'' = \dfrac{c_1}{h_1^2} \cdot A_1 X_1'' - \dfrac{h_3}{h_1 h_v} \cdot A_1 X_3'' \\ f_2'' = \dfrac{c_2}{h_1^2} \cdot A_2 X_2'' - \dfrac{h_2}{h_1 h_v} \cdot A_2 X_2'' \\ f_3'' = \dfrac{c_3}{h_v} \cdot C X_3'' - \dfrac{h_3}{h_1 h_v} \cdot A_1 X_1'' - \dfrac{h_2}{h_1 h_v} \cdot A_2 X_2''. \end{cases}$$

Aus der Gleichung gemäß der Beziehung (I, 16)

$$X_3'' h_1 + X_2'' h_2 + X_1'' h_3 = 0$$

folgt

$$(9)\quad X_3'' = -\frac{h_3}{h_1} \cdot X_1'' - \frac{h_2}{h_1} \cdot X_2''$$

und auf Grund der Gl. (I, 17)

$$(10)\quad \frac{f_3' + f_3''}{f_1' + f_1''} = \frac{h_1}{h_3} \text{ und } \frac{f_2' + f_2''}{f_1' + f_1''} = \frac{h_2}{h_3}.$$

Schließlich gewinnt man aus den Beziehungen (7) bis (10), nach mathematischen Umgestaltungen für X_1'', X_2'', X_3'':

$$(11)\quad \begin{cases} X_1'' = \dfrac{\dfrac{h_3}{h_1 h_v} \cdot A_1 X_1 + \dfrac{h_2}{h_1 h_v} \cdot A_2 X_2 + \left[\left(\dfrac{h_2 b}{h_v d} - \dfrac{1}{h_v}\right) A_1 + \dfrac{h_2 b}{h_v d} \cdot A_2 + \dfrac{h_2}{h_v^2} \cdot c_3 \cdot \dfrac{b}{d} \cdot C\right] X_3}{\left(\dfrac{g}{h_v} - \dfrac{c_1}{h_1 h_3} - \dfrac{h_3}{h_1 h_v}\right) A_1 + \dfrac{h_2}{h_1 h_v} \cdot \dfrac{e}{d} \cdot A_2 + \dfrac{c_3}{h_v^2} \cdot g C} \\ X_2'' = h_1 \cdot \dfrac{b}{d} \cdot X_3 - \dfrac{e}{d} \cdot X_1'' \\ X_3'' = X_1'' g - h_2 \cdot \dfrac{b}{d} \cdot X_3, \end{cases}$$

wobei

$$b = \frac{h_2}{h_1 h_v}\left(\frac{A_1}{A_2} - 1\right) \qquad d = h_2 b - \frac{c_2}{h_1}$$

$$e = \frac{c_1}{h_1} \cdot \frac{h_2}{h_3} \cdot \frac{A_1}{A_2} + h_3 b \qquad g = \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{e}{d} - \frac{h_3}{h_1}.$$

Sind die Querschnitte der äußeren und inneren Gurtstäbe des oberen Windverbandes annähernd gleich groß, werden sich die Formeln für f, da

$$A_1 = A_2 \qquad C = h_v A_1 \qquad c_1 = c_2$$

gesetzt werden kann, folgendermaßen vereinfachen:

$$(2a)\quad f_1 = \frac{c_1}{h_1^2} \cdot A_1 X_1 \qquad f_2 = \frac{c_1}{h_1^2} \cdot A_1 X_2 \qquad f_3 = \frac{c_3}{h_v} \cdot A_1 X_3$$

und

$$(6a)\quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{M}{\dfrac{h_v}{h_3} \cdot \dfrac{c_1}{c_3} + h_3 + \dfrac{h_2^2}{h_3}} \\ X_2 = \dfrac{h_2}{h_3} \cdot X_1 \\ X_3 = \dfrac{h_v}{h_1 h_3} \cdot \dfrac{c_1}{c_3} \cdot X_1, \end{cases}$$

ferner gewinnt man, da

$$b = 0$$

$$d = -\frac{c_1}{h_1}$$

$$e = \frac{c_1}{h_1} \cdot \frac{h_2}{h_3}$$

$$\frac{e}{d} = -\frac{h_2}{h_3}$$

$$g = -\frac{h_2^2}{h_1 h_3} - \frac{h_3}{h_1} = -\frac{h_v}{h_1 h_3},$$

für X'' die Gleichungen

$$(11a)\quad \begin{cases} X_1'' = -\dfrac{h_3}{h_v} \cdot \dfrac{(X_1 h_3 + X_2 h_2 - X_3 h_1)}{(2 + c_1 + c_3)} = -\dfrac{h_3}{h_v} \cdot D \\ X_2'' = +\dfrac{h_2}{h_3} \cdot X_1'' = -\dfrac{h_2}{h_v} \cdot D \\ X_3'' = -\dfrac{h_v}{h_1 h_3} \cdot X_1'' = \dfrac{1}{h_1} \cdot D, \end{cases}$$

wo $D = (X_1 h_3 + X_2 h_2 - X_3 h_1) : (2 + c_1 + c_3)$ ist.

Für Nichtparallelträger wird auf das im vorigen Absatz des Abschnitts I Gesagte hingewiesen. (Schluß folgt.)

Ein Rechenschema zur Knickberechnung mehrfeldriger beliebig gestützter Druckstäbe und seine Anwendung auf Zahlenbeispiele.

Von Professor Dr.-Ing. **Karl Kriso**, Brünn.

(Schluß aus Heft 25/26, 1941.)

2. Fortleitungszahlen p_r und q_r [Gl. (14)]. Multiplikatoren μ_r [Gl. (15)].

(r)	$p_r = \frac{a_r}{1 - b_{r-1} p_{r-1}}$, $r = 1, 2 \ldots 5, 6$					$\mu = \frac{q_r}{p_r}$	$q_r = \frac{b_r}{1 - a_{r+1} q_{r+1}}$, $r = 6, 5 \ldots 2, 1$				
	b_{r-1}	$b_{r-1} p_{r-1}$	$f_r = 1 - b_{r-1} p_{r-1}$	a_r	$p_r = \frac{a_r}{f_r}$ ↓	$r = 2, 3 \ldots 5$	a_{r+1}	$a_{r+1} q_{r+1}$	$g_r = 1 - a_{r+1} q_{r+1}$	b_r	$q_r = \frac{b_r}{g_r}$ ↑
1	—	—	1	0	0	—	0,2895	0,1049	0,8951	0,2530	0,2826
2	0,2530	0	1	0,2895	0,2895	1,2518	0,2224	0,0783	0,9267	0,3340	0,3624
3	0,3340	0,0967	0,9033	0,2224	0,2462	1,4309	0,2253	0,0666	0,9334	0,3288	0,3522
4	0,3288	0,0809	0,9191	0,2253	0,2452	1,2048	0,2900	0,0882	0,9118	0,2693	0,2954
5	0,2693	0,0660	0,9340	0,2900	0,3105	0,9798	0,2699	0	1	0,3043	0,3043
6	0,3043	0,0945	0,9055	0,2699	0,2981	—	—	—	1	—	0

3. Einflußzahlen λ'_{ii} [Gl. (16)].

$$\lambda'_{11} = \frac{q_1}{b_1} \cdot k_1' = \frac{0{,}2826}{0{,}2530} \cdot 0{,}3465 = 0{,}3872$$

$$\lambda'_{22} = \mu_2 \lambda'_{11} = 1{,}2518 \cdot 0{,}3872 = 0{,}4846$$

$$\lambda'_{33} = \mu_3 \lambda'_{22} = 1{,}4309 \cdot 0{,}4846 = 0{,}6935$$

$$\lambda'_{44} = \mu_4 \lambda'_{33} = 1{,}2048 \cdot 0{,}6935 = 0{,}8355$$

$$\lambda'_{55} = \mu_5 \lambda'_{44} = 0{,}9798 \cdot 0{,}8355 = 0{,}8187.$$

Kontrollen:

nach (17) $\lambda'_{55} = \frac{p_6}{a_6} \cdot k_5' = \frac{0{,}2981}{0{,}2699} \cdot 0{,}7413 = 0{,}8187$

nach (18)

$$\lambda'_{33} = \frac{1}{b_3} \cdot \frac{q_3}{1 - p_3 q_3} \cdot k_3' = \frac{1}{0{,}3288} \cdot \frac{0{,}3522}{1 - 0{,}2462 \cdot 0{,}3522} \cdot 0{,}5912 = 0{,}6935.$$

4. A'-, B'-, C'-, D'-, E'- und F'-Momente nach Tabelle 1 in IV/9.

	$\nu_1 = +1$	$\nu_2 = +1$	$\nu_3 = +1$	$\nu_4 = +1$	$\nu_5 = +1$	$\nu_6 = +1$	
	$A_1' = 0{,}3872$	$B_1' = 0{,}5275$	$C_1' = 0{,}1897$	$D_1' = 0{,}0640$	$E_1' = 0{,}0190$	$F_1' = 0{,}0044$	
0,3624	$A_2' = 0{,}1403$	$B_2' = 0{,}6250$	$C_2' = 0{,}6554$	$D_2' = 0{,}2211$	$E_2' = 0{,}0658$	$F_2' = 0{,}0153$	0,2895
0,3532	$A_3' = 0{,}0494$	$B_3' = 0{,}2201$	$C_3' = 0.8642$	$D_3' = 0{,}8983$	$E_3' = 0{,}2672$	$F_3' = 0{,}0623$	0,2462
0,2954	$A_4' = 0{,}0146$	$B_4' = 0{,}0650$	$C_4' = 0{,}2553$	$D_4' = 1{,}0403$	$E_4' = 1{,}0897$	$F_4' = 0{,}2542$	0,2452
0,3043	$A_5' = 0{,}0044$	$B_5' = 0{,}0198$	$C_5' = 0{,}0777$	$D_5' = 0{,}3165$	$E_5' = 1{,}0729$	$F_5' = 0{,}8187$	0,3105

5. Summenwerte nach Tabelle 2 in IV/10.

$(\Sigma A')_r$	$(\Sigma B')_r$	$(\Sigma C')_r$	$(\Sigma D')_r$	$(\Sigma E')_r$	$(\Sigma F')_r$
$(\Sigma A')_1 = 0{,}3872$	$(\Sigma B')_1 = 0{,}5275$	$(\Sigma C')_1 = 0{,}1897$	$(\Sigma D')_1 = 0{,}0640$	$(\Sigma E')_1 = 0{,}0190$	$(\Sigma F')_1 = 0{,}0044$
$(\Sigma A')_2 = 0{,}5275$	$(\Sigma B')_2 = 1{,}1525$	$(\Sigma C')_2 = 0{,}8451$	$(\Sigma D')_2 = 0{,}2851$	$(\Sigma E')_2 = 0{,}0848$	$(\Sigma F')_2 = 0{,}0197$
$(\Sigma A')_3 = 0{,}1897$	$(\Sigma B')_3 = 0{,}8451$	$(\Sigma C')_3 = 1{,}5196$	$(\Sigma D')_3 = 1{,}1194$	$(\Sigma E')_3 = 0{,}3330$	$(\Sigma F')_3 = 0{,}0776$
$(\Sigma A')_4 = 0{,}0640$	$(\Sigma B')_4 = 0{,}2851$	$(\Sigma C')_4 = 1{,}1195$	$(\Sigma D')_4 = 1{,}9386$	$(\Sigma E')_4 = 1{,}3569$	$(\Sigma F')_4 = 0{,}3165$
$(\Sigma A')_5 = 0{,}0190$	$(\Sigma B')_5 = 0{,}0848$	$(\Sigma C')_5 = 0{,}3330$	$(\Sigma D')_5 = 1{,}3568$	$(\Sigma E')_5 = 2{,}1626$	$(\Sigma F')_5 = 1{,}0729$
$(\Sigma A')_6 = 0{,}0044$	$(\Sigma B')_6 = 0{,}0198$	$(\Sigma C')_6 = 0{,}0777$	$(\Sigma D')_6 = 0{,}3165$	$(\Sigma E')_6 = 1{,}0729$	$(\Sigma F')_6 = 0{,}8187$

Diese Tabelle zeigt die in IV/10 erwähnte Symmetrie zur Diagonale, ein Beweis für die Richtigkeit der Zahlenrechnung.

6. Stabwerte a_r', m_r' und b_r'.

Diese Werte sind nach Abschnitt IV/13 mit Hilfe der vorhandenen δ_i'/c'-Werte zu bilden.

Stütze *i*: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
Stab ⓡ: ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥

	0	1	2	3	4	5	6
A_i in t/cm	∞	15,12	10,3	7,55	5,78	17,2	∞
$\delta_i = \frac{1}{A_i}$ cm/t	0	0,066 14	0,097 09	0,132 45	0,173 01	0,058 14	0

Frei gewählter Vergleichswert nach IV/4: $\delta^* = 0{,}1$ cm/t

	0	1	2	3	4	5	6
$\delta_i' = \frac{\delta_i}{\delta^*}$	0	0,6614	0,9709	1,3245	1,7301	0,5814	0
δ_i'/c' (IV/11)	0 0	0,6614 0,6614	0,9709 0,9709	1,3245 1,3245	1,7301 1,7301	0,5814 0,5814	0 0

	Stab 1	Stab 2	Stab 3	Stab 4	Stab 5	Stab 6
a_r' nach IV/11	0	0,6614	0,9709	1,3245	1,7301	0,5814
m_r' nach IV/11	0,6614	1,6323	2,2954	3,0546	2,3115	0,5814
b_r' nach IV/11	0,6614	0,9709	1,3245	1,7301	0,5814	

7. Die $h'_{r,K'}$-Glieder der Knickdeterminante [Gl. (22)].

1. Reihe: $h'_{1K'} = 0 + 0{,}6614\,(\Sigma K')_1 + 0{,}6614\,(\Sigma K')_2$
2. Reihe: $h'_{2K'} = 0{,}6614\,(\Sigma K')_1 + 1{,}6323\,(\Sigma K')_2 + 0{,}7909\,(\Sigma K')_3$
3. Reihe: $h'_{3K'} = 0{,}9709\,(\Sigma K')_2 + 2{,}2954\,(\Sigma K')_3 + 1{,}3245\,(\Sigma K')_4$
4. Reihe: $h'_{4K'} = 1{,}3245\,(\Sigma K')_3 + 3{,}0546\,(\Sigma K')_4 + 1{,}7301\,(\Sigma K')_5$
5. Reihe: $h'_{5K'} = 1{,}7301\,(\Sigma K')_4 + 2{,}3115\,(\Sigma K')_5 + 0{,}5814\,(\Sigma K')_6$
6. Reihe: $h'_{6K'} = 0{,}5814\,(\Sigma K')_5 + 0{,}5814\,(\Sigma K')_6 + 0$

$K' = A', B' \ldots F'$

+ 0,6049	— 1,1111	+ 0,6844	— 0,2309	+ 0,0687	— 0,0160
— 1,3013	+ 3,0504	— 2,9802	+ 1,5946	— 0,4742	+ 0,1106
+ 1,0324	— 3,4363	+ 5,7911	— 5,4142	+ 2,6437	— 0,6168
— 0,4798	+ 2,1371	— 6,0081	+ 9,7521	— 8,3272	+ 2,9260
+ 0,1574	— 0,7009	+ 2,7515	— 6,6746	+ 7,9702	— 3,5036
— 0,0137	+ 0,0608	— 0,2387	+ 0,9729	— 1,8811	+ 1,0997

Die $h'_{rK'}$-Glieder und die S'-Produkte in Tabelle 8 wurden bereits hier mit dem ihnen nach IV/12 in der Knickdeterminante zukommenden Vorzeichen versehen.

8. Die S'-Produkte der Knickdeterminante [Gl. (20)].

— 0,1773	+ 0,3466	—	—	—	—
+ 0,1773	— 0,8553	+ 0,7592	—	—	—
—	+ 0,5087	— 1,7950	+ 1,3563	—	—
—	—	+ 1,0358	— 3,1279	+ 2,2595	—
—	—	—	+ 1,7716	— 3,0188	+ 1,0942
—	—	—	—	+ 0,7593	— 1,0942

9. Knickdeterminante und Lösung.

Die Addition der vertikalen Kolonnen in den zwei letzten Tabellen führt in Analogie zu (20) zur Knickdeterminante:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \eta' + 0{,}4276 & -0{,}7645 & +0{,}6844 & -0{,}2309 & +0{,}0687 & -0{,}0160 \\ -1{,}1240 & \eta' + 2{,}1951 & -2{,}2210 & +1{,}5946 & -0{,}4742 & +0{,}1106 \\ +1{,}0324 & -2{,}9276 & \eta' + 3{,}9961 & -4{,}0579 & +2{,}6437 & -0{,}6168 \\ -0{,}4798 & +2{,}1371 & -4{,}9723 & \eta' + 6{,}6242 & -6{,}0677 & +2{,}9260 \\ +0{,}1574 & -0{,}7009 & +2{,}7515 & -4{,}9030 & \eta' + 4{,}9514 & -2{,}4094 \\ -0{,}0137 & +0{,}0608 & -0{,}2387 & +0{,}9729 & -1{,}1218 & \eta' + 0{,}0055 \end{vmatrix}$$

deren Ausrechnung und Nullsetzung die Gleichung

$$\eta'^6 + 18{,}2000\,\eta'^5 + 46{,}1004\,\eta'^4 - 29{,}3451\,\eta'^3 - 9{,}0563\,\eta'^2 + 2{,}1606\,\eta' + 0 = 0$$

liefert. Aus ihr gewinnt man die sechs Wurzeln:

$$\eta_1' = 0, \quad \eta_4' = -14{,}9987,$$
$$\eta_2' = +0{,}6531, \quad \eta_5' = -3{,}6744,$$
$$\eta_3' = +0{,}1710, \quad \eta_6' = -0{,}3511.$$

Die größte positive Wurzel liefert, den Erläuterungen im Abschnitt IV/13 entsprechend, wegen

$$\eta' = \frac{\eta}{\mu} = \frac{c^*}{\mu\,\delta^* S^*}$$

die Lösung des Problems im kleinsten Wert

$$\mu_{\min} = \frac{c^*}{\delta^* S^*} \cdot \frac{1}{\eta'_{\max}} = \frac{600}{0{,}1 \cdot 1000} \cdot \frac{1}{0{,}6531} = 9{,}1875 = \sim 9{,}19.$$

Da $\mu_{\min} > 1$, so ist die verlangte zweifache Knicksicherheit des Druckgurtes gewährleistet. $\mu_{\min} > 1$ zeigt aber auch, daß die vorhandene elastische Querstützung zu stark und eine 9,19fache „Stützensicherheit" vorhanden ist. Die zweifache Knicksicherheit des Durchlaufstabes würde daher nur elastische Querstützungen erfordern, deren spezifische Stützensenkungen die Werte $\delta_{i,\,\text{erf}} = 9{,}19\ \delta_{i,\,\text{vorh}}$ besitzen. Die zugeordneten spezifischen Stützenwiderstände sind dann durch $A_{i,\,\text{erf}} = \frac{1}{9{,}19} \cdot A_{i,\,\text{vorh}} = 0{,}109\ A_{i,\,\text{vorh}}$ gegeben und besitzen die folgenden in t/cm dargestellten Werte:

$A_0 = \infty$, $A_1 = 1{,}65$, $A_2 = 1{,}12$, $A_3 = 0{,}82$, $A_4 = 0{,}63$, $A_5 = 1{,}88$, $A_6 = \infty$.

Schleusner errechnet nach seinem nicht ganz strengen Verfahren die Stützensicherheit $\bar{\beta} = 9{,}27$, die sich von dem hier gerechneten strengen Wert $\mu_{\min} = 9{,}19$ um rd. 1 % unterscheidet.

Anmerkung: 1. In der obigen Gleichung sechsten Grades nach η' ist das Absolutglied gleich Null. Dies deutet darauf hin, daß sich die sechsgliedrige Knickdeterminante $\Delta' = 0$ durch ein Produkt $\eta' \Delta_5' = 0$ wiedergeben läßt, wobei Δ_5' eine fünfgliedrige Determinante darstellt. Diese Tatsache ist kein Zufall. Es läßt sich nämlich ganz allgemein beweisen und soll a. a. O. mitgeteilt werden, daß sich die Knickdeterminante eines n-stäbigen, nur zum Teil elastisch gestützten Durchlaufstabes, der unter den $(n+1)$ Querstützen s starre Stützen aufweist, stets auf eine $(n+1-s)$-gliedrige Determinante reduzieren läßt, gleichgültig, ob die starren Stützen am Rande oder an beliebiger Stelle innerhalb liegen. Diese wegen Platzmangel hier nicht erläuterte und durchgeführte Reduktion der Determinante hätte die Lösung des Problems noch weiter zu vereinfachen vermocht.

2. Schleusner zitiert auf S. 3 seines Forschungsheftes meine Abhandlung „Die Knicksicherheit der Druckgurte offener Brücken"

im Bd. III der Abhandlungen der I. V. B. H. und behauptet, daß mein hierin mitgeteiltes Verfahren zur Berechnung der Knickdeterminante sich nur auf symmetrische Stäbe beziehe. Demnach wäre bei der Anwendung dieses Verfahrens auf den hier berechneten 6feldrigen Stab derselbe auf einen 12feldrigen symmetrischen Stab zu ergänzen, der dann eine 23gliedrige Knickdeterminante ergäbe. Dies ist ein Irrtum. Auch meine obengenannte Abhandlung ermöglicht die Knickberechnung von Durchlaufstäben, die elastisch quergestützt sind und hinsichtlich Konstruktion und Belastung beliebige Unsymmetrie aufweisen. Sie hätte, auf das hier durchgerechnete Beispiel angewendet, ebenfalls, wenn auch in anderem Vorgang, auf die hier erhaltene sechsgliedrige Knickdeterminante geführt.

Beispiel 2. Im Buche von Melan-Bleich „Die gewöhnlichen und partiellen Differenzengleichungen der Baustatik" wird auf S. 233 der gekrümmte biegungssteife und zur Mitte symmetrische Obergurt des in Bild 7 dargestellten Lohseträgers mit Hilfe von Differenzengleichungen auf Ausknicken senkrecht zur Trägerebene untersucht. Gurtquerschnitt und Gurtträgheitsmoment aller Obergurtstäbe sind nahezu konstant, daher wird ein durchwegs gleicher Querschnitt $F = 1070$ cm² und ein durchwegs gleiches Trägheitsmoment $J = 103 \cdot 10^4$ cm⁴ der Berechnung zugrunde gelegt. Für die Knickuntersuchung wird ferner auch angenommen, daß alle Obergurtstäbe von der größten auftretenden Gurtdruckkraft $\mathfrak{S} = 850$ t beansprucht seien. Auch die Längen der Obergurtstäbe werden als untereinander gleich mit $c = 592$ cm vorausgesetzt. Die vorhandenen zur Mitte symmetrischen spezifischen Rahmenwiderstände sind in t/cm durch $A_0 = \infty$, $A_1 = 31{,}76$, $A_2 = 7{,}24$, $A_3 = 3{,}78$ und $A_4 = 3{,}37$ gegeben. Die Krümmung des Obergurtes wird vernachlässigt, die Knickuntersuchung daher für einen geraden 8feldrigen, hinsichtlich Konstruktion und Belastung zur Mitte symmetrischen Stab durchgeführt. Es ist die Stützensicherheit μ der vorhandenen elastischen Querstützung festzustellen, falls die Gebrauchslast $\mathfrak{S}$ um das $\nu = 3{,}5$fache auf $\mathfrak{S}_{Ki} = S = 2985$ t erhöht wird.

Setzt man $\delta_{i,\mathrm{erf}} = \mu\, \delta_{i,\mathrm{vorh}}$, so bildet auch hier, gleichwie im Beispiel 1, der Proportionalitätsfaktor μ die einzige Unbekannte des Problems, das im Abschnitt III/A bzw. IV/13 als „zweite Überprüfungsaufgabe" gekennzeichnet wurde.

Wegen der vorhandenen Symmetrie in Belastung und Konstruktion zeigt die in Bild 8 dargestellte Biegelinie des ausgeknickten Stabes entweder eine zur Mitte symmetrische oder polarsymmetrische Form. Im ersten Falle knickt der Stab nach einer ungeraden, im zweiten Falle nach einer geraden Zahl von Wellen. Diese zwei Knickfälle kann man nun von vornherein getrennt behandeln und die Knickuntersuchung des 8feldrigen symmetrischen Stabes auf die Knickuntersuchung der zwei in Bild 9 dargestellten 4feldrigen „Stabhälften" zurückführen. Der Querschnitt in der Mitte des nach Bild 8a deformierten Stabes ist als unverdrehbar auf federnder Stütze gelagert anzusehen, in Bild 8b hingegen verbleibt der Mittelpunkt dieses Querschnitts in seiner ursprünglichen Lage, während der Querschnitt selbst wohl eine Verdrehung erfährt, aber von keinem Moment beansprucht wird. Zerlegt man daher die nach Bild 8 deformierten Stäbe in je zwei symmetrische Hälften, so sind die linken Stabhälften in der in Bild 9 angedeuteten Art zu stützen. Im ersten Falle wird das rechte Stabende in einen starren, unverdrehbaren, aber federnd gelagerten Stützenstab eingespannt, im zweiten Falle liegt es frei drehbar auf unverschieblicher Stütze auf. Der spezifische Stützenwiderstand (Rahmenwiderstand) des Stützenstabes in Bild 9a ist die Hälfte des der Mittelstütze in Bild 8a zugeordneten Rahmenwiderstandes und daher durch $\frac{3{,}37}{2} = 1{,}685$ t/cm gegeben.

Nach dem in dieser Abhandlung erläuterten Verfahren soll nun zunächst die Knickberechnung der in Bild 9a dargestellten Stabhälfte durchgeführt werden.

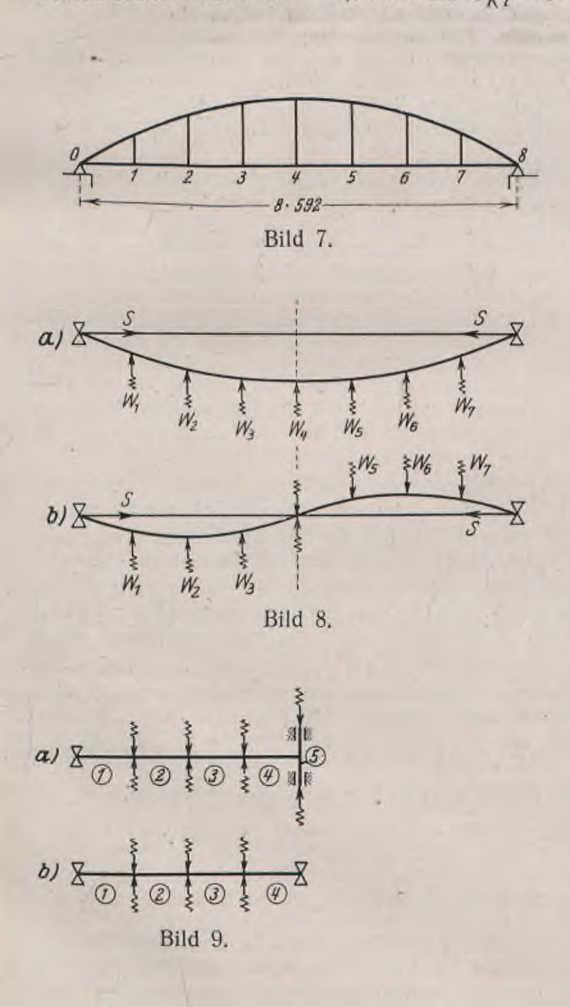


Bild 7.

Bild 8.

Bild 9.

1. Fortleitungszahlen a_r und b_r. Gelenkwerte k_i' [Gl. (12), (13)].

Bild 10.

	①	②	③	④	⑤
S_r in t	2985	2985	2985	2985	—
J_r in cm⁴	$103 \cdot 10^4$	$103 \cdot 10^4$	$103 \cdot 10^4$	$103 \cdot 10^4$	—
c_r in cm	592	592	592	592	—
T_r in t/cm² (2)	2105	2105	2105	2105	—
$\widehat{\varphi}_r$ nach (5)	2,196 92	2,196 92	2,196 92	2,196 92	—
m_r nach (4)	1,43	1,43	1,43	1,43	—
$\varphi_r°$	125° 52′ 27″	125° 52′ 27″	125° 52′ 27″	125° 52′ 27″	—
$\sin \varphi_r$	0,8103	0,8103	0,8103	0,8103	—
$\mathrm{tg}\, \varphi_r$	— 1,3828	— 1,3828	— 1,3828	— 1,3828	—
s_r nach (6)	1,7113	1,7113	1,7113	1,7113	—
t_r nach (6)	2,5888	2,5888	2,5888	2,5888	—
Frei gewählte Vergleichswerte nach IV/2: $S^* = 2985$ t, $c^* = 592$ cm.					
S_r' nach (7)	1	1	1	1	—
c_r' nach (7)	1	1	1	1	—
$S_r' c_r'$	1	1	1	1	—
σ_r' nach (8)	1,7113	1,7113	1,7113	1,7113	—
τ_r' bzw. (ε_r') nach (8) (9)	2,5888	2,5888	2,5888	2,5888	(0)
$\varkappa_i'$ nach IV/5	5,1776	5,1776	5,1776	2,5888	
k_i' nach (12)	0,1931	0,1931	0,1931	0,3862	
a_r nach (13)	0	0,3305	0,3305	0,3305	0
b_r nach (13)	0,3305	0,3305	0,3305	0,6610	0

2. Fortleitungszahlen p_r und q_r [Gl. (14)]. Multiplikatoren μ_r [Gl. (15)].

(r)	$p_r = \frac{a_r}{1 - b_{r-1} p_{r-1}}$ $r = 1, 2 \ldots 5$					nach (15)	$q_r = \frac{b_r}{1 - a_{r+1} q_{r+1}}$ $r = 5, 4 \ldots 1$				
	b_{r-1}	$b_{r-1} p_{r-1}$	$f_r = 1 - b_{r-1} p_{r-1}$	a_r	$p_r = \frac{a_r}{f_r}$	$\mu_r = \frac{q_r}{p_r}$ $r = 2, 3, 4$	a_{r+1}	$a_{r+1} q_{r+1}$	$g_r = 1 - a_{r+1} q_{r+1}$	b_r	$q_r = \frac{b_r}{g_r}$
1	—	—	1	0	0	—	0,3305	0,1270	0,8730	0,3305	0,3786
2	0,3305	0	1	0,3305	0,3305	1,1625	0,3305	0,1398	0,8602	0,3305	0,3842
3	0,3305	0,1092	0,8908	0,3305	0,3711	1,1398	0,3305	0,2185	0,7815	0,3305	0,4229
4	0,3305	0,1226	0,8774	0,3305	0,3767	1,7547	0	0	1	0,6610	0,6610
5	0,6610	0,2490	0,7510	0	0	—	—	—	1	0	0

3. Einflußzahlen λ'_{ii} [Gl. (16)].

$$\lambda'_{11} = \frac{q_1}{b_1} \cdot k_1' = \frac{0,3786}{0,3305} \cdot 0,1931 = 0,2212$$
$$\lambda'_{22} = \mu_2 \lambda'_{11} = 1,1625 \cdot 0,2212 = 0,2572$$
$$\lambda'_{33} = \mu_3 \lambda'_{22} = 1,1398 \cdot 0,2572 = 0,2913$$
$$\lambda'_{44} = \mu_4 \lambda'_{33} = 1,7547 \cdot 0,2931 = 0,5144.$$

4. A'-, B'-, C'- und D'-Momente nach Tabelle 1 in IV/9.

	$\nu_1 = +1$	$\nu_2 = +1$	$\nu_3 = +1$	$\nu_4 = +1$	
	$A_1' = 0,2212$	$B_1' = 0,3063$	$C_1' = 0,1210$	$D_1' = 0,0597$	
0,3842	$A_2' = 0,0850$	$B_2' = 0,3422$	$C_2' = 0,3660$	$D_2' = 0,1807$	0,3305
0,4229	$A_3' = 0,0360$	$B_3' = 0,1447$	$C_3' = 0,4019$	$D_3' = 0,4869$	0,3711
0,6610	$A_4' = 0,0238$	$B_4' = 0,0957$	$C_4' = 0,2657$	$D_4' = 0,7082$	

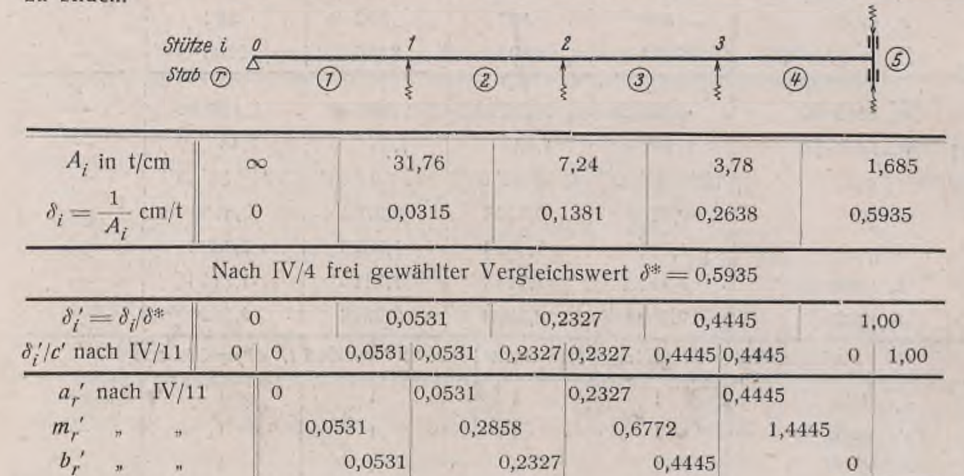
5. Summenwerte nach Tabelle 2 in IV/10.

$(\Sigma A')_r$	$(\Sigma B')_r$	$(\Sigma C')_r$	$(\Sigma D')_r$
$(\Sigma A')_1 = 0,2212$	$(\Sigma B')_1 = 0,3063$	$(\Sigma C')_1 = 0,1210$	$(\Sigma D')_1 = 0,0597$
$(\Sigma A')_2 = 0,3062$	$(\Sigma B')_2 = 0,6485$	$(\Sigma C')_2 = 0,4869$	$(\Sigma D')_2 = 0,2404$
$(\Sigma A')_3 = 0,1210$	$(\Sigma B')_3 = 0,4869$	$(\Sigma C')_3 = 0,7679$	$(\Sigma D')_3 = 0,6676$
$(\Sigma A')_4 = 0,0598$	$(\Sigma B')_4 = 0,2404$	$(\Sigma C')_4 = 0,6676$	$(\Sigma D')_4 = 1,1951$

Diese Tabelle zeigt Symmetrie zur Diagonale, ein Beweis für die Richtigkeit der bisherigen Zahlenrechnung.

6. Stabwerte a_r', m_r' und b_r'.

Diese Werte sind nach Abschnitt IV/13 mit Hilfe der vorhandenen δ_i'/c'-Werte zu bilden.



A_i in t/cm	∞		31,76		7,24		3,78		1,685	
$\delta_i = \frac{1}{A_i}$ cm/t	0		0,0315		0,1381		0,2638		0,5935	
Nach IV/4 frei gewählter Vergleichswert $\delta^* = 0,5935$										
$\delta_i' = \delta_i/\delta^*$	0		0,0531		0,2327		0,4445		1,00	
δ_i'/c' nach IV/11	0	0	0,0531	0,0531	0,2327	0,2327	0,4445	0,4445	0	1,00
a_r' nach IV/11		0		0,0531		0,2327		0,4445		
m_r' „ „			0,0531		0,2858		0,6772		1,4445	
b_r' „ „			0,0531		0,2327		0,4445		0	

7. Die $h'_{rK'}$-Glieder der Knickdeterminante [Gl. (22)].

1. Reihe: $h'_{1K'} = 0 \quad + 0,0531\,(\Sigma K')_1 + 0,0531\,(\Sigma K')_2$
2. Reihe: $h'_{2K'} = 0,0531\,(\Sigma K')_1 + 0,2858\,(\Sigma K')_2 + 0,2327\,(\Sigma K')_3$
3. Reihe: $h'_{3K'} = 0,2327\,(\Sigma K')_2 + 0,6772\,(\Sigma K')_3 + 0,4445\,(\Sigma K')_4$
4. Reihe: $h'_{4K'} = 0,4445\,(\Sigma K')_3 + 1,4445\,(\Sigma K')_4 + 0$

$K' = A', B' \ldots D'$

+ 0,0280	— 0,0507	+ 0,0323	— 0,0159
— 0,1274	+ 0,3149	— 0,3243	+ 0,2273
+ 0,1797	— 0,5876	+ 0,9301	— 1,0392
— 0,1400	+ 0,5637	— 1,3057	+ 2,0231

Die $h'_{rK'}$-Glieder und die S'-Produkte in der folgenden Tabelle wurden bereits hier mit den ihnen nach IV/12 in der Knickdeterminante zukommenden Vorzeichen versehen.

8. Die S'-Produkte der Knickdeterminante [Gl. (20)].

— 0,0531	+ 0,0531	—	—
+ 0,0531	— 0,2858	+ 0,2327	—
—	+ 0,2327	— 0,6773	+ 0,4445
—	—	+ 0,4445	— 1,4445

9. Knickdeterminante und Lösung.

Die Addition der vertikalen Kolonnen in den zwei letzten Tabellen führt in Analogie zu (20) zur Knickdeterminante

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \eta' - 0,0251 & + 0,0024 & + 0,0323 & - 0,0159 \\ - 0,0743 & \eta' + 0,0291 & - 0,0916 & + 0,2273 \\ + 0,1797 & - 0,3549 & \eta' + 0,2528 & - 0,5947 \\ - 0,1400 & + 0,5637 & - 0,8612 & \eta' + 0,5786 \end{vmatrix}$$

deren Ausrechnung und Nullsetzung die Gleichung

$$\eta'^4 + 0,8354\,\eta'^3 - 0,5318\,\eta'^2 + 0,0535\,\eta' - 0,0011 = 0$$

liefert. Hieraus gewinnt man die vier Wurzeln

$$\eta_1' = + 0,3259 \qquad \eta_3' = + 0,0301$$
$$\eta_2' = + 0,0915 \qquad \eta_4' = - 1,2829.$$

Die größte positive Wurzel bestimmt, den Erläuterungen in IV/13 entsprechend, aus $\eta' = \frac{c^*}{\mu\,\delta^* S^*}$ die Lösung des Problems im kleinsten Wert

$$\text{(I)} \quad \mu_{\min} = \frac{c^*}{\delta^* S^*} \cdot \frac{1}{\eta'_{\max}} = \frac{592}{0,5935 \cdot 2985} \cdot \frac{1}{0,3259} = 1,0254.$$

Die vier Wurzeln η' bestimmen das Ausknicken des Stabes nach einer ungeraden Wellenzahl. Es läßt sich auch unschwer feststellen, welche von den vier Wurzeln der Wellenzahl 1 bzw. 3, 5, 7 zugeordnet ist, doch kann diese Feststellung, wenn sie nicht besonders verlangt wird, entfallen.

Da man von vornherein in keiner Weise entscheiden kann, ob der Durchlaufstab nach einer ungeraden oder nach einer geraden Zahl von Wellen ausknicken wird, so muß auch noch der letztere Fall des Ausknickens untersucht werden. Die der Berechnung zugrunde zu legende Stabhälfte ist jetzt nach Bild 9b gelagert anzunehmen. Dieser Knickfall ist dem in Beispiel 1 behandelten Knickfall vollkommen analog, weshalb hier die Durchführung der Berechnung nicht mitgeteilt wird.

Die Ausrechnung der diesem Knickfall zugeordneten Knickdeterminante liefert die Gleichung

$$\eta'^4 - 0,2398\,\eta'^3 - 0,0391\,\eta'^2 + 0,0030\,\eta' + 0 = 0$$

mit den vier Wurzeln

$$\eta_1' = 0 \qquad \eta_3' = + 0,0594$$
$$\eta_2' = + 0,3309 \qquad \eta_4' = - 0,1505.$$

Aus $\eta' = \frac{c^*}{\mu\,\delta^* S^*}$ erhält man als Lösung des Problems:

$$\text{(II)} \quad \mu_{\min} = \frac{c^*}{\delta^* S^*} \cdot \frac{1}{\eta'_{\max}} = \frac{592}{0,5935 \cdot 2985} \cdot \frac{1}{0,3309} = 1,0099 = \sim 1,01.$$

Der Vergleich der nach (I) und (II) errechneten Werte $\mu_{\min}$ läßt erkennen, daß der letztere Wert $\mu_{\min} = 1,01$ für das Knicken des Durchlaufstabes maßgebend ist. $\mu_{\min} = 1,01 > 1$ zeigt, daß die vorhandene elastische Querstützung die $\nu = 3,5$fache Knicksicherheit zu gewährleisten vermag, und daß dies auch dann noch der Fall ist, wenn die durch $\delta_{i,\,\text{vorh}}$ gekennzeichnete spezifische Stützensenkung auf $\delta_{i,\,\text{erf}} = 1,01\,\delta_{i,\,\text{vorh}}$ vergrößert, die federnde Querstützung also „weicher" gemacht wird. Unterläßt man dies, so ist eine 1,01fache „Stützensicherheit" vorhanden. Wegen $A_i = \frac{1}{\delta_i}$ ergeben sich die erforderlichen spezifischen Rahmenwiderstände aus

$$A_{i,\,\text{erf}} = \frac{1}{\delta_{i,\,\text{erf}}} = \frac{1}{1,01} \cdot \frac{1}{\delta_{i,\,\text{vorh}}} = 0,990\,A_{i,\,\text{vorh}}$$

in t/cm zu $A_0 = \infty$, $A_1 = 31,45$, $A_2 = 7,17$, $A_3 = 3,75$ und $A_4 = 3,34$.

Bleich erhält mit Hilfe von Differenzengleichungen den erforderlichen spezifischen Rahmenwiderstand $A_{i,\,\text{erf}} = 0,851\,A_{i,\,\text{vorh}}$ und daher ein gegen den strengen Wert $0,990\,A_{i,\,\text{vorh}}$ um 14,04% zu kleines Ergebnis. Die nach Bleich errechneten Stützenwiderstände $A_{i,\,\text{erf}}$ könnten daher das Ausknicken des Gurtes bei der verlangten 3,5fachen Gebrauchslast nicht verhindern. Nach Bleich besitzt die Biegelinie des ausgeknickten Stabes eine ungerade Zahl von Wellen, während nach dem hier verwendeten strengen Verfahren ein Ausknicken nach gerader Wellenzahl errechnet wurde.

INHALT: Kräfteverteilung an Brückenkonstruktionen, versteift durch zwei Windverbände und mehrere Querverbände. — Ein Rechenschema zur Knickberechnung mehrfeldriger beliebig gestützter Druckstäbe und seine Anwendung auf Zahlenbeispiele. (Schluß.)

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftwaltung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 7 RM und Postgeld

15. Jahrgang | BERLIN, 6. Februar 1942 | Heft 4/5

Einige neuere Ergebnisse zum Aufschweißbiegeversuch.

Von Otto Werner (Staatliches Materialprüfungsamt Berlin-Dahlem).

Die folgenden Ausführungen stellen zum Teil eine Zusammenfassung neuerer Versuchsergebnisse zum Aufschweißbiegeversuch dar, die in ausführlicher Form gleichzeitig an anderer Stelle erscheinen[1]), zum Teil sind sie eine Stellungnahme zu den Ausführungen von E. H. Schulz und W. Bischof[2]) in dieser Zeitschrift.

Die Erörterungen über die Eignung des Aufschweißbiegeversuchs für die Beurteilung der Schweißbarkeit der Baustähle sind augenscheinlich immer noch in vollem Gange. Während anfangs der Aufschweißbiegeversuch von vielen Seiten, insbesondere auch aus den Kreisen der stahlerzeugenden Industrie, weitgehend abgelehnt wurde, mehren sich seit einiger Zeit die Stimmen, die der Ansicht Ausdruck geben, daß die Ergebnisse dieses Versuchs nicht rein zufälliger Natur sind, sondern daß sie vielmehr engstens mit gewissen, dem untersuchten Werkstoff eigentümlichen Eigenschaften in Zusammenhang stehen. Der Aufschweißbiegeversuch hat damit bereits in die Entwicklung der höherfesten Baustähle eingegriffen, wobei besonders die durch ihn vermittelten metallurgischen Erkenntnisse in den Vordergrund getreten sind[3]).

Nachdem der Aufschweißbiegeversuch somit seine Nützlichkeit und Brauchbarkeit erwiesen hat (Meinungsverschiedenheiten bestehen eigentlich nur noch hinsichtlich gewisser Einzelheiten der Versuchsausführung und der Bewertung), hat sich in allerletzter Zeit eine neue Entwicklung angebahnt, die darauf gerichtet ist, den etwas schwerfälligen Aufschweißbiegeversuch nunmehr, nachdem er gewissermaßen seine Schuldigkeit getan hat, durch einfachere, von ihm abgeleitete Kenngrößen zu ersetzen[4]).

Über die hauptsächlichsten Ergebnisse einer in diesem Zusammenhange ausgeführten Versuchsreihe soll im folgenden berichtet werden.

1. Versuchsmaterial und Versuchsausführung.

Als Versuchswerkstoff diente ein Stahl St 52 vom Chrom-Kupfer-Typus von weitgehend übereinstimmender Zusammensetzung der Proben. Diese Proben wurden in einer Dicke von 40 mm aus Walzprofilen herausgearbeitet. Ihre Zahl betrug 38. Der Werkstoff hatte die folgende allgemeine Zusammensetzung: 0,20% Kohlenstoff, 0,35% Silizium, 1,0% Mangan, 0,35% Chrom, 0,45% Kupfer, 0,025% Phosphor und 0,022% Schwefel. Im Durchschnitt lag der Kohlenstoffgehalt der Proben bei 0,18 bis 0,19%. In einem Falle überstieg er die vorgeschriebene Grenze bis auf 0,22%. In einigen wenigen Fällen lag der C-Gehalt bei 0,17%. Die untersuchten Proben entstammen insgesamt zehn Betriebsschmelzen aus dem Jahre 1937. Eine der Schmelzen, der vier Proben entnommen wurden, war versuchsweise mit Aluminium desoxydiert worden. 19 der 38 Proben wurden einer normalisierenden Glühung unterworfen (1 Stunde 880° mit anschließender Luftabkühlung).

Die Ausführung der Biegeversuche erfolgte in der üblichen Form: Die Stützweite betrug das zwölffache der Blechdicke, die Probenbreite 200 mm. Als besonders wichtig wurde die genaue Festlegung der Definition des Biegewinkels beim ersten Anriß (α_1) angesehen. Dieser Winkel α_1 wurde immer dann gemessen, wenn der zunächst in der Mitte der Längsschweißraupe entstehende kleine Anriß sich gerade über die Breite der Schweißraupe bis zum beginnenden sichtbaren Übertritt in den Grundwerkstoff (etwa 1 bis 2 mm weit) durchgefressen hatte.

Hierbei war der Gedanke maßgebend, daß der von anderer Seite vielfach als α_1 definierte Anriß allein in der Schweiße keine Aussagen über die Eigenschaften des Grundwerkstoffes ermöglicht, da die Rißneigung der Schweiße weitgehend von den Besonderheiten der Elektrode und der Schweißausführung, insbesondere auch von der Dehnfähigkeit der Gußhaut und der an der Oberfläche der Schweiße liegenden Stengelkristallite abhängt. Auch wurde sehr häufig beobachtet, daß die primär in der Härtungszone entstehenden kleinen Anrisse viel eher die Neigung zeigen, sich in den Grundwerkstoff hinein fortzusetzen als in die Schweiße. Ein in der Oberfläche der Schweiße sichtbarer Anriß braucht demnach nicht immer gleichbedeutend mit einem entsprechenden Anriß im Werkstoff zu sein. Aus vielen Mikroaufnahmen gewinnt man geradezu den Eindruck, als ob die Grenze Schweiße – Übergangszone des Grundwerkstoffes eine Art Schranke für die Ausbreitung der Mikrorisse der Übergangszone in die Schweiße hinein darstellt. Ein solcher Übertritt wird im allgemeinen erst bei sehr großen Verformungen beobachtet. Zudem kann ein Nachweis von Anrissen im Grundwerkstoff unter der Schweiße ohne Zerstörung der Probe nicht geführt werden. Da jedoch immerhin mit dem frühzeitigen Auftreten von Mikrorissen in der Härtungszone gerechnet werden muß, bedeutet das geschilderte Verfahren eine weniger strenge Beurteilung als die bisher geübte Praxis.

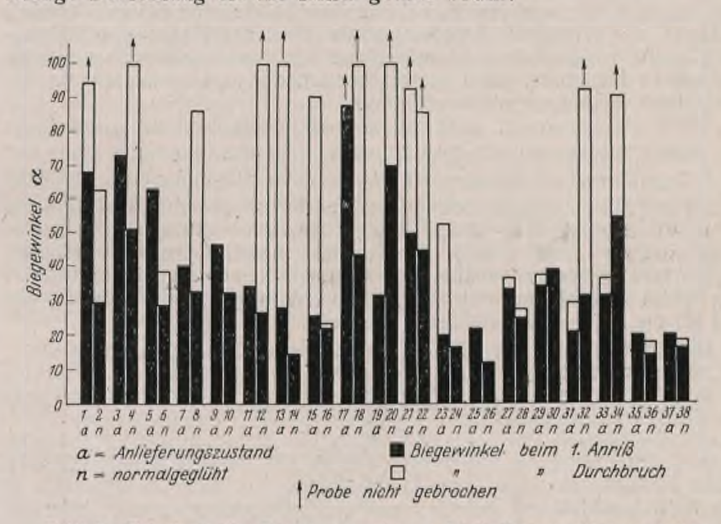


Bild 1. Ergebnis der Biegeversuche an 38 Aufschweißbiegeproben.

Die Möglichkeit der Ableitung bestimmter Gesetzmäßigkeiten aus den Aufschweißbiegeversuchen hat nachträglich die Richtigkeit des Vorgehens und die Berechtigung zur Verwendung des Biegewinkels α_1 in der hier gegebenen Definition als ein Hilfsmittel zur Ermittlung bestimmter Werkstoffeigenschaften bestätigt.

Die Versuchsergebnisse sind in der üblichen Form in Bild 1 zusammengestellt. Man erkennt, daß trotz weitgehend einheitlicher Zusammensetzung der Proben der mit ihnen durchgeführte Aufschweißbiegeversuch recht verschiedenartige Ergebnisse liefert. Es liegt zunächst nahe, hieraus zu folgern, daß Ungleichmäßigkeiten der Versuchsausführung oder dem Versuch grundsätzlich innewohnende Streutendenzen die Ursache dieser Unterschiede sind. Die sich an die Biegeversuche anschließende Untersuchung sonstiger Eigenschaften der Grundwerkstoffe hat jedoch ergeben, daß die erwähnte Annahme fehlgeht, daß vielmehr ganz bestimmte, dem Werkstoff von seiner metallurgischen und thermischen Vorbehandlung her innewohnende Eigenschaften die Ursache dieser Unterschiede sind.

2. Weitere an dem Werkstoff der Proben 1 bis 38 ausgeführte Versuche.

Um einen Einblick in die möglichen Zusammenhänge zwischen dem Ergebnis der Aufschweißbiegeversuche und den sonstigen Eigenschaften der Grundwerkstoffe zu gewinnen, wurden nach Beendigung der Biege-

---

[1]) Im Arch. f. Eisenhüttenwesen 15 (1941/42), S. 219 bis 234. Die Versuche wurden im Sommer 1940 abgeschlossen. Im Januar 1941 wurde über die Ergebnisse auf einer Sitzung des Unterausschusses für Schweißtechnik des Vereins Deutscher Eisenhüttenleute berichtet.

[2]) Stahlbau 14 (1941), Heft 10 11 und 12 13.

[3]) R. Wasmuth, Bautechn 17 (1939), S. 85. — O. Werner, Elektroschweißung 10 (1939), S. 61. u. 145. — H. Buchholtz, St. u. E. 59 (1939), S. 331. — R. Wasmuth und C. Salzmann, St. u. E. 60 (1940), S. 453. — H. Hauttmann, St. u. E. 61 (1941), Heft 6 u. 7. — A. Fry und L. Kirchfeld, Z. d. VdI 61 (1941). — E. H. Schulz und W. Bischof, a. a. O.

[4]) O. Werner, a. a. O. — O. Graf, Bericht d. Dtsch. Ausschusses für Stahlbau, Ausgabe B., Heft 11. — R. Wasmuth und C. Salzmann, a. a. O. — W. Kuntze, Stahlbau 14 (1941), Heft 21/22, S. 97.

versuche an dem Grundwerkstoff der 38 Proben folgende Untersuchungen ausgeführt:

a) Härtemessungen an den Übergangszonen, b) dilatometrische Messungen des Hysteresebereiches entsprechend den früher veröffentlichten Überlegungen des Verfassers[5]), c) Messung der Rißhäufigkeit in der wärmebeeinflußten Zone dicht unterhalb der Schweißnaht, d) Bestimmung der Kerbschlagzähigkeit des Grundwerkstoffes.

a) Härtemessungen.

Die Härtemessungen wurden an Längsschnitten durch die von der Bruchstelle möglichst weit entfernt liegenden Enden der Schweißraupe ausgeführt[6]). Gemessen wurde hierbei der Höchstwert der Vickershärte in der wärmebeeinflußten Zone dicht unterhalb der Schweißraupe. Die Ergebnisse der Härtemessungen sind in Bild 2 wiedergegeben. Jeder einzelne Punkt ist ein Mittelwert aus etwa fünf bis sechs sich über einen Bereich von etwa 10 cm verteilenden Einzelhöchstwerten.

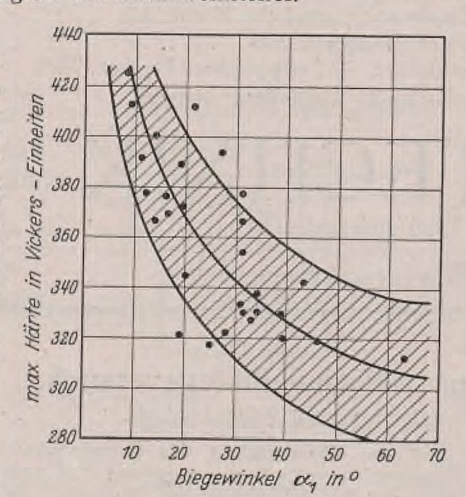


Bild 2. Zusammenhang zwischen Biegewinkel und Härte.

Das Ergebnis der Härtemessungen kann dahin zusammengefaßt werden, daß in Übereinstimmung mit von anderer Seite, neuerdings auch von E. H. Schulz und W. Bischof[7]) gemachten Feststellungen die Höchsthärte in der wärmebeeinflußten Zone nur sehr bedingt in einem Zusammenhang mit dem Ergebnis des Aufschweißbiegeversuchs, insbesondere mit dem Biegewinkel beim ersten Anriß steht. Die Streuungen der Werte sind zu groß, als daß eine sicher begründete Gesetzmäßigkeit aus ihnen abgeleitet werden könnte.

b) Die dilatometrischen Messungen.

Die dilatometrischen Messungen wurden entsprechend den früher mitgeteilten Überlegungen des Verfassers (a. a. O.) ausgeführt. Anknüpfend an die bekannte Bedeutung artfremder und arteigener Keime für die Umwandlungskinetik des Stahles und damit für sein Verhalten unter Wärmeeinfluß (im vorliegenden Falle bei Zufuhr von Schweißwärme), wurde in der erwähnten Arbeit erstmals eine der Messung verhältnismäßig leicht zugängliche und mit dieser Umwandlungskinetik engstens verbundene Meßgröße, der Hysteresebereich der A_1-Umwandlung[8]), mit dem Aufschweißbiegeversuch verknüpft.

Als Hysteresebereich wird hierbei die dilatometrisch aus Anheiz- und Abkühlungskurven zu bestimmende Differenz der A_{c1}- und der A_{r1}-Temperatur (im folgenden als Δ_T bezeichnet) gemessen[9]). Wichtig ist, daß die Abkühlungsgeschwindigkeit hierbei so gewählt wird, daß sie der bei der Schweißung dicker Bleche im Umwandlungsbereich (etwa zwischen 900° und 500°) auftretenden Abkühlungsgeschwindigkeit möglichst weitgehend angenähert ist. Aus Arbeiten verschiedener Autoren kann diese Abkühlungsgeschwindigkeit in dem erwähnten Bereich mit etwa 30 bis 50°/sek angenommen werden.

Die erhaltenen Ergebnisse stimmen mit den früher veröffentlichten Ergebnissen des Verfassers überein. Sie sind in Bild 3 zusammengestellt. In dem Bilde nicht wiedergegeben sind hierbei die Δ_T-Werte von vier Proben, deren Hysteresebereiche außerhalb der Streugrenze bei wesentlich tieferen Δ_T-Werten liegen. Die Berechtigung zu dieser Auslassung ist dadurch gegeben, daß der Stahl dieser vier Proben, wie bereits erwähnt, versuchsweise mit Aluminium desoxydiert wurde. Durch diese „Sonderschmelzbehandlung" wird die „Umwandlungsfreudigkeit" des Stahles und damit sein Hysteresebereich so weit verbessert (verkleinert), daß ein unmittelbarer Vergleich mit den ohne Al-Zusatz erschmolzenen Stählen erschwert wird.

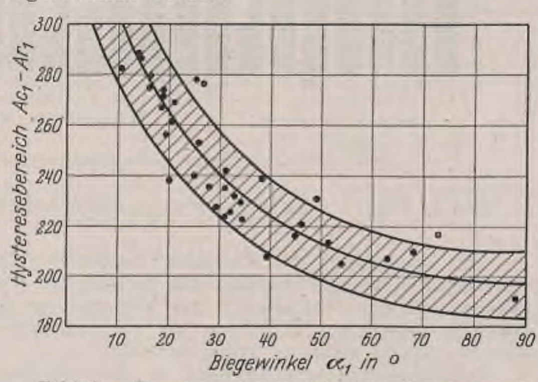


Bild 3. Zusammenhang zwischen Biegewinkel und Hysteresisbereich.

Von dieser im voraus zu erwartenden Ausnahme abgesehen, ergeben die Versuche erneut einen klaren Zusammenhang zwischen den Hysteresebereichen und den Winkeln α_1. Der Streubereich ist (etwa im Vergleich zu dem in Bild 2 dargestellten Streubereich der Härtemessungen) als gering anzusprechen. Die Berechtigung, aus diesen Versuchen einen Zusammenhang zwischen dem Verhalten des Stahles unter dem Einfluß der Schweißwärme und seiner Umwandlungskinetik herzuleiten, kann hiernach kaum mehr in Zweifel gezogen werden.

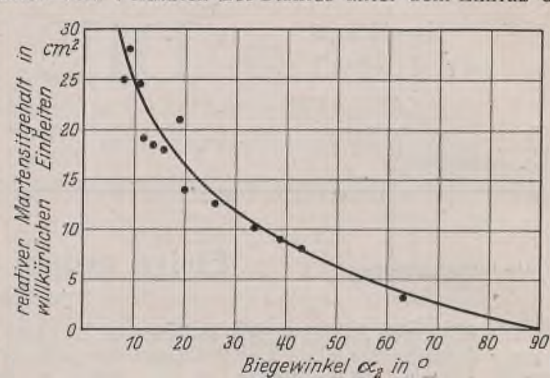


Bild 4. Zusammenhang zwischen Biegewinkel und Martensitmenge in der Härtungszone.

Die dilatometrischen Messungen hatten ferner noch ein zweites Ergebnis: bei bestimmten Proben, und zwar immer gerade bei denjenigen Proben, die einen verhältnismäßig großen Hysteresebereich ergeben hatten, wurde auf der Abkühlungskurve im Temperaturgebiet von 300° eine mehr oder minder ausgeprägte Unstetigkeit gefunden, die als ein Zerfall von Austenitresten gedeutet wurde, die bei der schnellen Abkühlung der Probe bis zu dieser Temperatur durchgeschleppt wurden. Dieser Austenitzerfall bei 300° erfolgt unter Martensitbildung. Durch ein besonderes, an anderer Stelle näher beschriebenes Verfahren gelang es, diesen Effekt halb-quantitativ auszuwerten. Die hierbei gewonnenen Zahlenwerte lassen einen klaren Zusammenhang zwischen der Neigung des Werkstoffes zur Martensitbildung und der Größe des Biegewinkels α_1 erkennen. Der Befund steht in Übereinstimmung mit der von anderer Seite[10]) verschiedentlich auf Grund von mikroskopischen Beobachtungen und von Mikrohärtemessungen geäußerten Ansicht, daß das ungünstige Verhalten bestimmter Stähle beim Aufschweißbiegeversuch mit der Neigung dieser Stähle zur Martensitbildung in der wärmebeeinflußten Zone des Grundwerkstoffes in Zusammenhang steht.

c) Messung der Rißhäufigkeit.

Die weiteren Versuche beschäftigten sich mit der Neigung des Werkstoffes zur Rißbildung in der wärmebeeinflußten Zone unterhalb der Schweißnaht. Hierbei war der Gedanke maßgebend, daß die Bruchwahrscheinlichkeit des Werkstoffes u. a. auch von der Zahl der Kerbstellen in der wärmebeeinflußten Zone abhängt. Mit zunehmender Zahl und Schärfe dieser Mikrorisse wird aller Wahrscheinlichkeit nach auch die Möglichkeit wachsen, daß eine dieser Kerbstellen der Ausgangspunkt für den endgültigen Durchbruch wird.

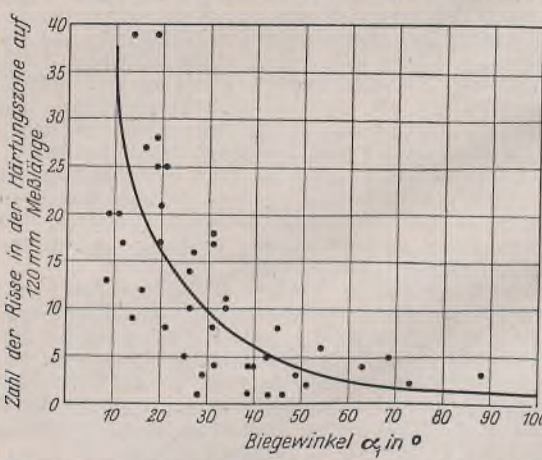


Bild 5. Zusammenhang zwischen Biegewinkel und Rißzahl in der Härtungszone.

Die Rißzahl wurde ähnlich wie die Härte an Längsschnitten durch die Schweißraupe an einer von der Bruchstelle möglichst weit entfernten Stelle der Schweißnaht bestimmt. Das Ergebnis dieser Rißzählungen ist in Bild 5 wiedergegeben. Einen unmittelbaren Eindruck von den hierbei gegebenenfalls auftretenden Unterschieden soll Bild 6 vermitteln, welches an einem passend gewählten Beispiel zeigt, daß der umwandlungsfreudige Werkstoff trotz starker Formänderung (bei einem Biegewinkel von 69° beträgt die in etwa 150 mm Entfernung von der Bruchstelle gemessene Dehnung in der wärmebeeinflußten Zone etwa 10 %) innerhalb des im Bilde wiedergegebenen Ausschnittes keinen Riß erkennen läßt. Der umwandlungsträge Werkstoff dagegen läßt bei einem Biegewinkel von etwa 19° und einer Dehnung von nur 0,5 % auf derselben Meßlänge bereits zwölf Mikrorisse erkennen. Aus Bild 5 ist die

[5]) O. Werner, a. a. O.

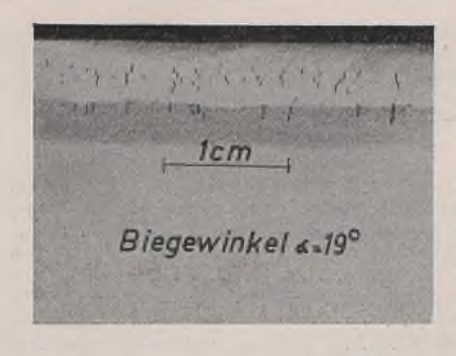
[6]) Bei Härtemessungen, besonders an stark gebogenen Proben, können Fehler auftreten, wenn die Härtemessungen in zu großer Nähe der Biegezone ausgeführt werden, da hier erhebliche Aufhärtungen allein als Folge der Kaltverformung beobachtet werden.

[7]) E. H. Schulz und W. Bischof, a. a. O.

[8]) Auf eine Erläuterung der metallurgischen Begriffe kann an dieser Stelle um so eher verzichtet werden, als dies bereits in anschaulicher Weise in dem erwähnten Aufsatz von E. H. Schulz und W. Bischof (a. a. O.) geschehen ist.

[9]) Die Festlegung der A_{r1}-Temperatur auf der Hysteresekurve erfolgt konventionell. Gut hat sich die Feststellung des Maximums der Abkühlungskurve bewährt.

[10]) Rapatz und Schütz, St. u. E. 58 (1938), S. 378. — W. Bischof, Arch. f. Eisenhüttenwesen 13 (1939/40), S. 519.



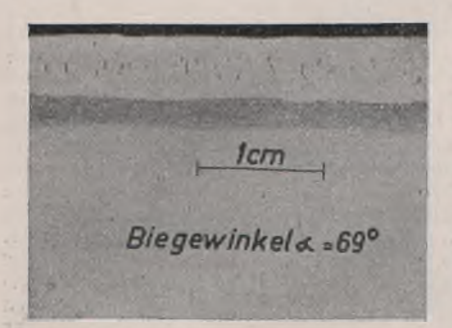


Bild 6. Zusammenhang zwischen Rißwahrscheinlichkeit und Biegewinkel.

in diesem Zusammenhange wichtige Beobachtung zu entnehmen, daß die Rißhäufigkeit bei einem Biegewinkelbereich von 30 bis 40° nach kleiner werdenden Biegewinkeln hin stark zunimmt. Stellt man sich auf den besonders von K. Klöppel[11]) vertretenen Standpunkt, daß der Biegeversuch ein Urteil über die plastischen Reserven des geschweißten Werkstoffes ermöglichen soll, so kann aus dem Verlauf der in Bild 5 wiedergegebenen Rißhäufigkeit in Abhängigkeit vom Biegewinkel der Schluß gezogen werden, daß bei den Werkstoffen, die beim Aufschweißbiegeversuch nur kleine Biegewinkel liefern, d. h. bei den umwandlungsträgen Werkstoffen, die plastischen Reserven augenscheinlich nur gering sind.

d) Kerbschlagversuche. Voraussetzung freilich dafür, daß einer der Mikrorisse den Ausgangspunkt für einen vollen und spröden Durchbruch des Stahles bildet, ist, daß auch der durch Wärmeeinflüsse unveränderte Werkstoff außerhalb der Schweißnahtzone reißempfindlich ist. Während also die bisher erörterten Erscheinungen sich wesentlich mit der Frage beschäftigten: In welchem Zusammenhang steht der Biegewinkel mit den Veränderungen, welche der Werkstoff unter der Einwirkung der Schweißhitze und der anschließenden schnellen Abkühlung erleidet, erhebt sich nunmehr die Frage: Wie kann die Neigung des unveränderten Grundwerkstoffes, bei Gegenwart scharfer Kerben mehr oder weniger spröde zu brechen, gekennzeichnet werden. Das Bestreben ist also darauf gerichtet, zu der ersten Kennziffer $\measuredangle_T$ noch eine zweite Kennziffer zu ermitteln, die ein Maß für das Verhalten des Werkstoffes bei Beanspruchungen in Gegenwart scharfer Kerben darstellt.

Die Verwendbarkeit der Kerbschlagzähigkeit des unveränderten Grundwerkstoffes in der einen oder anderen Probenform (Rundkerb- oder Schlitzkerbprobe) für eine derartige Kennzeichnung ist inzwischen besonders im Anschluß an die Vorschläge von O. Graf (a. a. O.) an verschiedenen Stellen geprüft worden. Im großen und ganzen kann man das Ergebnis dieser Versuche dahin zusammenfassen, daß die normale DVMR-Probe (Probelage parallel zur Walzrichtung) keine ausreichende Unterscheidungs- und Kennzeichnungsmöglichkeit für die Reißempfindlichkeit des Werkstoffes bietet[12]).

Günstigere Ergebnisse wurden dagegen mit der von O. Graf vorgeschlagenen Schlitzkerbprobe und in ähnlicher Weise auch mit der DVMS-Probe erhalten. Die Absolutwerte der Kerbschlagzähigkeit liegen bei diesen Probenformen infolge der wesentlich verschärften Kerbform erheblich niedriger als bei der DVMR-Probe. Eine gewisse Unterscheidungsmöglichkeit zwischen reißempfindlichen und zwischen kerbzähen Werkstoffen scheint nach den Versuchen mehrerer Beobachter bei dieser Probenform im Bereich der Möglichkeit zu liegen.

Beide Probenformen wurden auch in der vorliegenden Arbeit in die Untersuchung mit einbezogen. Die Ergebnisse sind in der auch von anderer Seite mehrfach verwendeten Darstellungsweise (Kerbschlagzähigkeit unter Verwendung der Schlitzkerbprobe aufgetragen gegen Kerbschlagzähigkeit unter Verwendung der Rundkerbprobe) in Bild 7 wiedergegeben. Die Unterscheidung zwischen bedingungsgemäßen und nicht bedingungsgemäßen Proben wurde auf Grund der Ergebnisse der Durchbruchsbiegewinkel (α_2) getroffen. Man erkennt, daß zwar die Mehrzahl der bedingungsgemäßen Proben oberhalb von etwa 8 kgm/cm² liegt, während die nicht bedingungsgemäßen Proben unterhalb 6 kgm/cm² liegen, daß aber doch ein verhältnismäßig großer Streubereich vorhanden ist, der eine klare Entscheidung einigermaßen erschwert. Die Ursache für diesen verhältnismäßig großen Streubereich ist wahrscheinlich u. a. in der etwas schwierigen und schlecht reproduzierbaren Art der Probenherstellung bei der Grafschen Probenform begründet. Parallelmessungen an ein und demselben Werkstoff geben bekanntlich bei der Grafschen Probenform erheblich größere Streuungen als bei der DVMR-Probe.

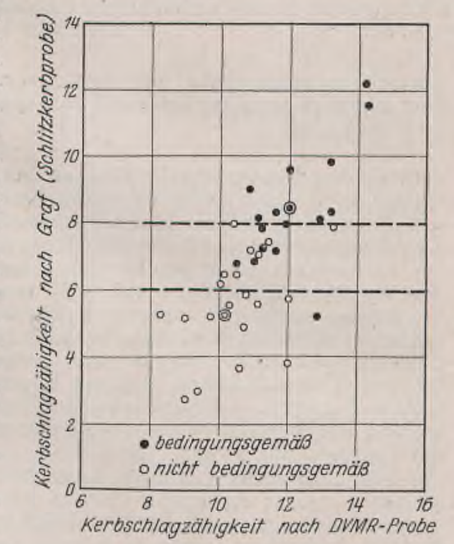


Bild 7. Kennzeichnung des Werkstoffverhaltens durch die Schlitzkerbprobe nach Graf.

Die anscheinend wesentlich günstigeren, von R. Wasmuth und C. Salzmann (a. a. O.) unter Verwendung der Schlitzkerbprobe erhaltenen Ergebnisse (vgl. Bild 25 der erwähnten Arbeit von E. H. Schulz und W. Bischof, a. a. O.) sind dadurch zustande gekommen, daß hier nur ausgesprochene Grobkornstähle mit ausgesprochenen Feinkornstählen verglichen wurden. Die Anwendungsmöglichkeit der Schlitzkerbprobe wird jedoch, wie Bild 7 zeigt, stark eingeschränkt, wenn man ein verhältnismäßig einheitliches, nicht „besonders" erschmolzenes Material mit Hilfe der Schlitzkerbprobe zu sortieren versucht (Bild 7).

Daß die DVMR-Probe in der üblichen Ausführung (Probenlage parallel zur Walzrichtung) eine noch geringere Unterscheidungsmöglichkeit als die Schlitzkerbprobe bietet, konnte auch in der vorliegenden Arbeit wieder bestätigt werden. Der Vorteil der DVMR-Probe liegt jedoch in ihrer guten Reproduzierbarkeit, die auf die verhältnismäßig einfache Art der Probenherstellung zurückzuführen ist. Dieser letztgenannte Vorteil ermunterte, doch noch einmal, jedoch von merklich anderen Überlegungen ausgehend, einen Versuch mit der DVMR-Probenform zur Unterscheidung der Werkstoffe zu machen. Auf diese Überlegungen soll hier nur insofern eingegangen werden, als vermutet wurde, daß bei einer mehrachsigen Beanspruchung des Werkstoffes mit einer vorzugsweisen Beanspruchung in der Walzrichtung, wie dies beim Aufschweißbiegeversuch, aber auch im Bauwerk, z. B. bei Brückenträgern, der Fall ist, eine stark zeilenförmige Ausbildung des Sekundärgefüges einen ähnlich günstigen Einfluß auf das Ergebnis des Aufschweißbiegeversuchs auszuüben vermag wie das sehr feinkörnige Sekundärgefüge, welches etwa nach Normalglühung in einem mit Al desoxydierten Stahl erhalten wird (vgl. Wasmuth, a. a. O.). E. Houdremont, K. Schönrock und H. J. Wiester[13]) konnten zeigen, daß Stähle mit starken Einschlußzeilen, auch wenn sie nicht als sogenannte Feinkornstähle erschmolzen wurden, ein ähnlich günstiges Verhalten beim Aufschweißbiegeversuch zeigen, wie die von Wasmuth erschmolzenen Feinkornstähle. Diese Beobachtungen stehen übrigens in Übereinstimmung mit den Erfahrungen, die man bei Federstählen hinsichtlich des Vorteils der zeilenförmigen Gefügeausbildung gemacht hat [vgl. E. Houdremont und H. Bennek[14])]. In der vorliegenden Untersuchung wurde außerdem die Meinung vertreten, daß außer der zeilenförmigen Anordnung der nichtmetallischen Einschlüsse auch eine zeilenförmige Anordnung des Ferrit-Perlit-Gefüges von Nutzen im Hinblick auf die gewünschte Wirkung ist.

Diese Beobachtungen (Houdremont und Mitarbeiter einerseits und Wasmuth andererseits) zeigen, daß zwischen einem sehr feinkörnigen und einem zwar weniger feinkörnigen, dafür aber zeilenförmigen Gefüge eine gewisse Vertretbarkeit besteht. Die besten Wirkungen kann man sich augenscheinlich von einem Gefüge versprechen, welches erstens feinkörnig und zweitens zeilenförmig ist. Die Beurteilung der Gefügeausbildung allein auf Grund der mikroskopischen Beobachtung muß nun freilich notwendigerweise nur qualitativ bleiben.

Um zu einem halb-quantitativen Maß für die Gefügeausbildung zu gelangen, wurde der Versuch gemacht, das Verhältnis der Kerbschlagzähigkeit bei Probenlage einmal längs und einmal quer zur Walzrichtung hierfür heranzuziehen. Diese so unter Verwendung der DVMR-Probe erhaltene Verhältniszahl wurde als „Sehnigkeit S" bezeichnet. Untersuchungen an einer größeren Anzahl von Stählen zeigen, daß die Größe S im allgemeinen zwischen den Werten 1 und 3 liegt, d. h. daß im letzten Fall die Kerbschlagzähigkeit der parallel zur Walzrichtung liegenden Proben dreimal so groß ist wie die der in der Querrichtung liegenden Proben. Die häufigsten Werte für S lagen bei den in der vorliegenden Arbeit untersuchten Proben zwischen 1,5 und 2,5.

Im Hinblick auf die Ausführungen in den vorhergehenden Absätzen und unter Berücksichtigung der bekannten Zusammenhänge zwischen Kerbschlagzähigkeit und Gefügeausbildung (vgl. z. B. auch die Bilder 26 und 27 der erwähnten Arbeit von E. H. Schulz und W. Bischof über den Zusammenhang zwischen Sekundärkorngröße und Kerbschlagzähigkeit) ist augenscheinlich ein verhältnismäßig großer S-Wert neben einem verhältnismäßig großen Wert der Kerbschlagzähigkeit a_k der in der Walzrichtung liegenden Proben erwünscht. Außerdem besteht eine gewisse Vertretbarkeit der beiden Größen insofern, als der Nachteil einer nicht allzu großen Kerbschlagzähigkeit der Längsproben durch einen höheren S-Wert kompensiert werden kann, und umgekehrt. (Schluß folgt.)

[11]) K. Klöppel, Stahlbau-Kalender 1940, S. 399 ff.

[12]) O. Graf, a. a. O. — R. Wasmuth und C. Salzmann, a. a. O. — E. H. Schulz und W. Bischof, a. a. O.

[13]) E. Houdremont, K. Schönrock und H. J. Wiester, St. u. E. 59 (1939), S. 1268 u. 1273.

[14]) E. Houdremont und H. Bennek, St. u. E. 52 (1932), S. 653 bis 662.

Kräfteverteilung an Brückenkonstruktionen, versteift durch zwei Windverbände und mehrere Querverbände.

Von Dr.-Ing. Paul Álgyay, Privatdozent an der Techn. Hochschule Budapest.

(Schluß aus Heft 1/3.)

III. Genaue Berechnung der Brückenkonstruktionen von mehreren Hauptträgern, versteift durch zwei Windverbände und durch mehrere starre Zwischenquerverbände.

Balkenbrücken mit vier Hauptträgern und obenliegender Fahrbahn werden auch im Auslande in neuerer Zeit sehr häufig verwendet. Die in den Jahren 1933 bis 1937 erbaute und vom Verfasser entworfene Horthy-Miklós-Donaubrücke in Budapest wurde auch mit einer solchen Konstruktion ausgebildet. Besserer Steifheit und besserer Lastverteilung halber ist es bei solchen Brücken mit größeren Öffnungen zweckmäßig, außer den Querverbänden untere und obere Windverbände zu verwenden. Diese Tatsache aber macht die Konstruktion im Raum vielfach statisch unbestimmt, und sie erschwert die genaue Berechnung. In den vorigen Abschnitten I und II wurden die beim Entwurf obiger Brückenkonstruktion (Bild 21) angewendeten Näherungsberechnungen erörtert. Im nachfolgenden wird ein Verfahren zur Ermöglichung der genaueren Untersuchung vom Vierhauptträgersystem ausgearbeitet, welches zur Prüfung des vorher geschilderten Näherungsverfahrens benutzt wurde.

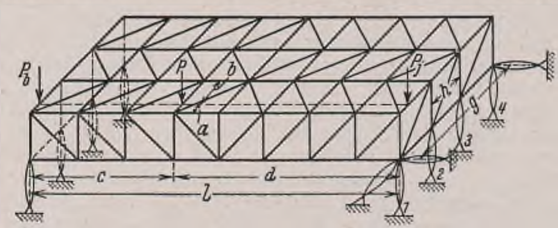


Bild 10. Konstruktion zur Erörterung des Verfahrens.

Das Verfahren — welches in beliebigen Fällen angewendet werden kann — wird hier einfachheitshalber an Hand der in Bild 10 skizzierten, durch neun Querverbände und zwei Windverbände ausgesteiften Konstruktion mit vier Hauptträgern und mit acht Feldern erörtert. Die einzelnen Tragwände in der Ebene sind innerlich statisch bestimmt, und die Hauptträger und auch die Wind- und Querverbände haben — einfachheitshalber — untereinander völlig gleichartige Ausfachungen. Jeder der vier Hauptträger ist als Zweistützbalken ausgebildet. In der waagerechten Ebene wird die Stabilität durch drei Auflagerstäbe gesichert. Infolge der lotrechten Unterstützungen ist die Konstruktion eigentlich äußerlich statisch mehrfach unbestimmt, dies wird aber mit der Annahme der geradlinigen Verteilung der Auflagerdrücke beseitigt.

Aus der in Bild 10 veranschaulichten Belastung P fällt eine Kraft $P_l = P \cdot \frac{d}{l}$ auf die linksseitigen Auflager und eine Kraft $P_r = P \cdot \frac{c}{l}$ auf die rechtsseitigen Auflager. Die Kraft P_r wird über den vier Auflagern folgendermaßen verteilt. Man läßt, der Kraft P_r entsprechend, in der Mitte ein nullwertiges Kräftepaar angreifen und damit erhält man als Kraftwirkungen die zentrisch wirkende Kraft P_r und das Moment $M = P_r (g/2 - a)$. Die zentrische Kraft verteilt sich gleichmäßig auf die vier Auflagerstäbe. Es treten infolge des Moments M in den Auflagerstäben 1 und 4 bzw. in den Auflagerstäben 2 und 3 gleich große, aber entgegengesetzte Kräfte X_1 bzw. X_2 auf, für die die folgenden Beziehungen aufgestellt werden können:

$$X_1 : X_2 = g/2 : h/2 \quad \text{und} \quad X_1\, g + X_2\, h = -M,$$

daraus

$$X_1 = \frac{-M}{g + \frac{h}{g}} \qquad X_2 = \frac{X_1\, h}{g}$$

und die Auflagerstabkräfte

$$R_1 = \frac{P_r}{4} + X_1 \quad R_2 = \frac{P_r}{4} + X_2 \quad R_3 = \frac{P_r}{4} - X_2 \quad R_4 = \frac{P_2}{4} - X_1$$

(Bild 11).

Man denke alle die Stäbe, die sich dem von links genommenen, z. B. dritten Querverband von rechts anschließen, von ihren Knotenpunkten losgelöst. Die Diagonalen des letztgenannten Querverbandes wurden — besserer Übersichtlichkeit wegen — in dem Bilde nicht dargestellt. Ebenso werden einzelne Stäbe auch in den nachstehenden anderen Bildern dieses Aufsatzes — aus dem obenerwähnten Grunde — weggelassen. Wir nehmen nun, den acht, mit $a, \ldots, h$ bezeichneten Querverbandsknotenpunkten gegenüber, ebenfalls acht Punkte $a', \ldots, h'$ an, welche Punkte in einer dem Querverbande parallelen Ebene liegen. Die Entfernung der beiden Ebenen $a, \ldots, h$, $a', \ldots, h'$ soll entsprechend klein gewählt werden, so, daß sie im folgenden vernachlässigt werden kann. Diese Punkte $a', \ldots, h'$ werden durch gedachte Stäbe miteinander und mit den Punkten $a, \ldots, h$ derart verbunden, daß ihre räumliche Lage im Vergleich zu dem aus den ersten zwei Feldern bestehenden linken Tragwerkteil bestimmt sein soll. Zu diesem Zwecke denken wir die Punkte von $a', \ldots, h'$ durch einen gedachten Querverband verbunden. Die Ausbildung des gedachten Querverbandes soll dem Querverband $a, \ldots, h$ ganz entsprechen. Die Diagonalen des gedachten Querverbandes sind in dem Bilde ebenfalls nicht veranschaulicht. Die Punkte $a', \ldots, h'$ sind durch diesen gedachten Querverband in der Querverbandebene gegeneinander festgehalten. Es werden außerdem die gegenüberliegenden Knotenpunkte a—a', b—b', ..., h—h' durch gedachte starre Stäbe miteinander verbunden, wodurch die Punkte $a', \ldots, h'$ auch in der senkrechten Richtung, zur Querverbandebene festgehalten sind.

Die einzige noch restliche Bewegungsmöglichkeit, d. h., daß sich der gedachte Querverband zu dem mit ihm verbundenen wirklichen Querverband parallel bewegen kann, wird mit der Einfügung der starren Anschlußstäbe c—b', c—g' und g—f' auch aufgehoben, und so wird das Festhalten an dem linkseitigen Teil der Punkte von $a', \ldots, h'$ mittels einer Mindestanzahl der Anschlußstäbe gesichert.

Wenn man nun die Stäbe des abgetrennten rechtsseitigen Teiles an den gedachten Querverband $a', \ldots, h'$ anschließt, dann wird im Innern des Tragwerks keine Veränderung verursacht.

Der Querverband $a', \ldots, h'$ ist als ebenes Fachwerk statisch bestimmt. Die Querverbände $a, \ldots, h$ und $a', \ldots h'$ sind durch elf Stäbe aneinander angeschlossen. Wenn man von denselben die in Bild 11 bezeichneten Stäbe durchschneidet, dann wird der aus sechs Stäben bestehende Anschluß zwischen den zwei Teilen statisch bestimmt, die durchschnittenen fünf Stäbe sind also statisch überzählig, d. h. der Anschluß zwischen den zwei Tragwerkteilen ist statisch fünffach unbestimmt.

In Bild 12 wurden die Stäbe, die sich dem Querverband $a, \ldots, h$ in den Punkten a, d, e, f und h rechts anschließen, von ihren Knotenpunkten losgelöst, und wir nehmen an den genannten Punkten des Querverbandes solchen Anschluß der Stabenden an, welcher für die betreffenden Stäbe bloß eine senkrechte Bewegung zum Querverband ermöglicht. Wenn man den Anschluß in Bild 12 mit dem Anschluß in Bild 11 (mit durchschnittenen Stäben) vergleicht, ist zu ersehen, daß der Anschluß der rechtsseitigen Stäbe mit dem Querverband $a, \ldots, h$ in Bild 11 dem Anschluß derselben Stäbe mit dem Querverband $a, \ldots, h$ in Bild 12 gleichwertig ist.

Bild 11. Verbindung des wirklichen und gedachten Querverbandes.

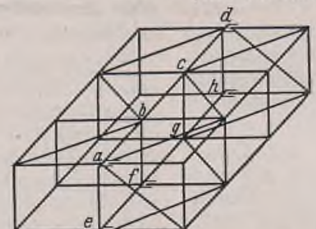


Bild 12. Querverband mit umgestalteten Stabverbindungen an fünf Knotenpunkten.

Bild 13. Grundsystem I des Halbträgers mit Verbindungen der dreiteiligen Glieder nach Bild 12.

Wenn wir jetzt am untersuchten ganzen Tragwerk die in Bild 12 dargestellten Bewegungsmöglichkeiten bei sämtlichen Zwischenquerverbänden voraussetzen, erhalten wir die Konstruktion des Bildes 13 und — den Anschluß in Bild 11 (mit durchschnittenen Stäben) bei sämtlichen Zwischenquerverbänden vorausgesetzt — die Konstruktion des Bildes 14.

Im folgenden nehmen wir als Grundsystem für das untersuchte Tragwerk des Bildes 10 die in Bild 13 veranschaulichte Konstruktion an, wir werden jedoch die Konstruktion des Bildes 14 — wegen ihrer vorher erörterten statischen Ähnlichkeit zur Konstruktion Bild 13 —, sowohl vom Gesichtspunkt der Steifheit wie des Kräftespiels betrachtet, wegen der größeren Übersichtlichkeit letzterer Konstruktion ebenfalls als Grundsystem benutzen. Die Feststellungen für das Tragwerk des Bildes 14 werden mit Berücksichtigung des vorhandenen Unterschiedes auch für das Tragwerk Bild 13 gültig sein.

Die Konstruktion Bild 14 besteht aus statisch bestimmten Anschlüssen solcher dreiteiliger Glieder, die durch je zwei Querverbände begrenzt sind. Diese dreiteiligen Tragwerkglieder selbst sind innerlich statisch unbestimmt. Dies ist leicht einzusehen, wenn man betrachtet, daß die dreiteiligen Glieder durch den Durchschnitt der Diagonalen von den zwei mittleren Hauptträgern in statisch bestimmte Flechtwerke (nach Föppl) verwandelt werden können[1]). Die dreiteiligen Glieder sind also innerlich zweifach unbestimmt.

[1]) A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, Band 2, Graphische Statik, 7. Aufl., S. 241.

Da die Konstruktionen Bild 14 bzw. 13 durch den Durchschnitt fünf überzähliger Stäbe bei jedem Querverband hergestellt wurden und die dreiteiligen Glieder innerlich zweifach unbestimmt sind, kann der Unbestimmtheitsgrad bei solchen Vierhauptträgersystemen, die durch zwei Windverbände und durch Querverbände in jedem Felde ausgesteift sind, folgendermaßen ermittelt werden. Wenn n die Anzahl der Felder und m die Anzahl der Zwischenquerverbände bedeutet, dann ist der Unbestimmtheitsgrad $2\,n + 5\,m$. Die in Bild 10 dargestellte Konstruktion ist also innerlich $2 \cdot 8 + 5 \cdot 7 = 51$ fach unbestimmt. Das in Bild 13 skizzierte Tragwerk als ein statisch unbestimmtes Grundsystem ist innerlich 16fach unbestimmt.

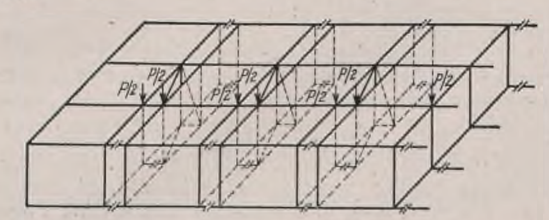


Bild 14. Halbträger mit Verbindungen der dreiteiligen Glieder nach Bild 11.

Um in den nachstehenden Erörterungen das Tragwerk Bild 13 durch das Tragwerk Bild 14 ersetzen zu können, wird der Zusammenhang zwischen den Tragwerken Bild 13 u. 14 näher untersucht.

Im folgenden führen wir eine Vereinfachung ein, namentlich, daß sämtliche Querverbände im Tragwerk Bild 10 und dementsprechend auch in Bild 13, ferner auch sämtliche wirklichen und gedachten Querverbände im Tragwerk Bild 14 unendlich starr sind, d. h., daß die sämtlichen Stabquerschnitte dieser Querverbände unendlich groß sind. Diese Annahme steht der Wirklichkeit nahe, weil bei den in der Praxis vorkommenden ähnlichen Brückenkonstruktionen die Verformung des Querverbandes im Vergleich zur Durchbiegung der Hauptträger verhältnismäßig klein ist.

Nehmen wir an, daß die Konstruktion Bild 10 bei einem einzigen Zwischenquerverband in der in Bild 12 veranschaulichten Weise ausgebildet ist. Es sind also mit dieser Annahme in der Konstruktion bloß an den Stellen von $a, \ldots, h$ Beweglichkeiten vorhanden. Es wirke nun auf die Konstruktion ein im Gleichgewicht stehendes Kräftesystem, das aus verschieden großen und verschieden gerichteten, an beliebigen Stellen angreifenden Kräften bestehe. Wir zerlegen die von den rechts angeschlossenen Stäben übergebenen Kräfte an den Knotenpunkten des Querverbandes $a, \ldots, h$ auf Seitenkräfte in der Ebene des Querverbandes und auf Seitenkräfte senkrecht zu der Querverbandsebene. Da senkrechte Seitenkräfte an den Knotenpunkten a, e, f, d, h wegen der vorausgesetzten Beweglichkeit nicht entstehen können, werden hier bloß Seitenkräfte in der Querverbandsebene auftreten. Senkrechte Seitenkräfte können nur an den Knotenpunkten b, c, g übergeben werden. Diese drei senkrechten Seitenkräfte sind den senkrechten Seitenkräften der von rechts wirkenden äußeren Kräfte gleichwertig. Die Bestimmung dieser drei senkrechten Komponenten ist eine statisch bestimmte Aufgabe. Wenn man auch den Tragwerkteil vom Querverband rechts entfernt, aber die vom rechtsseitigen Teil auf den Querverband übertragenen Knotenkräfte durch äußere Kräfte ersetzt, verändert sich das Gleichgewicht des linksseitigen Konstruktionsteils nicht. Da der Querverband, infolge seiner angenommenen unendlichen Starrheit, nicht verformt wird, wird das Kräftespiel des linksseitigen Konstruktionsteils durch die Art der Verteilung der vorgenannten Komponenten, die in die Ebene des Querverbandes entfallen, nicht beeinflußt.

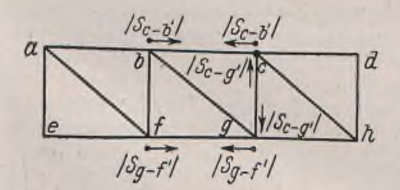


Bild 15. Zusatzkräfte, welche an den Querverbänden des Bildes 13 anzuwenden sind.

Bild 16a. Grundsystem II mit Verbindung der sechsteiligen Glieder nach Bild 12.
Bild 16b. Verbindung der sechsteiligen Glieder nach Bild 11.

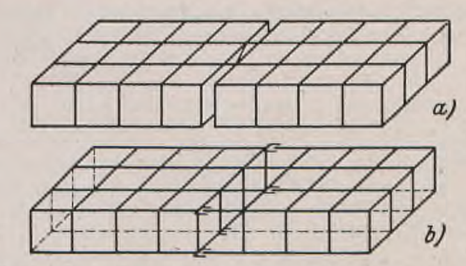


Bild 17a. Grundsystem III mit Verbindung der zwölfteiligen Glieder nach Bild 11.
Bild 17b. Verbindung der zwölfteiligen Glieder nach Bild 12.

Das Gesagte gilt für beliebiges Kräftesystem, also auch dann, wenn selbst an den in Rede stehenden Querverbandsknoten äußere Kräfte einwirken, und auch in dem besonderen Belastungsfall, wenn an den gegenseitig beweglichen Stellen auf die nebenan liegenden Punkte zu dem Querverband senkrecht gerichtete, gleich große Kräfte mit entgegengerichtetem Vorzeichen wirken.

Wenn man nun die Konstruktion mit durchschnittenen Stäben in Bild 11 betrachtet, erkennt man, daß an der Stelle des Doppelquerverbandes auf dessen Ebene senkrecht gerichtete Kräfte auch bloß an den Punkten a, b, c und g übertragen werden können. Denkt man sich die Konstruktion in Bild 11 durch dasselbe äußere Kräftesystem angegriffen wie diejenige in Bild 12, so werden auch hier dieselben senkrechten Komponenten an den Punkten a, c und g übergeben wie bei Konstruktion des Bildes 12. Die Art der Verteilung der Komponenten in der Querverbandsebene, die von einem Teil auf den anderen des doppelten Querverbandes übergehen, ist infolge der Starrheit der Querverbände ohne Einfluß auf die Kräfte der rechts oder links anschließenden Stäbe. Man erkennt daher, daß die Kräfte der Stäbe, welche sich in Bild 12 an den Querverband $a, \ldots, h$ bzw. in Bild 11 an die Querverbände $a, \ldots, h$ und $a', \ldots, h'$ von rechts und links anschließen — gleiche äußere Belastung vorausgesetzt — dieselben sind.

Wenn man ferner sämtliche Stabkräfte in den gegenüberliegenden Stäben des Doppelquerverbandes des Bildes 11 addiert, weichen die derart erhaltenen Stabkräfte von den entsprechenden Stabkräften des in Bild 12 dargestellten Querverbandes allein durch die in den gedachten schrägen Anschlußstäben auftretenden Kräfte ab. Da die Doppelquerverbände einander unendlich nahe liegend sind, kann die Richtung der gedachten schrägen Anschlußstäbe als in die Querverbandsebene fallend angenommen werden. Wenn man nun zu den Stabkräften, welche man durch die Summierung der gegenüberstehenden Stabkräfte der Doppelquerverbände erhält, noch diejenigen Stabkräfte addiert, welche durch die den inneren Anschlußkräften des Doppelquerverbandes gleich großen, aber entgegengesetzt wirkenden Kräfte erzeugt werden, dann gewinnt man die entsprechenden Stabkräfte des Querverbandes des Bildes 12.

Wenn z. B. im Stabe $c—b'$ des Bildes 11 eine Druckkraft $S_{c-b'}$, im Stabe $c—g'$ eine Zugkraft $S_{c-g'}$ und im Stabe $g—f'$ eine Druckkraft $S_{g-f'}$ wirkt, dann müssen am Querverband $a, \ldots, h$ des Bildes 12 — außer der Summe der gegenseitsliegenden Stabkräfte der Doppelquerverbände — noch die in Bild 15 veranschaulichten äußeren Kräfte berücksichtigt werden.

Da der Querverband als unendlich starr angenommen wurde, rufen die dargestellten Kräfte in Stab $b—c$ eine Kraft $S_{c-b'}$, in Stab $c—g$ eine Kraft $S_{c-g'}$, in Stab $f—g$ eine Kraft $S_{g-f'}$ hervor. Die Stabkräfte in den Stäben $b—c$, $c—g$ und $f—g$ des Querverbandes Bild 12 erhält man daher aus den Stabkräften des Bildes 11 folgendermaßen:

$$S_{b-c}^{(12)} = S_{b-c}^{(11)} + S_{b'-c'}^{(11)} + S_{c-b'}^{(11)}$$
$$S_{c-g}^{(12)} = S_{c-g}^{(11)} + S_{c'-g'}^{(11)} + S_{c-g'}^{(11)}$$
$$S_{f-g}^{(12)} = S_{f-g}^{(11)} + S_{f'-g'}^{(11)} + S_{g-f'}^{(11)}.$$

Der obere Zeiger der Kraft S deutet auf die entsprechende Bildzahl. Die anderen Stabkräfte des Querverbandes des Bildes 12 erhalten wir bloß durch Summation der gegenüberliegenden Stabkräfte des Doppelquerverbandes Bild 11.

Die Konstruktion in Bild 10 ist, wie schon gesagt, 51fach unbestimmt, es müssen also bei einer beliebigen äußeren Belastung 51 Unbekannte bestimmt werden. Wenn aber die äußere Belastung zu der Trägermitte symmetrisch ist, sind nur 28 Unbekannte zu bestimmen.

Die Unbestimmtheit des Grundsystems in Bild 13 ist 16fach bzw. bei symmetrischer Belastung 8fach; wenn also die innere Unbestimmtheit dieses Tragwerks aufgehoben wird, dann sind mit Hilfe dieses Grundsystems beim Tragwerk von Bild 10 im allgemeinen noch 35 übrigbleibende Unbekannte und im Falle symmetrischer Belastung noch 20 Unbekannte festzustellen. Die Bestimmung der Unbekannten wird aber nicht auf einmal, sondern Schritt für Schritt durchgeführt, und zwar derart, daß mit der Zugrundelegung des in Bild 13 veranschaulichten und für das folgende mit I bezeichneten Grundsystems zunächst die inneren Kräfte des in Bild 16a dargestellten Grundsystems II ermittelt werden. An Stelle des Grundsystems II in Bild 16a wird das Tragwerk in Bild 16b betrachtet, dessen Zusammenhang mit dem Tragwerk in Bild 16a nach dem vorher erwähnten schon bekannt ist. Danach werden die inneren Kräfte des Grundsystems III in Bild 17a mit der Zugrundelegung des Grundsystems in Bild 16a und dem Zusammenhang zwischen den Tragwerken in Bild 17a u. 17b bestimmt. Als letzter Schritt folgt die Berechnung der inneren Kräfte des Tragwerks in Bild 10 auf Grund des Grundsystems III infolge einer gegebenen äußeren Belastung.

Zur Berechnung der sämtlichen inneren Kräfte vom Grundsystem II ist es notwendig, in dem Grundsystem I Bild 13 nicht nur die inneren Kräfte infolge eines äußeren Kräftesystems, sondern auch diejenigen infolge der an den beweglichen Anschlußstellen angreifenden Kräfte von $\pm 1^t$ festzustellen.

In erster Linie werden wir uns mit dem Grundsystem I beschäftigen. Wir bestimmen die an den Knotenpunkten des Grundsystems I angreifenden Kräfte infolge der äußeren Belastung P. Wollen wir nun das innere Kräftespiel mit Hilfe des Tragwerks in Bild 14 ermitteln, dann müssen wir, da jedem inneren Knotenpunkte in Bild 13 je zwei Knotenpunkte des Tragwerks in Bild 14 entsprechen, auf jeden von diesen

Doppelknotenpunkten die entsprechende Knotenkraft des Tragwerks in Bild 13 verteilen. Es geschieht die Verteilung am zweckmäßigsten auf zwei gleiche Teile.

In Bild 14 sind die dreiteiligen Glieder durch sechs Anschlußstäbe verbunden, so daß die Bestimmung der in diesen Anschlußstäben auftretenden Kräfte K infolge der äußeren Belastung eine statisch bestimmte Aufgabe ist, auf welche hier nicht näher eingegangen wird. Sind nun diese Anschlußkräfte schon bekannt, dann können die einzelnen dreiteiligen Glieder voneinander ganz losgelöst und ihre inneren Kräfte festgelegt werden.

Solch ein losgelöstes, dreiteiliges Glied mit den auf das System einwirkenden äußeren Kräften P und mit den zu ihnen gehörigen Anschlußkräften ist in Bild 18a dargestellt. Dieses dreiteilige Glied ist innerlich zweifach unbestimmt. Zur Bestimmung dieser zwei Unbekannten wird das in Bild 18b skizzierte Grundsystem mit Hilfe von Doppelquerverbänden und den entsprechenden Anschlußstäben mit Zugrundelegung des Verfahrens von Ebner[2]) zugrunde gelegt. Es wird hierbei bemerkt, daß in dem vorliegenden Teil III eigentlich das von Ebner für eine Konstruktion mit zwei Hauptträgern aufgestellte Verfahren für die Konstruktion mit vier Hauptträgern bearbeitet wurde.

Für die in Bild 18b veranschaulichten, durchschnittenen Anschlußstäbe können zwei Elastizitätsgleichungen aufgestellt werden, welche gleichzeitig auch für die entsprechenden Stellen der Konstruktion in Bild 18a gültig sind. Diese Elastizitätsgleichungen von bekannter Form sind:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{1p} = 0$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{2p} = 0,$$

wobei X_1, X_2 die gesuchten Unbekannten, a_{11}, a_{12}, a_{1p}, a_{21}, a_{22}, a_{2p} die Verschiebungen (Fugen) infolge der an den Stellen der Unbekannten wirkenden Kräfte von $\pm 1^t$ bzw. der äußeren Belastung bedeuten. Die ersten Zeiger bedeuten immer die Stellen der Verschiebungen, die zweiten deuten die verursachenden Kraftwirkungen an.

Wie schon erwähnt, benötigen wir im nachfolgenden auch die inneren Kräfte der dreiteiligen Glieder infolge jener Kräftepaare $\pm 1^t$, die in den gegenseitig beweglichen Punkten des Grundsystems I wirken. Es müssen daher bei allen dreiteiligen Gliedern Kraftwirkungen infolge der Kräfte $\pm 1^t$ an den Knotenpunkten — die den rechts und links liegenden Querverbänden angehören — bestimmt werden.

10 Unbekannten angreifenden Kräfte $\pm 1^t$ und die dazugehörigen Anschlußkräfte bestehen, berechnet werden. Die einzelnen sechsteiligen Glieder können selbständig berechnet werden. Als Beispiel haben wir in Bild 20a einen sechsgliedrigen Teil mit einer der äußeren Kräftegruppen veranschaulicht. Es sind auf Wirkung dieser äußeren Kräftegruppen die an den Stellen der gegenseitig beweglichen Knotenpunkte auftretenden fünf Unbekannten zu bestimmen.

Bei Bestimmung des Kräftespiels des sechsteiligen Gliedes wird das Grundsystem in Bild 20b, mit Zuhilfenahme der Ähnlichkeit mit dem System in Bild 20a, zugrunde gelegt. Zur Berechnung der fünf inneren Unbekannten können fünf lineare Gleichungen — auf bekannte Weise — folgendermaßen aufgestellt werden:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + a_{14} X_4 + a_{15} X_5 + a_{1p} = 0$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + a_{24} X_4 + a_{25} X_5 + a_{2p} = 0$$
$$a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 + a_{34} X_4 + a_{35} X_5 + a_{3p} = 0$$
$$a_{41} X_1 + a_{42} X_2 + a_{43} X_3 + a_{44} X_4 + a_{45} X_5 + a_{4p} = 0$$
$$a_{51} X_1 + a_{52} X_2 + a_{53} X_3 + a_{54} X_4 + a_{55} X_5 + a_{5p} = 0.$$

Die Bedeutung der Werte von a und X ist wie bei den dreiteiligen Gliedern. Die Zeiger 1, 2, 3, 4, 5 beziehen sich auf die Fugen an den Stellen a, e, f, d und h. Der Beiwert a_{24} gibt z. B. die Verschiebung an, welche an der Stelle e zwischen den gegenüberliegenden zwei Punkten auf Wirkung der an der Stelle d angreifenden Kräfte von $\pm 1^t$ auftritt. Die Beiwerte a werden mit Hilfe von Arbeitsgleichungen berechnet. So gilt z. B. für a_{24} die Formel

$$a_{24} = \sum S_2 S_4 \cdot \frac{s}{EF},$$

worin S_2 die inneren Kräfte in dem System in Bild 20 infolge der an der Stelle e angreifenden Kräfte von $\pm 1^t$, S_4 dieselben infolge der an der Stelle d angreifenden Kräfte von $\pm 1^t$ bedeuten. Bei der Summenbildung fehlen die zu den Querverbandstäben gehörenden Glieder, da F für diese Stäbe als unendlich groß angenommen wurde. Selbstverständlich gilt hier auch die bekannte Beziehung $a_{24} = a_{42}$ usw. Bei einem sechsteiligen Zwischensystem sind die inneren Kräfte aus der Belastung P, ferner aus den je fünf von rechts und links angreifenden Kräften von $\pm 1^t$ mit den zu ihnen gehörenden Anschlußkräften, insgesamt also aus elf äußeren Kräftesystemen festzustellen.

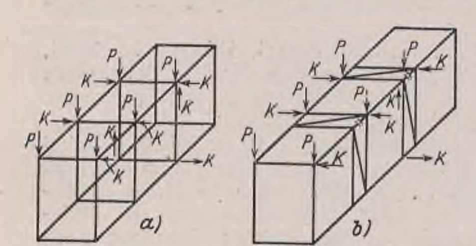


Bild 18. Äußere Kräfte, Anschlußkräfte und Grundsystem des dreiteiligen Gliedes.

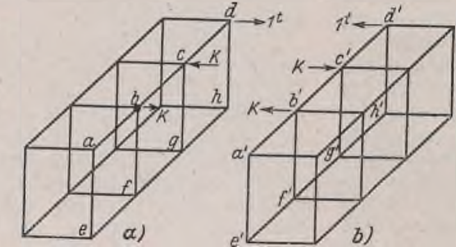
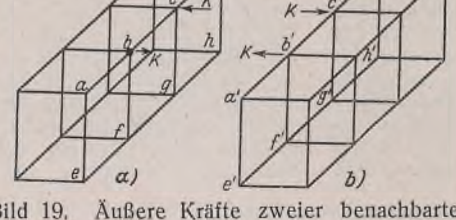



Bild 19. Äußere Kräfte zweier benachbarter dreiteiliger Glieder infolge der Belastung $\pm 1^t$, angreifend in d.

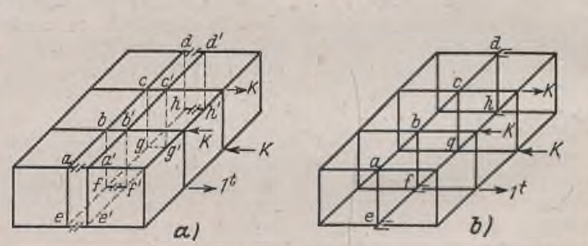


Bild 20a u. b. Grundsystem der sechsteiligen Glieder nach Bild 11 bzw. Bild 12 mit äußeren Kräften infolge der Belastung $\pm 1^t$.

In Bild 19a u. 19b haben wir das äußere Kräftesystem für zwei benachbarte dreiteilige Glieder veranschaulicht, auf Grund dessen die inneren Kräfte infolge der an dem Punkt d angreifenden Kräfte von $\pm 1^t$ zu berechnen sind. Die Anschlußkräfte K zu bestimmen, ist ein statisch bestimmtes Problem. Bei jedem einzelnen dreiteiligen Gliede muß das innere Kräftespiel für die äußeren Kräfte P, ferner für äußere Kräftegruppen — welche aus je einem Kräftepaar $\pm 1^t$ mit dem sie im Gleichgewicht haltenden Kräften K bestehen — berechnet werden. Fünf verschiedene solche Gruppen sind rechts und links eines dreiteiligen Gliedes vorhanden. Bei jedem einzelnen dreiteiligen Gliede müssen also je elf verschiedene äußere Belastungen berücksichtigt werden. Eine Ausnahme bilden die dreiteiligen Glieder am Trägerende, bei denen von einer Seite keine Kräfte von $\pm 1^t$ einwirken. Die Berechnung ist langwierig, daher ist es zweckmäßig, sie möglicherweise zu vereinfachen. Wenn z. B. in den inneren dreiteiligen Gliedern die gleiche Anordnung und Querschnitte der Stäbe gewählt werden, muß die Berechnung der inneren Kräfte infolge der an Stellen der Unbekannten angreifenden Kräfte von $\pm 1^t$ bloß bei einem dreiteiligen System durchgeführt werden.

Wenn in den dreiteiligen Gliedern die inneren Kräfte auf Wirkung aller obenerwähnten äußeren Belastungen festgelegt wurden, folgt danach die Bestimmung des inneren Kräftespiels von den sechsteiligen Gliedern des Grundsystems II in Bild 16. In diesen sechsteiligen Gliedern sind bloß fünf neue Unbekannte — die infolge des steifen Anschlusses zweier dreiteiliger Glieder entstehen — zu berechnen, nachdem das innere Kräftespiel dieser dreiteiligen Glieder auf verschiedene, hier in Frage kommenden Belastungen schon vorher festgestellt wurde. Nach der Ermittlung des inneren Kräftespiels der sechsteiligen Glieder werden im allgemeinen noch 15, im Falle symmetrischer Belastung noch 10 zu berechnende Unbekannte übrigbleiben. Um das innere Kräftespiel des Grundsystems III festzulegen, müssen in den sechsteiligen Gliedern nicht nur die inneren Kräfte infolge der äußeren Belastung P (mit den zu ihr gehörigen Anschlußkräften), sondern auch das Kräftespiel infolge der Kräftegruppen, welche an der Stelle einer der vorher erwähnten 15 bzw.

Nunmehr können wir auf die Ermittlung der inneren Kräfte des Grundsystems III übergehen. Wenn wir die inneren Kräfte der sechsteiligen Glieder schon kennen, haben wir bloß fünf Unbekannte von den inneren Kräften der zwölfteiligen Glieder zu berechnen.

Wenn das innere Kräftespiel der zwölfteiligen Glieder von dem Grundsystem III schon bekannt ist, dann ist noch die Bestimmung von fünf Unbekannten des Trägers Bild 10 übrig. Um diese zu bestimmen, haben wir auch beim Grundsystem III nicht nur das innere Kräftespiel infolge Belastung P, sondern auch infolge der Kräftegruppen, bestehend aus den Kräften $\pm 1^t$, die an den Stellen der fünf Unbekannten beim mittleren Querverband angreifen, mit den zu jedem Kräftepaar $\pm 1^t$ gehörigen Anschlußkräften, insgesamt also aus sechs äußeren Belastungen zu berechnen. Bei jeder einzelnen äußeren Belastung können auch hier wie beim Grundsystem II je fünf Gleichungen zur Bestimmung der fünf inneren Unbekannten, die beim mittleren Querverband des zwölfteiligen Gliedes auftreten, aufgeschrieben werden. Nach der Berechnung von fünf Unbekannten, die einer äußeren Belastung entsprechen, erhalten wir die inneren Kräfte in den Stäben des zwölfteiligen Gliedes, indem man die inneren Kräfte der sechsteiligen Glieder, welche durch die an den Stellen der Unbekannten angreifenden Kräfte von $\pm 1^t$ hervorgerufen werden, mit den erhaltenen Kräften X multipliziert und dann für alle Stäbe summiert.

Unsere letzte Aufgabe ist die Aufstellung fünf linearer Gleichungen, die zur Bestimmung der fünf Unbekannten bei den Fugen des mittleren Querverbandes von zwei zwölfteiligen Gliedern notwendig sind. Mit der Auflösung dieses Gleichungssystems werden sämtliche inneren Kräfte bekannt, und es bleibt nur noch übrig, daß wir die Stabkräfte der zwölfteiligen Glieder, welche infolge der an den Stellen der fünf Unbekannten angreifenden Kräfte von $\pm 1^t$ in den Stäben der zwölfteiligen Glieder erzeugt werden, mit den zuletzt erhaltenen entsprechenden Kräften X multiplizieren und die derart ermittelten Kräfte für alle Stäbe addieren.

Das gezeigte Verfahren hat den Vorteil, daß dadurch das räumliche System des untersuchten Tragwerks und dessen Grundsystem auf einfachere und klar übersichtliche Teile zergliedert wird, ferner daß die Berechnung durch die Einführung der Grundsysteme I, II, III anstatt Gleichungssystemen mit großer Anzahl der Unbekannten auf ganz un-

[2]) Dr.-Ing. H. Ebner, Zur Berechnung statisch unbestimmter Raumfachwerke (Zellwerke). Stahlbau 1932, Heft 1 u. 2.

abhängige Gleichungssysteme aus je fünf Gleichungen mit fünf Unbekannten zerlegt wird.

Der Rechnungsgang wurde an Hand eines Vierhauptträgersystems mit acht Feldern mit parallelen Gurtungen erörtert, aber er kann im allgemeinen für eine beliebige Konstruktion mit mehreren Feldern mit beliebigen Gurtlinien angewendet werden, und die erhaltenen Resultate können, mit einer guten Annäherung, auch im Falle eines Vollwandträgers als gültig angenommen werden.

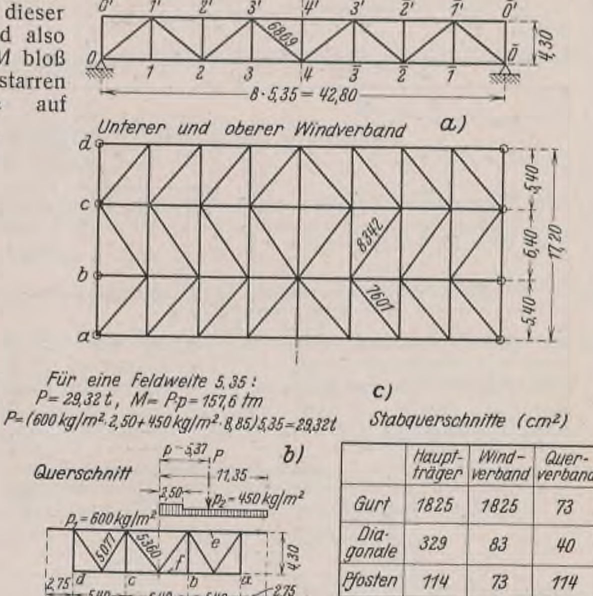
Wegen der mühsamen Rechnungsarbeit, welche bei Anwendung dieses Verfahrens notwendig ist, wird es vorteilhaft sein, im gegebenen Falle die Berechnung nicht auf die wirkliche, sondern eine möglichst vereinfachte Konstruktion mit weniger Feldern, jedoch ähnlicher Ausbildung und auf wenige einfache Belastungsfälle anzuwenden und die erhaltenen Werte zur Prüfung von Näherungsverfahren zu benutzen. Die wirkliche Konstruktion wird dann mit dem Näherungsverfahren berechnet.

Es wurde bei Berechnung der in Bild 21 skizzierten Konstruktion der Horthy-Miklós-Brücke in Budapest das Näherungsverfahren des Abschnitts II benutzt, welches an der vereinfachten Konstruktion des Bildes 10 mit Hilfe des eben beschriebenen genauen Verfahrens geprüft wurde. Die Abweichungen sind dann bei Bemessung der wirklichen Konstruktion berücksichtigt worden.

Die Angaben dieser Berechnung werden im folgenden wiedergegeben.

Wenn es sich um die in Bild 22 dargestellte Belastung handelt, müssen zu den infolge des Moments $M = P_p$ entstehenden Kräften X — wie bekannt — noch diejenigen Kräfte X addiert werden, die infolge der in Querschnittsmitte wirkenden Einzellast P entstehen. Auf Wirkung der in der Querschnittsmitte auftretenden senkrechten Einzellast P entstehen natürlich nur in den senkrechten Hauptträgern Kraftwirkungen, welche an jedem Hauptträger unseres untersuchten Tragwerks — da die vier Hauptträger vollkommen gleich sind — einen Wert von 0,25 P betragen. Die Ergebnisse sind aus Tabelle II ersichtlich.

Wie aus dem Mitgeteilten bekannt ist, wird in den oben behandelten Berechnungsverfahren auch die Mitwirkung der zwei Windverbände berücksichtigt. Um die Wirkung der zwei Windverbände auf die Kräfteverteilung infolge eines äußeren Moments M nachzuweisen, werden auch diejenigen Kräfte X berechnet, welche sich mit der bisher üblichen bekannten Näherungsberechnung ergeben, bei der die Windverbände bei Berechnung von M außer acht gelassen werden. Bei dieser Annahme wird also das Moment M bloß durch die starren Querverbände auf



	Hauptträger	Windverband	Querverband
Gurt	1825	1825	73
Diagonale	329	83	40
Pfosten	114	73	114

Bild 21. Anordnung der Konstruktion der neuen Horthy-Miklós-Donaubrücke in Budapest.

Bild 22. Angaben der Konstruktion und der Belastung.

die vier Hauptträger verteilt. Die Tabelle II liefert auch die nach letzterer Berechnungsweise erhaltenen Werte X, welche infolge der in Bild 22b dargestellten äußeren Belastung auf die einzelnen Tragwände übergeben werden.

Die bisherige Berechnungsweise ist zunächst insofern nicht zutreffend, da sie für die Windverbände überhaupt keine Werte ergibt. Ferner ist der Unterschied beider Näherungsberechnungen zwar anscheinend bei den Hauptträgern nicht so beträchtlich (bei Hauptträger a etwa 5%), bei Berechnung der Stabkräfte nach Näherungsverfahren in Abschnitt II jedoch werden in den gemeinsamen Gurten der Hauptträger und Windverbände die Kraftwirkungen von den Hauptträgern und Windverbänden addiert, wodurch schon ein beträchtlicher Unterschied entsteht (s. Tabelle III).

IV. Zahlenbeispiel.

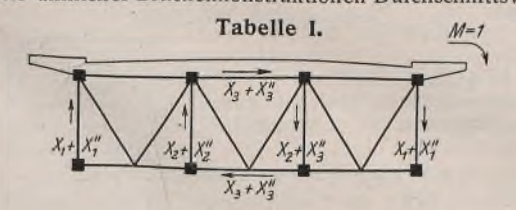
Als Beispiel betrachten wir das in Bild 22 skizzierte Tragwerk, auf dem in Querrichtung die in Bild 22b dargestellte gleichmäßig verteilte Streckenlast angreift, welche sich aber in Längsrichtung über die ganze Brückenöffnung erstreckt. Die zur Berechnung nötigen Angaben, und zwar die Anordnung der Tragwände und des Brückenquerschnitts, ferner die Stabquerschnitte sind in Bild 22a, b u. c veranschaulicht.

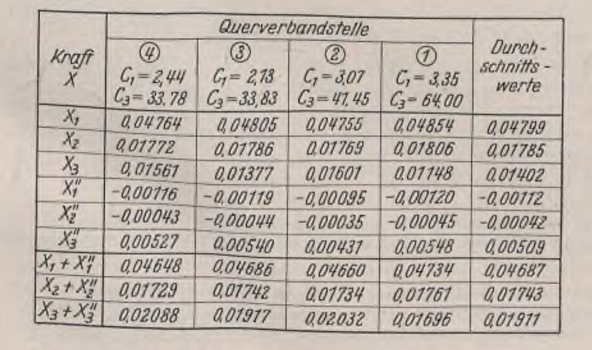
Das Kräftespiel des behandelten Tragwerks wurde sowohl nach dem Näherungsverfahren im Abschnitt II als auch nach dem genauen Verfahren in Abschnitt III bestimmt.

Den vier verschiedenen Laststellungen entsprechende Werte der Kräfte X, wenn je ein Moment von der Größe $M = 1$ nacheinander in den Querschnitten 4, 3, 2 und 1 (s. Bild 22) wirkt, und auch die davon erhaltenen Durchschnittswerte, berechnet nach dem Näherungsverfahren in Abschnitt II, sind in Tabelle I zusammengestellt.

Wie aus dem Vergleich der Ergebnisse ersichtlich ist, ergibt sich zwischen den Kräften X — welche an verschiedenen Querverbandstellen auf die einzelnen Tragwände übergeben werden — nur ein unbedeutender Unterschied, daher scheint es als zulässig, bei der Bestimmung des inneren Kräftespiels ähnlicher Brückenkonstruktionen Durchschnittswerte zu verwenden.

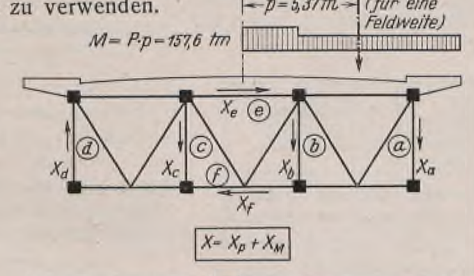
Tabelle I.





Kraft X	Querverbandstelle ④ $C_1=2,44$ $C_3=33,78$	③ $C_1=2,18$ $C_3=33,83$	② $C_1=3,07$ $C_3=47,45$	① $C_1=3,35$ $C_3=64,00$	Durchschnittswerte
X_1	0,04764	0,04805	0,04755	0,04854	0,04799
X_2	0,01772	0,01786	0,01769	0,01806	0,01785
X_3	0,01561	0,01377	0,01601	0,01148	0,01402
X_1''	−0,00116	−0,00119	−0,00095	−0,00120	−0,00112
X_2''	−0,00043	−0,00044	−0,00035	−0,00045	−0,00042
X_3''	0,00527	0,00540	0,00431	0,00548	0,00509
X_1+X_1''	0,04648	0,04686	0,04660	0,04734	0,04687
X_2+X_2''	0,01729	0,01742	0,01734	0,01761	0,01743
X_3+X_3''	0,02088	0,01917	0,02032	0,01696	0,01911

Tabelle II.



Kraft X	X_p (t)	Näherungsverfahren ohne Windverband X_M (t)	ohne Windverband X_p+X_M (t)	mit Windverband ⊗ X_M (t)	mit Windverband X_p+X_M (t)
X_a	7,33	8,05	15,38	7,38	14,71
X_b	7,33	2,99	10,32	2,75	10,08
X_c	7,33	−2,99	4,34	−2,75	4,58
X_d	7,33	−8,05	−0,72	−7,38	−0,05
X_e				3,01	3,01
X_f				−3,01	−3,01

⊗ Durchschnittswerte

Zur Durchführung des in Abschnitt III behandelten genauen Rechenverfahrens benötigt man in erster Reihe die Bestimmung der Stabkräfte in einzelnen Zellen des Grundsystems. Der Zusammenhang, wie vorher eingehend erörtert wurde, wird zwischen den einzelnen Zellen durch Anschlußstäbe auf statisch bestimmte Weise gesichert. Die durch die Anschlußstäbe erzeugten Anschlußkräfte K stehen mit den äußeren Kräften P in statischem Gleichgewicht; daher stellt die Bestimmung der Stabkräfte in einer Zelle, auf welche die äußeren Kräfte P und K wirken, eine statisch bestimmte Aufgabe dar.

In Bild 23 werden die zur Berechnung der Stabkräfte in einer von äußeren Kräften P und K angegriffenen Zelle nötigen statischen Gleichungen zusammengestellt. Zur Bestimmung der Stabkräfte von Diagonalen und Pfosten denkt man die Zelle mit den in Bild 23 veranschaulichten Schnitten „H" und „V" durchschnitten. Die Gleichungen lassen sich in drei verschiedene Gruppen einteilen.

Die erste Gruppe der aufgestellten Gleichungen drückt das Gleichgewicht zwischen den Seitenkräften der auf den Schnitt wirkenden äußeren Belastung und die Seitenkräfte der durchschnittenen Stabkräfte aus, z. B. Gl. (1), (2). Die zweite Gleichungsgruppe benutzt die Bedingung des Momentengleichgewichts zwischen den durch den Schnitt getroffenen Stabkräften auf eine gewählte Drehachse, z. B. Gl. (3), (6), (7). In der dritten Gleichungsgruppe kommt das Knotenpunktgleichgewicht der

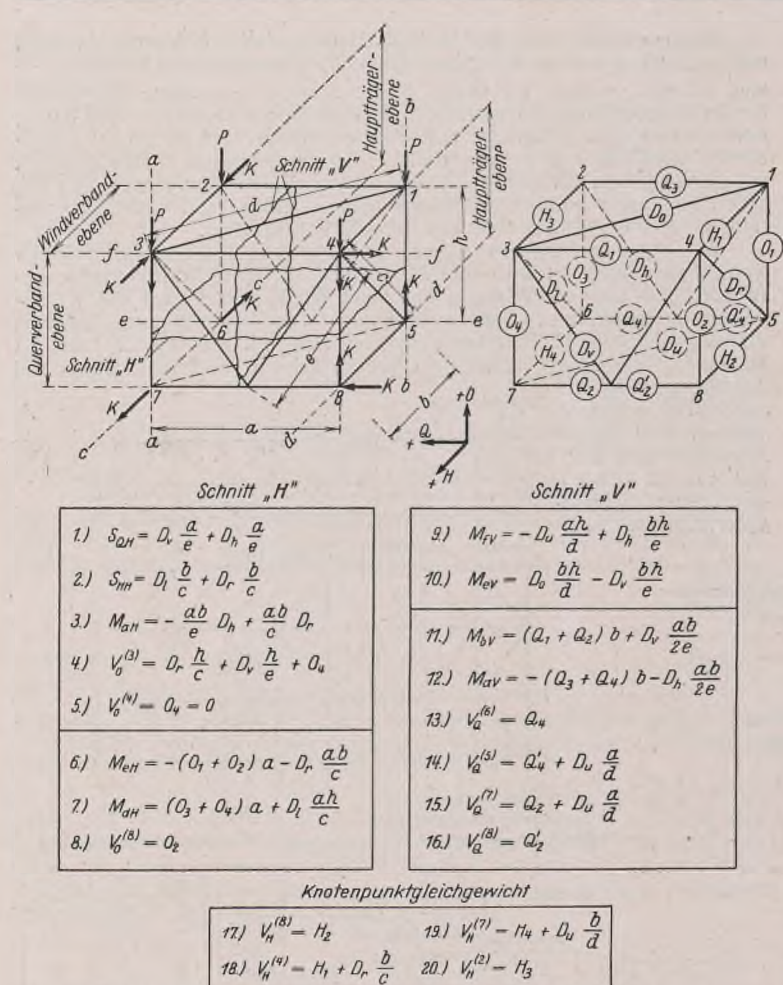


Bild 23. Formeln zur Berechnung der Stabkräfte eines Gliedes.

an dem Knotenpunkt angreifenden äußeren Belastungen und der daran angeschlossenen Stabkräfte zum Ausdruck [Gl. (17), (18)].

Die in den Gleichungen vorkommenden Bezeichnungen sind:

S: Seitenkraft der auf den Schnitt wirkenden äußeren Belastung. Der erste Zeiger von S gibt die Richtung der Seitenkraft an, der zweite Zeiger bezeichnet den Schnitt.

M: Moment der auf einen der Schnitte H oder V wirkenden äußeren Belastung auf eine der bezeichneten Drehachsen $a, b \ldots f$. Der erste Zeiger bezeichnet die Drehachse, der zweite den Schnitt.

V: Seitenkraft der in einem der Knotenpunkte 1, 2 . . . 8 wirkenden äußeren Kräfte in einer der Richtungen O, Q, H. Der obere Zeiger (in Klammer) gibt das Zeichen des Knotenpunktes, der untere Zeiger die Richtung der Seitenkraft an.

Es werden die Stabkräfte der Zellen für sämtliche Kraftwirkungen des Grundsystems bestimmt. Im Besitze dieser Kräfte werden dann alle nötigen Koeffizienten a_{nn} der fünfgliedrigen Gleichungsgruppen mit Verwendung der bekannten Arbeitsgleichungen berechnet.

Wegen Raummangel werden hier weitere Berechnungseinzelheiten nicht angegeben, da der ganze Berechnungsgang für das genaue Verfahren in Abschnitt III ausführlich erörtert wurde.

In der Tabelle III haben wir die Größtwerte der einzelnen Stabkräfte nach den erwähnten drei verschiedenen Berechnungsverfahren, und zwar

Tabelle III.

Stab			Näherungsverfahren ohne Windverband	Näherungsverfahren mit Windverband	genaues Verfahren	Näherungsverfahren	genaues Verfahren
Obergurt	äußerer Hpt.		-153,1	-139,6	-128,7	-143,9	-143,1
	mittlerer Hpt.		-102,7	-97,9	-98,2	-143,9	-144,9
Untergurt	äußerer Hpt.		143,5	130,9	119,8	136,8	133,8
	mittlerer Hpt.		96,3	92,1	93,1	136,8	134,9
Diagonale	äußerer Hpt.		-85,9	-82,2	-81,7	-81,9	-82,8
	mittlerer Hpt.		-57,7	-56,3	-53,5	-81,9	-81,0
Oberer Windverband	äußeres Feld	a-b		-4,1	-6,6		
		c-d		-4,1	-6,9		
	mittl. Feld	b-c		6,2	7,2		
Unterer Windverband	äußeres Feld	a-b		4,1	7,5		
		c-d		4,1	6,8		
	mittl. Feld	b-c		-6,2	-6,4		

1. nach dem bisher üblichen Näherungsverfahren ohne Berücksichtigung der Wirkung von Windverbänden, 2. nach dem Näherungsverfahren in Abschnitt II mit Berücksichtigung der Windverbände, 3. nach dem genauen Verfahren in Abschnitt III zusammengefaßt.

Bei Berechnung der angegebenen Größtwerte wurden die Kräfte X für jeden Querverband gesondert berücksichtigt.

Wie aus den Tabellen ersichtlich, gibt die Näherungsrechnung mit Berücksichtigung der Windverbände Werte für die Hauptträger, welche von denen der genauen Berechnung weniger abweichen, die Abweichungen sind demgegenüber bei den Füllstäben der Windverbände erheblich. Dies stammt jedoch teilweise auch daher, daß bei der Bestimmung der Stabkräfte der innerlich statisch unbestimmten viergurtigen Windverbände die bekannte — ziemlich willkürliche — Näherungsberechnung angewendet wurde.

Man soll daher die so erhaltenen Näherungswerte der Windverbandskräfte mit Vorsicht behandeln.

Die Abweichungen der Kräfte in den Hauptträgern nach Näherungsverfahren mit und ohne Berücksichtigung der Windverbände sind zwar nicht sehr erheblich (nicht über 10%), es soll aber bemerkt werden, daß die genaue Berechnung Werte ergibt, welche — wie ersichtlich — den Näherungswerten mit Berücksichtigung der Windverbände viel näher liegen.

Es muß auch noch aufmerksam gemacht werden, daß in unserem Rechenbeispiel die Brückenbreite zur Brückenhöhe verhältnismäßig sehr klein gewählt worden ist. Bei kleineren Werten dieser Verhältniszahl, wie es häufig bei Brücken mit vier Hauptträgern und viel mehr noch bei Brücken mit zwei Hauptträgern vorkommt, können sich die genannten Unterschiede viel größer gestalten. Wir bekommen auch größere Abweichungen, wenn die Ausfachungen der Windverbände, von welchen die Aufnahmefähigkeit der Windverbände abhängt — verhältnismäßig stärker gestaltet sind als in unserem Beispiel. Je größerer Anteil von M auf die Windverbände entfällt, um so geringer wird der Anteil der Hauptträger.

Die Berechnung der Wirkung von M mit Berücksichtigung der Windverbände muß ohnehin durchgeführt werden, denn es ergeben sich hierbei Belastungen der Windverbände, welche — wie auch bei der Horthy-Miklós-Brücke in Budapest — ausschlaggebend sind. Damit aber besitzen wir schon sämtliche Rechnungsangaben, mittels welcher auch die auf die Hauptträger entfallenden genaueren Belastungsanteile ohne Mühe erhalten werden können.

Bei Verwendung des erörterten Näherungsverfahrens sollen im praktischen Falle die Einflußlinien für die Gurt- und Füllstäbe der Hauptträger in Querrichtung zur Brückenachse infolge einer wandernden Einzellast bestimmt werden. Mit Benutzung dieser wird die ungünstigste Laststellung bestimmt.

Wegen Gleichheit der Verhältnisse wird dabei bei einem Hauptträger zur Bestimmung der Lage des Nullpunktes die Aufzeichnung nur weniger Einflußlinien genügen.

In Bild 24 haben wir z. B. die Einflußlinien mit Benutzung der Durchschnittswerte von X für einen Gurtstab des äußeren Hauptträgers unseres Zahlenbeispiels mit beiden Näherungsverfahren bestimmt.

Bild 24. Einflußlinien der Lastverteilung für den Obergurt $S_{3'-4'}$ des Hauptträgers a in Querschnitt 4.

Es zeigt sich dabei, daß die Näherungsverfahren ohne und mit Berücksichtigung der Windverbände Einflußlinien ergeben, nach welchen die Konstruktion in Querrichtung partiell zu belasten wäre. Die beiden Einflußlinien besitzen verschiedene Werte der Ordinaten sowie verschiedene Lagen des Belastungsnullpunktes.

Wenn die Konstruktion mit der in Bild 22 dargestellten gleichmäßig verteilten Last in Querrichtung nicht bis zur Mitte, sondern bis zum Nullpunkt belastet wird, ergeben sich die Größtkräfte des untersuchten Gurtstabes zu 171,5 und 161,4 t bei den Näherungsverfahren ohne bzw. mit Berücksichtigung der Windverbände.

Bei anderen Lasten (beispielsweise größeren Einzellasten) werden die beiden Einflußlinien noch größere Unterschiede ergeben.

Die Versteifung der Hauptträger durch zwei Windverbände und mehrere Querversteifungen ergibt eine Konstruktion, welche sich gegen dynamische Einwirkungen (Schwingungen, Erschütterungen usw.) günstig verhält. Die Erörterungen der vorigen Abschnitte sollen dazu beitragen, daß derartige Konstruktionen mit möglichst einfachem Verfahren wirtschaftlich günstig und statisch richtig bemessen werden.

INHALT: Einige neuere Ergebnisse zum Aufschweißbiegeversuch. — Kräfteverteilung an Brückenkonstruktionen, versteift durch zwei Windverbände und mehrere Querverbände. (Schluß.)

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Organ des Arbeitskreises „Stahlbau" der Fachgruppe Bauwesen im NS.-Bund Deutscher Technik

Schriftwaltung: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift DIE BAUTECHNIK Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 7 RM und Postgeld

15. Jahrgang — BERLIN, 6. März 1942 — Heft 6/7

Graphische Kräfteermittlung am statisch bestimmt gestützten Körper.

Von Prof. Dr.-Ing. habil. **Robert Kraus**, Shanghai.

Einleitung.

Ebenso wie in der Ebene ist auch im Raum eine graphische Statik der statisch bestimmten Fachwerke möglich, die für die Gelenk- und Stabkraftermittlung mit Lage- und Kräfteplan allein und ohne die Hilfe von Momentengleichungen und Stabvertauschung, also ohne Rechnung auskommt und somit rein graphisch ist. Die Grundlage für diese graphische Statik ist der Aufbau aller Fachwerke als Körper- oder Gelenkfachwerke, aus denen die Stabfachwerke durch Zusammenlegung von Gelenken oder Ersatz der Körper durch freie Stabfachwerke entwickelt werden. Über den systematischen Aufbau räumlicher Fachwerke und seine Gesetze soll an anderer Stelle berichtet werden. Hier ist nur wesentlich, zu wissen, daß jedes Fachwerk zunächst ein Gelenkfachwerk ist, dessen Körper nach bestimmten Regeln durch eine bestimmte Anzahl von Gelenken mit ebenfalls bestimmten Freiheitsgraden und Beweglichkeiten zu einem statisch bestimmten Gebilde verbunden sind, und daher auch ein Stabfachwerk entsprechend seiner Entstehung zunächst als Gelenkfachwerk und dann erst als Stabfachwerk zu betrachten ist. Daraus folgt für die Kräfteermittlung der Grundsatz, daß bei einem Stabfachwerk zuerst die Gelenkkräfte des zugrunde liegenden Gelenkfachwerks und dann erst die Stabkräfte zu ermitteln sind. Das Resultat dieser Zweiteilung der Kräfteermittlung, die gleichwohl in einen Kräfteplan zusammengefaßt werden kann, ist, wie schon bei den ebenen Fachwerken gezeigt wurde, bei den sogenannten schwierigen Fachwerken der Wegfall von Zwischenrechnungen oder sonst notwendigen Stabvertauschungen und somit die Entstehung eines zügig durchführbaren Lehrgebietes.

Die vorliegende erste Arbeit behandelt die graphische Gelenk- und Stabkraftermittlung an einem räumlich statisch bestimmt gelagerten Körper, die häufig vorkommt und ein Grundproblem darstellt. Untersuchungen an anderen Fachwerken werden folgen, und die Frage, wie man die Fachwerke selbst systematisch findet, wird, da sie, abgesehen von dem erwähnten Grundsatz, mit der Kräfteermittlung nichts zu tun hat, in einer abschließenden Arbeit beantwortet werden. Aus dieser Arbeit sei vorweggenommen, daß ein Körper nach der Zusammenstellung Bild 1 statisch bestimmt zu lagern ist. Die Zahl der Stützstellen und die Zahl ihrer Freiheitsgrade, die beide für die Gelenk- oder Stabkraftermittlung maßgebend sind, sind bei den in Bild 1 einander gegenüberliegenden Stützarten dieselben. Daher ist die Art der Kräfteermittlung ebenfalls dieselbe und unabhängig davon, ob die Stützung durch Stäbe oder Gelenke hergestellt ist. Gleichwertig sind drei zusammenlaufende Stäbe und ein Kugelschalengelenk, die beide für die Relativbewegung der verbundenen Körper den Freiheitsgrad 3 bilden, zwei zusammenlaufende Stäbe und ein Kugelrillengelenk mit dem Freiheitsgrad 4 und schließlich ein Einzelstab und ein Kugelplattengelenk mit dem Freiheitsgrad 5. Eine Untersuchung über die Ausführungsmöglichkeiten von Gelenken und insbesondere die Herbeiführung von Linien- statt Punkt- und Flächen- statt Linienberührung sowie Gelenkkombinationen zur Erzielung bestimmter Freiheitsgrade bei Momentenfreiheit der Gelenke sei der abschließenden Arbeit über den Fachwerksaufbau vorbehalten.

Bei allen Untersuchungen werden die Fachwerke in Orthogonalprojektion in Grund- und Aufriß und, sofern es infolge besonderer Lagen von Gelenken oder Stäben nötig oder zur Kontrolle der Richtigkeit des Ergebnisses erwünscht ist, auch im Seitenriß dargestellt. Die Verwendung eines besonderen Abbildungsverfahrens, das die räumliche Darstellung in eine einzige Ebene verlegt, ist unnötig und wäre in Anbetracht der Vorteile der dem Techniker gewohnten Darstellungsweise nicht empfehlenswert. Die Vorteile der Darstellung in Grund-, Auf- und Seitenriß sind:

1. Die Kräfteermittlung erfordert nur das aus der Darstellenden Geometrie gewohnte Vorstellungsvermögen und deren einfache Verfahren zur Bestimmung der Lagen von Ebenen, Schnittgeraden und Schnittpunkten.

2. Da, abgesehen von Sonderlagen, zwei Risse zur Festlegung des Fachwerks, der Wirkungslinien und daher auch der Kräfte genügen, hat man den dritten Riß zur Kontrolle der Richtigkeit des Ergebnisses übrig.

3. Die Kräfteprojektion bildet in jedem Riß ein Gleichgewichtssystem für sich. Daher können in den einzelnen Rissen die Verfahren der Ebenen Statik herangezogen werden, die in zahlreichen Fällen die Kräfteermittlung außerordentlich vereinfachen.

4. Die Kräftepläne der drei Risse sind Projektionen voneinander. Man kann diese Tatsache außer zur Kontrolle zur Herstellung der Pläne selbst heranziehen.

Stab- und Gelenkkraftermittlung durch den Sonderfall des ebenen Kräfteproblems.

In einem Riß allein können Stab- oder Gelenkkräfte dann ermittelt werden, wenn in diesem Riß nur drei Kräfte erscheinen, von denen eine Kraft ganz, von der zweiten die Wirkungslinie und von der dritten ein Punkt der Wirkungslinie bekannt sind, oder vier Kräfte erscheinen, von denen eine ganz und von den anderen die Wirkungslinien bekannt sind.

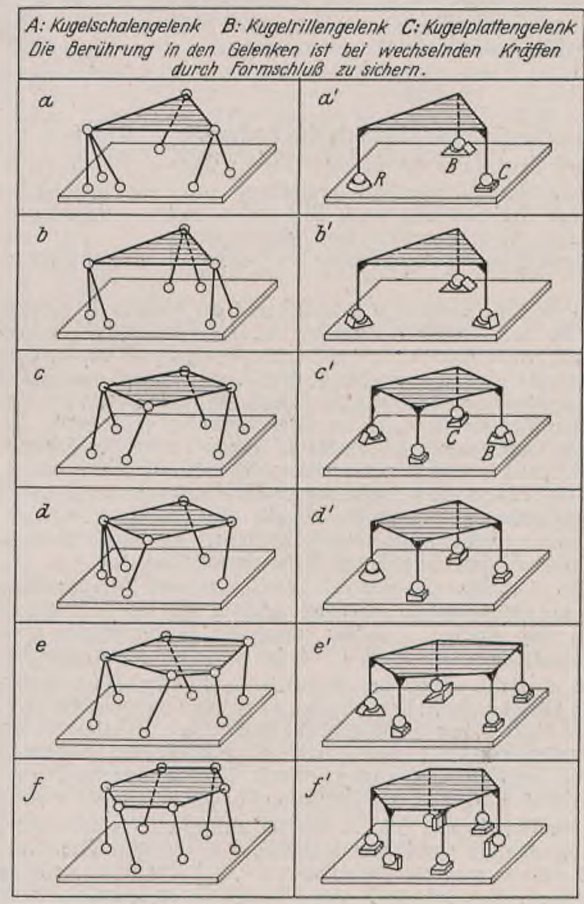
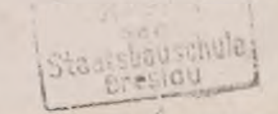


Bild 1a bis f'. Die statisch bestimmten Stützmöglichkeiten des starren Körpers.

Das Fachwerk Bild 1a u. a' kann im Sonderfall nach Bild 2 so liegen und gestaltet sein, daß die Wirkungslinie des Gelenkes oder Stabes B und die Wirkungsebene des Stabpaares oder Gelenkes C auf der Grundrißebene senkrecht stehen. Im Grundriß erscheint so keine Projektion der Gelenkkraft B. Die Wirkungsebene C projiziert sich als Gerade, die gleichzeitig die Projektion der Wirkungslinie der Gelenkkraft C ist. Die im Grundriß Bild 2b sichtbaren drei Kräfte schneiden sich im Punkt S_1, durch den die fehlende Wirkungslinie der Gelenkprojektion A'' festgelegt wird. Nach Bild 2d wird das Kräftedreieck des Grundrisses gezeichnet. Die Lote in den Ecken des Kräftedreiecks bilden einen geometrischen Ort für den senkrecht darüberliegenden Kräfteplan Bild 2c des Aufrisses.



Im Aufriß Bild 2a sind die Projektionen von vier Kräften sichtbar, wobei nur die Belastung P ganz, von der Gelenkkraft B die Wirkungslinie und von den beiden anderen Kräften die Punkte A' und C' bekannt sind. Da hiermit die fehlenden Kräfte nicht bestimmbar sind, ist eine Beziehung des Aufrisses zum Grundriß heranzuziehen. Als solche könnte man die Tatsache verwenden, daß der Kräfteplan des Aufrisses eine Projektion des Grundrisses sein muß, was aus dem Grund, daß bei statisch bestimmten Fachwerken nur Probleme ersten Grades auftreten, eine verhältnismäßig einfache Konstruktion mit geraden Linien erfordert. Noch einfacher ist das in Bild 2 angewendete Verfahren. Im Grundriß Bild 2b ist D'' die Projektion des Durchstoßpunktes D der Last P durch die durch die Gelenke A, B, C festgelegte Ebene E und die Gerade d die Verbindung der Gelenkprojektion B'' mit dem Punkt D'', die die Verbindungsgerade $A''C''$ im Punkt F'' schneidet, der nach F' im Aufriß heraufgelotet wird. Die Kräfte im Grundriß sind nicht nur Kraftprojektionen, sondern auch die horizontalen Seitenkräfte der Gelenkkräfte, die im Kräfteplan Bild 2d bestimmt sind. Zur Bestimmung der Gelenkkräfte fehlen noch die im Aufriß sichtbaren vertikalen Seitenkräfte, deren Wirkungslinien durch die Gelenke gehen und daher bekannt sind. Herafloten der Eckpunkte aus dem Grundriß die Kraftprojektionen B', A', C' des Aufrisses ergeben.

Das bisher an Körpern mit drei Stützstellen im Sonderfall angewendete Kräfteermittlungsverfahren ist auch bei mehr Stützstellen verwendbar, sofern in einem Riß die Kräfteprojektionen für sich allein ermittelt werden können. Bild 4 bietet als Beispiel hierfür die Kräfteermittlung an einem Körper mit sechs Stützstellen, der ein Sonderfall von Bild 1f oder f' ist und dessen Gelenkkräfte bei A_1, A_2, A_3 horizontal, bei B_1, B_2, B_3 vertikal sind, wie es z. B. bei der Stützung von Kuppeln vorkommt. Im Grundriß Bild 4b erscheinen nur die horizontalen Wirkungslinien a_1, a_2, a_3, aus denen man mit der Lastprojektion P'' die Wirkungslinie r_1 der Mittelkraft R_1 bestimmt, womit man den Kräfteplan Bild 4d zeichnet. Im Aufriß Bild 4a liegen die Wirkungslinien a in der Ebene E. Man hat hier nur noch die vertikalen Kräfte in den Gelenken B_1, B_2, B_3 mit den Wirkungslinien b_1, b_2, b_3 zu bestimmen, wozu man im Grundriß mit der Geraden d durch das Gelenk B_1 und den Durchstoßpunkt D der Kraft P durch die Ebene E den Punkt F'' als Schnitt mit der Geraden

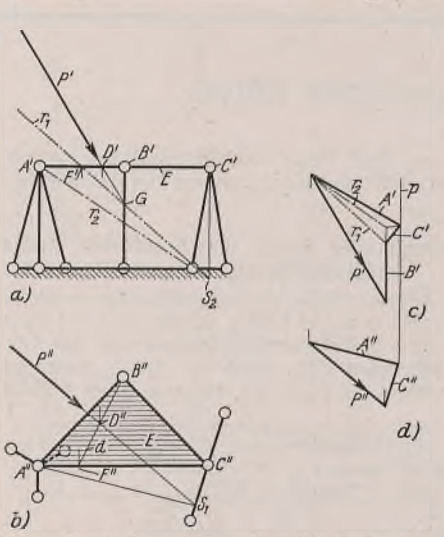


Bild 2a u. b. Auf- und Grundriß des Fachwerks.
Bild 2c u. d. Kräfteplan für Auf- und Grundriß.

Bild 2a bis d. Gelenkkraftermittlung am Sonderfall der Stützung nach Bild 1a, a' mit zur Gelenkebene E senkrechter Wirkungslinie am Gelenk B und Wirkungsebene am Gelenk C.

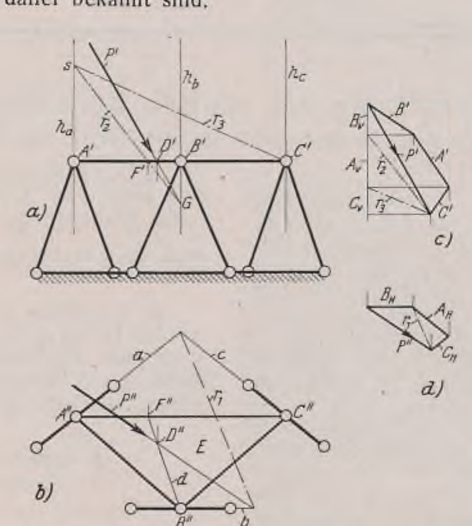


Bild 3a u. b. Auf- und Grundriß des Fachwerks.
Bild 3c u. d. Kräfteplan für Auf- und Grundriß.

Bild 3a bis d. Gelenkkraftermittlung am Sonderfall der Stützung nach Bild 1b, b' mit zur Gelenkebene E senkrechten Wirkungsebenen der Gelenkkräfte.

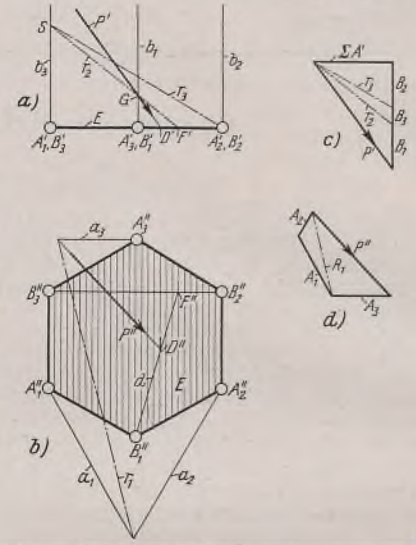


Bild 4a u. b. Auf- und Grundriß des Fachwerks.
Bild 4c u. d. Kräfteplan für Auf- und Grundriß.

Bild 4a bis d. Gelenkkraftermittlung am Sonderfall der Stützung nach Bild 1f, f', wobei die Gelenkkräfte A_1, A_2, A_3 in der Gelenkebene E liegen und die Gelenkkräfte B_1, B_2, B_3 senkrecht darauf stehen.

Wenn man sich die Gerade d Bild 2b und die Gerade $A''C''$ als Träger vorstellt, die den Körper E ersetzen, ändert sich an den Gelenkkräften nichts, man erhält jedoch an der Berührungsstelle F der beiden Träger entgegengesetzt gleiche lotrechte Kräfte F, von denen eine mit den lotrechten Seitenkräften der Kräfte P, B und die andere mit den lotrechten Seitenkräften der Kräfte A, C im Gleichgewicht sein muß. Im Aufriß Bild 2a hat man somit im Punkt F' einen Punkt der Mittelkraft der Kraftprojektionen P' und B' einerseits und der Kraftprojektionen A' und C' andererseits. Ein zweiter Punkt dieser Mittelkraft ist der Schnittpunkt G der Kraftprojektionen P' und B'. Durch die Punkte F' und G ist die Wirkungslinie r_1 dieser Mittelkraft bekannt, mit der im Kräfteplan Bild 2c die Projektion B' der Gelenkkraft B bestimmt wird.

Von den Kräften A' und C' kennt man die Wirkungslinien noch nicht und bestimmt daher zunächst wie in Bild 2a u. c die lotrechte Seitenkraft der Kraft C', indem man die Wirkungslinie r_1 bis zum Schnitt S_2 mit dem Lot durch C' führt und die Verbindungsgerade r_2 zu A' und S_2 zieht. Man hat dadurch in Bild 2a ein Seileck $F' S_2 A'$ für die im Gleichgewicht befindlichen lotrechten Seitenkräfte in F', C', A' gezeichnet, zieht daher im Kräfteplan Bild 2c die Parallele r_2 und durch deren Schnittpunkt mit der durch B' festgelegten Senkrechten die Horizontale, welche das vom Grundriß heraufgezogene Lot p in dem noch fehlenden Eckpunkt der Kraftprojektionen A' und C' schneidet.

Der Sonderfall nach Bild 3 wird in derselben Weise behandelt. Da die Wirkungsebenen der Gelenkkräfte A, B, C auf dem Grundriß Bild 3b senkrecht stehen, sind die Projektionen a, b, c der Wirkungslinien dieser Kräfte bekannt. Man bringt die vier Wirkungslinien paarweise zum Schnitt, findet durch die Schnittpunkte die Wirkungslinie r_1 der Mittelkraft eines Paares der Kräfte und zeichnet damit nach Bild 3d den Kräfteplan der Kraftprojektionen oder horizontalen Seitenkräfte.

Zur Ermittlung der vertikalen Seitenkräfte im Aufriß Bild 2a mit den Wirkungslinien h_a, h_b, h_c wird im Grundriß Bild 2b z. B. von B'' durch den Durchstoßpunkt D'' die Gerade d bis zum Schnitt F'' mit der Verbindungsgeraden $A''C''$ gezogen, F'' in den Aufriß nach F' projiziert, die Wirkungslinie r_2 durch F' und den Schnittpunkt G der Kraft P' mit der Wirkungslinie h_b gelegt und, um im Aufriß dieselbe Reihenfolge der Kräfte wie im Grundriß zu erhalten, die Wirkungslinie r_2 mit der Wirkungslinie h_a der auf B folgenden Kraft A in S zum Schnitt gebracht. Die Wirkungslinie oder Seileckseite r_3 ist die Gerade durch S und C. Im Kräfteplan Bild 3c sind durch die Strahlen r_2, r_3 die vertikalen Seitenkräfte B_v, A_v, C_v bestimmt, aus denen sich durch die Horizontalen und $B_2''B_3''$ aufsucht, ihn in den Aufriß nach F' projiziert, durch den Schnittpunkt G die Gerade r_2 legt und die Gerade r_3 durch S und B_2' zieht. Damit ist der Kräfteplan Bild 4c zu zeichnen, dessen horizontale Seite $\Sigma A'$ der Seileckseite $B_2'F'$ parallel ist und die Mittelkraftprojektion der Kräfte A_1, A_2, A_3 darstellt.

Kräfteermittlung mit den Gleichgewichtsbedingungen für vier räumliche Kräfte.

Statisch bestimmte Gleichgewichtszustände von Körpern mit vier räumlichen Kräften, von denen nicht mehr als zwei in derselben Ebene liegen dürfen, können in folgende Fälle unterschieden werden:

1. Die vier Kräfte schneiden sich in demselben Punkt. Zur Kräftebestimmung müssen die vier Wirkungslinien und Größe und Richtung einer Kraft gegeben sein, wonach man zur graphischen Kräfteermittlung das Kräfteparallelepiped[1]), das Culmannsche oder andere bekannte Verfahren anwenden kann;

2. die vier Kräfte liegen paarweise in einer Ebene. Gleichgewicht ist nur möglich, wenn die Schnittgerade beider Ebenen gleichzeitig die Verbindungsgerade der Schnittpunkte der Kräfte ist. Sind eine Kraft völlig und von den drei anderen Kräften die Wirkungslinien gegeben, so lassen sich die fehlenden Kräfte mit Hilfe der Tatsache konstruieren, daß die Mittelkräfte der beiden Paare von Kräften entgegengesetzt gleich sein und in der Schnittgeraden der Ebenen liegen müssen;

3. die vier Kräfte sind windschief. Wenn eine Kraft die Last ist, so müssen zur Möglichkeit der Bestimmung der drei anderen Kräfte nach Bild 1a, a' u. 1b, b' entweder von der zweiten Kraft die Wirkungslinie, von der dritten ein Punkt und die Wirkungsebene und von der vierten ein Punkt der Wirkungslinie oder von den drei Wirkungslinien je ein Punkt und die Wirkungsebene bekannt sein.

Als Beispiele für die Anwendung dieser Sätze dienen die Fachwerke Bild 5, 6, 7. Das Wesentliche in den dort angewendeten Verfahren der Kräfteermittlung ist der Ersatz der Last P durch zwei Seitenkräfte, deren Lage so gewählt wird, daß der zweite Gleichgewichtsfall entsteht, d. h. die Wirkungslinien von Mittelkräften als Schnittgeraden von Ebenen bekannt werden.

In Bild 5 ist das Fachwerk Bild 1a u. a' in dem Fall dargestellt, daß die Wirkungslinie der Gelenkkraft B auf der Ebene der Gelenke A, B, C senkrecht steht, während die Wirkungsebene der Gelenkkraft A schräg dazu liegt. Diese Wirkungsebene ist durch ihre Spur a in der Ebene E

[1]) W. Schlink, Technische Statik 1939, S. 32 ff. Verlag Springer.

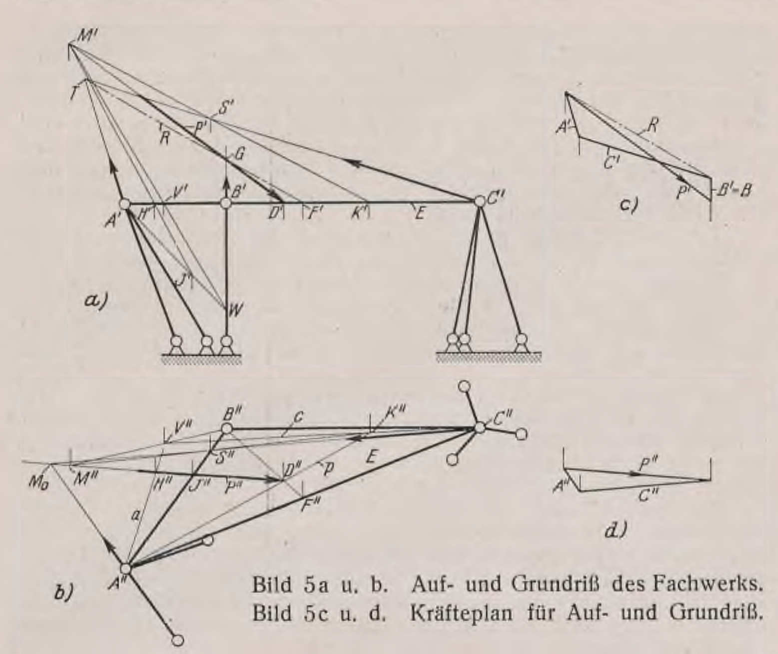


Bild 5a u. b. Auf- und Grundriß des Fachwerks.
Bild 5c u. d. Kräfteplan für Auf- und Grundriß.

Bild 5a bis d. Gelenkkraftermittlung durch zwei Seitenkräfte der Last P an der Körperstützung nach Bild 1a, a' mit zur Gelenkebene E senkrechter Wirkungslinie des Gelenkes B.

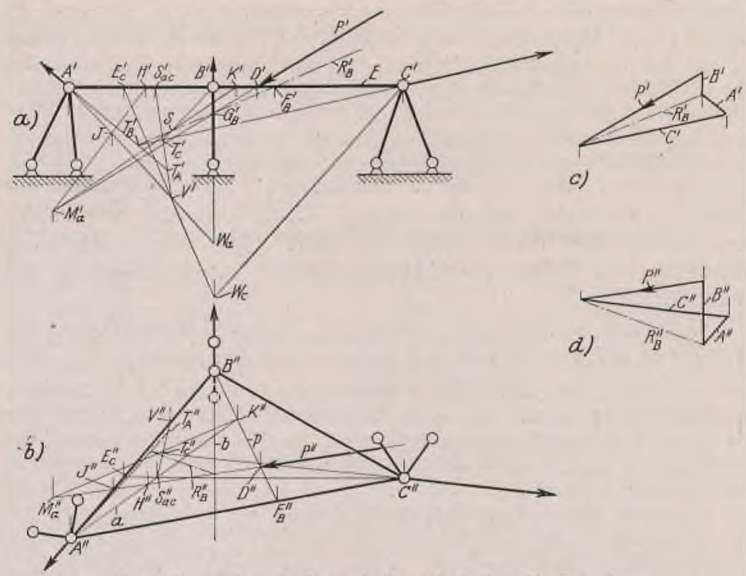


Bild 6a u. b. Auf- und Grundriß des Fachwerks.
Bild 6c u. d. Kräfteplan für Auf- und Grundriß.

Bild 6a bis d. Gelenkkraftermittlung durch zwei Seitenkräfte der Last P an der Körperstützung nach Bild 1b, b' mit zur Gelenkebene E senkrechter Wirkungsebene des Gelenkes B.

und durch ihren Schnittpunkt W mit der Wirkungslinie durch B festgelegt. Die durch ihre Projektionen P', P'' gegebene Last P durchstößt die Ebene E im Punkt D mit den Projektionen D', D'' und die Wirkungsebene der Stütze A im Punkt M mit den Projektionen M', M''. Man findet diese Punkte dadurch, daß man durch die Kraft P eine Ebene senkrecht zur Ebene E legt, die im Grundriß Bild 5b die Spur a im Punkt H'' und die Gerade AW im Punkt J'' schneidet, die im Aufriß mit H' und J' bezeichnet sind. Die Schnittgerade beider Ebenen schneidet im Aufriß die Projektion P' im Punkt M', dessen Lot im Grundriß den Durchstoßpunkt M'' angibt. Man denke sich nun durch die Punkte A, D, M eine Ebene gelegt, deren Spur die Gerade p ist und die die Last P enthält, und in dieser Ebene die Last P bei M durch Seitenkräfte P_1 und P_2 ersetzt, von denen die Seitenkraft P_2 durch den Stützpunkt A gelegt wird, während die Seitenkraft P_1 mit der ebenfalls noch unbekannten Stützkraft C in derselben Ebene liegen soll. Die Kräfte P_1 und C bilden in dieser Ebene eine Mittelkraft, welche der aus den Kräften B, A, P_2 gebildeten Mittelkraft entgegengesetzt gleich ist. Die Kräfte A und P_2 gehen durch denselben Punkt A und bilden dort für sich allein eine Mittelkraft, die mit B zur vorhin erwähnten Mittelkraft zusammenzufassen ist. Da die Wirkungslinie B bekannt ist, muß die Mittelkraft aus A und P_2 in der Ebene durch B liegen, die auch durch das Gelenk A geht. Die Mittelkraft aus B, A, P_2 liegt daher im Grundriß in der Geraden $A''B''$ und im Aufriß in der dazu senkrechten Ebene. Da die Kräfte A und P_2 in der zum Grundriß schrägen Wirkungsebene des Stützpunktes A liegen, kann ihre Mittelkraft nur die Wirkungslinie AW haben, um mit der Kraft B in derselben Ebene zu liegen. Die Mittelkraft aus den Kräften B, A, P_2 geht demnach durch den Punkt W. Da diese Mittelkraft auch aus den Kräften C, P_1 gebildet wird, muß ihre Wirkungslinie auch in der Ebene durch den Stützpunkt C und die Kraft P_1, die durch den Punkt M geht, liegen. Von dieser Ebene kennt man demnach die drei Punkte W, C, M und kann sie daher zeichnen. Man zieht im Aufriß die Gerade $M'W'$ mit dem Schnittpunkt V' in der Ebene E, im Grundriß die Gerade $B''M''$ und bestimmt die Projektion V'' mit dem Lot durch V'. Die Gerade $V''C''$ ist die Spur c dieser Ebene in der Ebene E, die die Kräfte P_1 und C enthält. Da die Seitenkraft P_1 auch in der Ebene AMD liegt, weil die Kräfte P und P_2 in ihr liegen, findet man ihre Lage im Grundriß als die Gerade durch M'' und den Schnittpunkt K'' der Spuren p und c. Der Schnittpunkt S'' der Geraden $M''K''$ mit der Geraden $B''A''$ ist der Durchstoßpunkt der Kraft P_1 durch die über $B''A''$ senkrechte Ebene und daher nach W der zweite Punkt, durch den die Schnittgerade, in der die Mittelkraft aus den Kräften B, A, P_2 oder C, P_1 liegt, festgelegt ist. Im Aufriß liegt die Projektion S' des Durchstoßpunktes auf der Geraden $M'K'$. Im Punkt S'', S' treffen sich die Wirkungslinien der Kräfte P_1 und C, so daß mit diesem Punkt die gesuchte Wirkungslinie der Kraft C in Grund- und Aufriß bekannt geworden ist.

Da sich im Grundriß nur drei Kräfte projizieren, findet man durch den Schnittpunkt M_0 der bekannten Wirkungslinien der Kraftprojektionen C'' und P'' auch die Wirkungslinie für A'' und kann somit den Kräfteplan Bild 5d des Grundrisses zeichnen.

Im Aufriß ist der Punkt S' als Schnittpunkt der Geraden $K'M'$ mit dem Lot durch S'' zu bestimmen. Zur Zeichnung des Kräfteplanes im Aufriß braucht man die Wirkungslinie R der Mittelkraft aus den Kräften P' und B, die man wie früher als Gerade durch ihren Schnittpunkt G und die Projektion F' des Punktes F'' als Schnittpunkt der Geraden $B''D''$ und $A''C''$ findet.

Die Mittelkraft R aus den Seitenkräften P' und B ist bei den vier im Gleichgewicht stehenden Kraftprojektionen auch diejenige aus den Seitenkräften C' und A'. Die Wirkungslinie $C'S'$ schneidet die Wirkungslinie R im Punkt T, durch den infolgedessen auch die Wirkungslinie der Kraftprojektion A' geht und bekannt wird. Damit kann auch der Kräfteplan Bild 5c des Aufrisses gezeichnet werden.

An einer Körperstützung nach Bild 1b, b' kann die Kräfteermittlung mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen für vier räumliche Kräfte nach Bild 6a bis d durchgeführt werden, wenn eine Wirkungsebene, z. B. in Bild 6 diejenige des Gelenkes B, so liegt, daß sie auf Grund- und Aufriß senkrecht steht und die Ebene E durch die drei Gelenke in den Grundriß fällt. Die Wirkungsebene des Gelenkes A ist durch die Spur a in der Ebene E und ihren Schnittpunkt W_a mit der Vertikalen durch das Gelenk B, die Wirkungsebene des Gelenkes C durch ihre Spur c und den Schnittpunkt W_c gegeben. Die Last P ist durch ihre Projektionen P', P'' festgelegt und hat in der Ebene E einen Durchstoßpunkt, dessen Projektionen D', D'' sind.

Die Last P sei in ihrer Wirkungslinie bis zu ihrem Durchstoßpunkt M_a mit der Wirkungsebene des Gelenkes A verschoben und dort durch zwei Seitenkräfte P_1, P_2 ersetzt, von denen die Kraft P_2 die Wirkungslinie $M_a B$ haben soll. Die Kraft P_1 muß dann in der durch P, M_a und B gehenden Ebene liegen. Sie soll, um mit der Gelenkkraft A vereinigt werden zu können, auch in der Wirkungsebene des Gelenkes A liegen, hat also als Wirkungslinie die Schnittgerade beider Ebenen. Man erhält im Gelenk A die Mittelkraft $A + P_1$, im Gelenk B die Mittelkraft $B + P_2$, die mit der dritten am Körper angreifenden Gelenkkraft C in derselben Ebene liegen und sich in demselben Punkt schneiden müssen. Dieser Punkt kann nur in der Schnittgeraden der Wirkungsebenen der Gelenke A und C liegen und ist der Durchstoßpunkt dieser Schnittgeraden durch die von den Kräften B und P_2 gebildete Ebene. Ein Punkt der Schnittgeraden der Wirkungsebenen A und C ist der Schnittpunkt S''_{ac} der Spuren a und c, der in den Aufriß nach S'_{ac} gelotet wird. Einen zweiten Punkt V dieser Schnittgeraden mit den Projektionen V', V'' findet man dadurch, daß man im Grundriß die Spur c bis zum Schnitt E_c'' mit der Geraden $A''B''$ führt, die eine Projektion der Geraden AW_a ist, den Punkt E_c'' in den Aufriß nach E_c' lotet und dort die Gerade $E_c'W_c$ zieht, die in der Wirkungsebene des Gelenkes C liegt. Sie wird von der in der Wirkungsebene des Gelenkes A liegenden Geraden im Punkt V' geschnitten, der mithin ein zweiter Punkt der gesuchten Schnittgeraden $S'_{ac}V'$ ist. Im Grundriß ist $A''B''$ die Projektion der Geraden $A'W_a$ und $E_c'W_c$, weshalb V' auf diese Gerade zu loten ist, um die Projektion V'' und die Schnittgerade $S''_{ac}V''$ im Grundriß zu finden.

Den Durchstoßpunkt M_a', M_a'' der Last P durch die Wirkungsebene des Gelenkes A ermittelt man dadurch, daß man die sich im Grundriß mit der Lastprojektion P'' deckende Gerade $H''J''$ der Wirkungsebene A in den Aufriß nach $H'J'$ bringt, dort ihren Schnittpunkt M_a' mit der Lastprojektion P' bestimmt und ihn nach M_a'' auf der Projektion P'' herablotet. Die Ebene durch die Kraft P und das Gelenk B hat die Spur p und schneidet die Spur a der Wirkungsebene A im Punkt K''. Da die Seitenkraft P_1 in beiden Ebenen liegen soll, ist die Grundrißprojektion ihrer Wirkungslinie die Gerade $M_a''K''$, die Aufrißprojektion $M_a'K'$.

Infolge der besonderen Lage der Wirkungsebene B kann man im Aufriß die Mittelkraft R_B' der Kraftprojektionen P', B' wie früher dadurch ermitteln, daß man aus dem Grundriß den Punkt F'' nach F' heraufholt und im Aufriß die Gerade durch F' und den Schnittpunkt G_B' der Kraftprojektion P' mit der Projektion der Wirkungsebene B zieht.

Diese Wirkungslinie R_B' schneidet die Wirkungslinie $M_a'K'$ der Kraft P_1 im Punkt S. Da sich im Punkt S die Kräfte $R_B' = P' + B' = P_1' + P_2' + B'$ und P_1' mit der Wirkungslinie SK' treffen, geht durch S auch die Kraft $B' + P_2'$, die auch durch das Gelenk B geht und daher die Wirkungslinie $B'S$ hat. Diese Wirkungslinie muß, wie eingangs erwähnt, die Schnittgerade $S_{ac}'V'$ in einem Punkt treffen, durch den auch die Wirkungslinien der Gelenkkraft C und der in der Wirkungsebene A liegenden Kraft $A + P_1$ gehen. Man verlängert daher $B'S$ bis zur Schnittgeraden $S_{ac}'V'$ und findet den Punkt T_C', durch den man die Gerade $T_C'C'$ als Wirkungslinie der Kraftprojektion C' legt. Man projiziert den Punkt T_C' in den Grundriß und findet dort als $T_C''C''$ die Grundrißprojektion der Wirkungslinie der Gelenkkraft C.

Wenn man im Aufriß die Gerade $C'T_C'$ bis zum Schnitt T_B' mit der Wirkungslinie der Mittelkraft R_B' verlängert, so findet man in T_B' einen Punkt, für den die geometrische Summe $R_B' + C' = B' + P' + C'$ angesetzt werden kann. Da diese Summe des Gleichgewichtes wegen gleich der Gelenkkraft A sein muß, geht die Wirkungslinie der Kraft A durch T_B'. Der Kräfteplan Bild 6c für den Aufriß kann nun gezeichnet werden.

Da der Punkt T_B' mit Hilfe der Mittelkraft R_B' bestimmt wurde, die als Mittelkraft von Projektionen nur im Aufriß vorhanden ist, gilt auch er nur für den Aufriß und kann nicht in den Grundriß gelotet werden. Einen im Raum vorhandenen Punkt findet man durch Verlängerung der Wirkungslinie $A'T_B'$ bis zum Schnitt T_A' mit der Schnittgeraden $S_{ac}'V'$ und lotet diesen Punkt in den Grundriß nach T_A'', womit man die Projektion $A''T_A''$ der Wirkungslinie der Gelenkkraft A erhält. Um den Kräfteplan Bild 6d des Grundrisses zeichnen zu können, braucht man, da im Grundriß vier Kräfte mit unbekannten Wirkungslinien vorhanden sind, noch die Mittelkraft R_B'', die man als Verbindungsgerade der beiden Punkte findet, in denen sich einerseits die Wirkungslinien $A''T_A''$ und $C''T_C''$, andererseits die Wirkungsebene B'' und Kraftprojektion P' schneiden.

Das bisher verwendete Verfahren, zur Kräfteermittlung die Last P durch zwei Seitenkräfte zu ersetzen und die Gleichgewichtsbedingungen für vier räumliche Kräfte heranzuziehen, führt auch noch bei den Fachwerken Bild 1c, c' und d, d' mit fünf Kräften an einem Körper zum Ziel. Als Beispiel ist in Bild 7 die Kräfteermittlung am Fachwerk Bild 1d durchgeführt. In Bild 7 ist das Gelenk A durch drei Stäbe festgehalten, während an den Gelenken B_1, B_2, C nur je ein Stab angeschlossen ist.

Der Ersatz der Last P durch Seitenkräfte nach $P = P_1 + P_2$ ist in Bild 7 zur Kräfteermittlung nach der Gleichgewichtsbedingung $A + B_1 + P_1 = -(C + B_2 + P_2) = \pm R$ benutzt worden, wobei die Seitenkraft P_1 mit der Gelenkkraft A zur Mittelkraft $R_1 = A + P_1$ und die Seitenkraft P_2 mit der Gelenkkraft C zur Mittelkraft $R_2 = C + P_2$ zusammengefaßt wurden. Um die Mittelkraft R_1 bilden zu können, muß die Seitenkraft P_1 durch einen bekannten Punkt der Gelenkkraft A gehen, weshalb die Ebene durch die Last P, in der die Zerlegung in Seitenkräfte P_1 und P_2 vorgenommen wird, durch das Gelenk A gelegt wird. Da die Wirkungslinie der Kraft A unbekannt ist, kann die Ermittlung des Lageplanes an dieser Stelle vorläufig nicht weitergeführt werden.

Die Seitenkraft P_2 soll mit der Gelenkkraft C zu einer Mittelkraft R_2 zusammengefaßt werden und muß deshalb durch den Schnittpunkt D der durch die Last P und das Gelenk A gelegten Ebene mit der bekannten Wirkungslinie C gehen. Zur Bestimmung des Schnittpunktes D ist im Seitenriß Bild 7c die Wirkungslinie C gezogen, auf der dieser Punkt liegen muß. Ferner ist die Spur p der Ebene durch die Last P und das Gelenk A in der Aufrißebene bestimmt worden, die hier durch das Gelenk B_2 gehend angenommen ist und dessen Wirkungslinie enthält. Zur Ermittlung der Spur p ist zunächst der Durchstoßpunkt M_a durch die zur Aufriß- und Grundrißebene senkrechte Ebene durch A festgelegt und im Seitenriß die Gerade $M_a'''A'''$ bis zur Aufrißebene durch B_2''' gezogen und der Durchstoßpunkt F_1''' in den Aufriß nach F_1' herübergelotet worden. Ein zweiter Punkt der Spur p ist der Durchstoßpunkt F_2' der Last P durch die Aufrißebene. Um für den Punkt D einen zweiten geometrischen Ort zu finden, wird durch die Wirkungslinie C eine senkrechte Ebene gelegt, die zur senkrechten Ebene durch das Gelenk A parallel ist und die Spur p im Punkt F_3' schneidet. Die Schnittgerade der Ebene durch P und A mit der durch C senkrecht gelegten Ebene ist parallel zu der Schnittgeraden $A'''F_1'''$ der durch A gehenden parallelen Ebene. Man lotet daher den Punkt F_3' in den Seitenriß und zieht durch F_3''' die Parallele zu $F_1'''A'''$, die die Wirkungslinie der Kraft C im Punkt D''' schneidet. Die Projektionen D', D'' findet man durch Loten auf die in Grund- und Aufriß gegebene Wirkungslinie der Kraft C.

Der Punkt D ist ein Punkt der Mittelkraft R_2. Da sich die Mittelkraft R aus der Kraft R_2 und der Gelenkkraft B_2 bildet, liegt die Kraft R in der durch die Wirkungslinie B_2 und den Punkt D festgelegten Ebene. Die Kraft R wird außerdem auch von der durch das Gelenk A gehenden Mittelkraft R_1 und der Gelenkkraft B_1 gebildet. Daher kann die Wirkungslinie der Mittelkraft R nur die Schnittgerade beider Ebenen sein, die bestimmt werden kann. In Bild 7a, b, c trifft die Wirkungslinie B_1 die durch das Gelenk A senkrecht gelegte Ebene in den Punktprojektionen T', T'', T''', die man mit A verbindet. Diese Verbindungsgerade trifft im Seitenriß die Aufrißebene in dem Punkt G''', der, in den Aufriß herübergeholt, den Spurpunkt G' der Ebene $B_1 T A$ ergibt. Die Spur selbst ist eine Parallele zu $T'B_1'$ durch G', weil die Gerade TB_1 zur Aufrißebene parallel liegt.

Die Aufrißspur der Ebene durch B_2 und D, in der die Mittelkraft R ebenfalls liegen muß, ist die Wirkungslinie B_2 selbst, da sie in der Aufrißebene liegt. Der Schnittpunkt V beider Spuren ist in der Projektion V' im Aufriß zu ermitteln und nach V'', V''' zu projizieren.

Ein zweiter Punkt W der Mittelkraft R ist der Schnittpunkt der beiden Ebenen in der zur Aufrißebene parallelen Ebene durch B_1. Da die Wirkungslinie B_1 in ihr liegt, ist sie selbst die Spur der Ebene $B_1 T A$. Die Spur der Ebene durch die Wirkungslinie B_2 und den Punkt D ist zur Wirkungslinie B_2 parallel und geht durch den Durchstoßpunkt D_0 der Geraden g durch die Spurenebene. Die Gerade g wird mit Hilfe des Punktes E als dem Durchstoßpunkt der Wirkungslinie B_2 durch die durch C gelegte senkrechte Ebene in bekannter Weise gefunden. Man zieht also durch D_0' die Parallele zu B_2' und findet in ihrem Schnittpunkt W' mit der Wirkungslinie B_1' den zweiten Punkt der Mittelkraft R, die somit als Verbindungsgerade $V'W'$ im Aufriß und durch Loten als Gerade $V''W''$ bzw. $V'''W'''$ bekannt wird.

Im Punkt V trifft die Mittelkraft R ihre Seitenkraft B_2, weshalb durch V auch ihre zweite Seitenkraft R_2 gehen muß, die außerdem durch den Punkt D geht und daher in den Projektionen $V'D'$, $V''D''$, $V'''D'''$ gezeichnet werden kann. Im Punkt W trifft die Mittelkraft R die Wirkungslinie B_1 und daher auch die Wirkungslinie R_1, die außerdem durch das Gelenk A geht, weil sich dort die Kräfte A und P_1 schneiden, und somit ebenfalls festliegt.

Man hat nun noch die Wirkungslinien der Seitenkräfte P_1 und P_2 zu suchen, von denen die Punkte A und D und ihre Lage in der Ebene A, D, M_a bekannt sind. Da die Seitenkraft P_2 mit der Mittelkraft R_2 und dem Gelenk C in derselben Ebene liegt, ist ihre Wirkungslinie die Schnittgerade der Ebene CDV mit der Ebene ADM_a. Zu dem gemeinsamen Punkt D ist noch ein zweiter Punkt U zu suchen. Hierzu ist in Bild 7a, b, c durch die Punkte M_a und F_3 der Ebene ADM_a eine senkrechte Ebene gelegt worden, deren Schnittgerade $F_3 M_a$ in Auf- und Grundriß gezogen ist, und die die darüberliegende Schnittgerade der senkrechten Ebene mit der Ebene CDV im gesuchten Punkt U trifft. Da man in der Ebene CDV die Wirkungslinie R_2 kennt, benutzt man ihren Schnittpunkt S'' im Grundriß mit der senkrechten Ebene zur Festlegung der Schnittgeraden und lotet ihn nach S' auf der Linie R_2'. Die Gerade DC ist die Wirkungslinie der Kraft C und trifft die durch M_a und F_3 gelegte senkrechte Ebene im Punkt C_0, der senkrecht über F_3 liegt. Man verbindet die Projektion C_0' mit dem Punkt S' und zieht diese Gerade weiter bis zum Schnitt U' mit der Geraden $F_3'M_a'$, was man entsprechend in Grund- und Seitenriß wiederholt, um die Projektionen U'', U''' festzustellen. Die Gerade DU ist die Wirkungslinie der Kraft P_2. Sie trifft die Wirkungslinie der Kraft P im Punkt Z, durch den auch die Wirkungslinie der Seitenkraft P_1 geht.

Da nun sämtliche Wirkungslinien bekannt sind, kann der Kräfteplan für den Aufriß Bild 7d, den Grundriß Bild 7e und den Seitenriß Bild 7f gezeichnet werden, wobei man mit der Ermittlung der Seitenkräfte P_1 und P_2 beginnt, um durch deren Schnittpunkt die Mittelkräfte R, R_1, R_2 ziehen zu können. (Schluß folgt.)

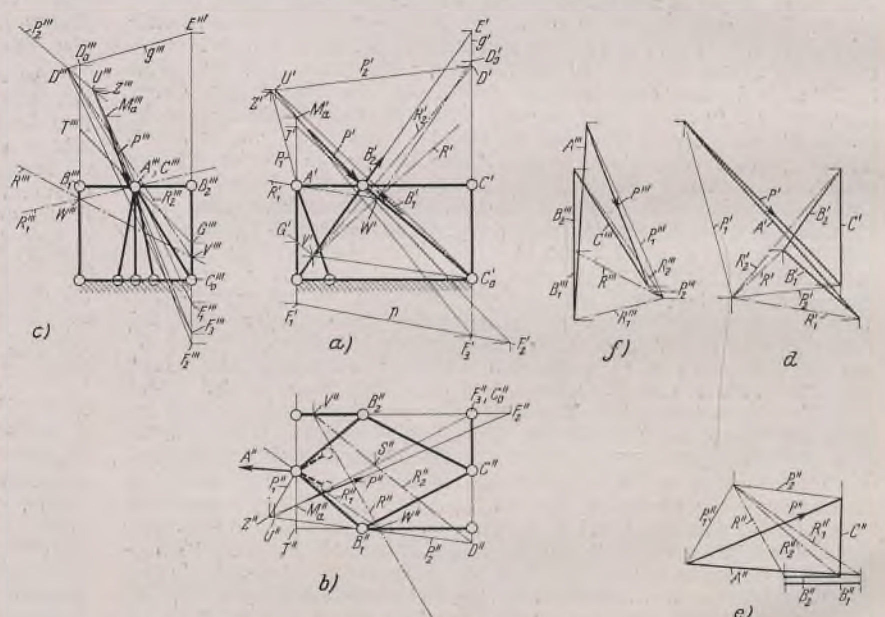


Bild 7a, b u. c. Auf-, Grund- und Seitenriß des Fachwerks.
Bild 7d, e u. f. Kräfteplan für Auf-, Grund- und Seitenriß.
Bild 7a bis f. Gelenkkraftermittlung durch zwei Seitenkräfte der Last P an der Körperstützung nach Bild 1d.

Einige neuere Ergebnisse zum Aufschweißbiegeversuch.

Von **Otto Werner** (Staatliches Materialprüfungsamt Berlin-Dahlem).

(Schluß aus Heft 4/5).

In Bild 8 wurden daher für die gleichen Proben wie in Bild 7 die Produkte aus Kerbschlagzähigkeit der Längsproben und Sehnigkeit gegen die Kerbschlagzähigkeit der Längsproben aufgetragen, diesmal jedoch unter ausschließlicher Verwendung der DVMR-Probenform[15]). Bei einem Vergleich zwischen Bild 7 und 8 erkennt man sofort, daß nunmehr auch bei nicht besonders extrem verschiedenen Stählen eine Unterscheidung zwischen bedingungsgemäßen und nicht bedingungsgemäßen im Hinblick auf den Durchbruchsbiegewinkel möglich ist. Die bedingungsgemäßen Proben liegen in dem $S \cdot a_k$-Bereich von 25 bis 32 kg/cm², und die nicht bedingungsgemäßen Proben liegen in dem $S \cdot a_k$-Bereich von 12 bis 22 kg/cm². Die Verwendung der Durchbruchsbiegewinkel zur Unterscheidung zwischen bedingungsgemäß und nicht bedingungsgemäß erfolgte in der wohl in erster Annäherung gültigen Annahme, daß die Durchbruchsbiegewinkel möglicherweise mehr geeignet sind, etwas über die Kerbempfindlichkeit des unveränderten Werkstoffes auszusagen als die Anrißbiegewinkel, welche vorwiegend auf die Eigenschaften der wärmebeeinflußten Zone ansprechen. Jedoch führt auch eine Verwendung der Anrißbiegewinkel in der vorliegenden Beziehung zu einem brauchbaren Ergebnis, besonders, wenn man berücksichtigt, daß bei den spröden Werkstoffen mit kleinen Biegewinkeln α_1 und α_2 zusammenfallen.

Es soll schließlich noch erwähnt werden, daß gegen die Verwendung der Kerbschlagprobe mit einem gewissen Recht verschiedene Einwände erhoben worden sind. Die weitere Entwicklung der Versuche ist daher in der Richtung gegangen, an Stelle der Kerbschlagprobe die Kerbschlagzugprobe bzw. die Kerbzugprobe in der von W. Kuntze angegebenen Probenform zu setzen. Die erwähnten Versuche haben zu aussichtsreichen Ergebnissen geführt[16]).

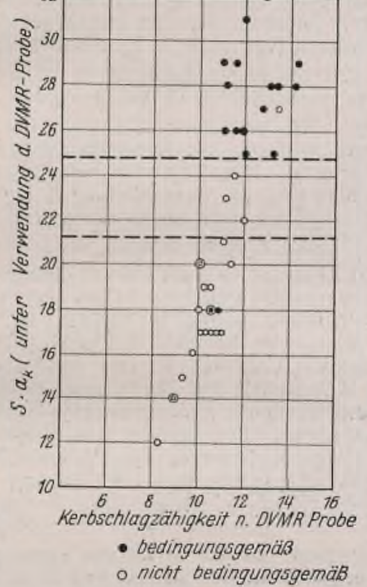


Bild 8. Kennzeichnung des Werkstoffverhaltens durch das Produkt $S \cdot a_k$.

Eine Zusammenstellung der hauptsächlichsten Zahlenwerte ist in den Zahlentafeln 1 bis 2a enthalten.

In diesen Zahlentafeln sind die an den 38 Proben festgestellten Brüche in die Hauptgruppen: Trennungsbruch und Verformungsbruch eingeordnet. Hierbei wurde in Ermangelung einer besseren Definition etwas schematisch derart verfahren, daß Proben mit Durchbruchsbiegewinkeln unter 50° als zur Gruppe der Trennungsbrüche gehörend angesehen wurden, während die Proben mit Durchbruchswinkeln über 60° bzw. diejenigen Proben, die am Ende des Versuchs noch nicht gebrochen waren, als Proben mit Verformungsbruch angesehen wurden. In einer dritten Gruppe wurden vier Proben zusammengestellt, die teils bei größeren, teils bei kleineren Anrißbiegewinkeln plötzlich Brüche über den größeren Teil der Probenbreite, nicht aber vollen Durchbruch ergeben hatten. Es handelt sich hier augenscheinlich um Brüche, die auch als Mischbrüche bezeichnet werden.

In Zahlentafel 1 (Proben mit Trennungsbruch) liegen bei dem Produkt $S \cdot a_{k\,\text{längs}}$ nur die beiden Proben 7 und 11 außerhalb des Durchschnitts (2 von 21!). In Zahlentafel 2 (Proben mit Verformungsbruch) liegt nur die Probe 2 hinsichtlich des Produktes $S \cdot a_{k\,\text{längs}}$ wesentlich unter dem Durchschnitt (1 von 13!). In Zahlentafel 2a (Proben mit Mischbruch) würden, formal gesehen, die Proben 13, 17 und 22 zu den Proben mit Verformungsbruch gerechnet werden müssen. Hier liegt Nr. 17 unterhalb des Durchschnitts, während Nr. 27 formal zu den Proben mit Trennungsbruch gehört, wobei der $S \cdot a_k$-Wert innerhalb des Durchschnitts von Zahlentafel 1 liegt.

3. Zusammenfassung der hauptsächlichsten Versuchsergebnisse.

Das Hauptergebnis der im vorstehenden wiedergegebenen Versuche ist, daß der Aufschweißbiegeversuch sich weitgehend durch zwei Kenngrößen beschreiben läßt, von denen die eine, der Hysteresebereich J_T, das Verhalten des Werkstoffes unter der Einwirkung der Schweißhitze kennzeichnet, während die andere Kenngröße $S \cdot \alpha_{k\,\text{längs}}$ ein Maß für die Kerbempfindlichkeit des unveränderten Werkstoffes bei dreiachsiger Beanspruchung mit vorwiegender Beanspruchung in der Walzrichtung bildet.

Die metallurgischen Folgerungen aus den hier mitgeteilten Versuchen stehen in völliger Übereinstimmung mit der neuerdings, insbesondere von R. Wasmuth (a. a. O.), geförderten Entwicklung in Richtung auf die Feinkornstähle. Es ist, wie auch E. H. Schulz und W. Bischof hervorheben, zwar möglich, auch bei normal erschmolzenen Stählen durch geeignete Wärmebehandlung eine für die Erfüllung der Bedingungen des Aufschweißbiegeversuchs geeignete Gefügeausbildung zu erreichen; die

Zahlentafel 1. Proben mit Trennungsbruch.
Bewertung erfolgte unter Verwendung der Durchbruchsbiegewinkel.

Probe Nr.	α_1 Grad	α_2 Grad	Hysterese-bereich Grad	Höchst-härte	$a_{k\,\text{längs}}$	$a_{k\,\text{quer}}$	S	$S \cdot a_{k\,\text{längs}}$	$a_{k\,(\text{Graf})}$
6	28	39	236	312	11,1	5,9	1,88	21	7,1
7	40	40	208	320	13,3	6,4	2,07	27	8,0
9	46	46	221	319	10,5	5,9	1,78	19	6,5
10	31	31	224	333	10,8	6,6	1,64	18	5,9
11	34	34	223	337	11,5	5,5	2,10	24	8,5
14	14	14	288	400	9,0	5,6	1,60	14	5,1
16	21	22	269	412	10,3	5,7	1,80	19	5,5
19	31	31	161	377	10,1	5,0	2,00	20	5,3
23	19	52	272	389	10,1	6,0	1,69	17	6,5
24	16	17	275	369	9,8	6,1	1,60	16	5,2
25	21	21	262	n. b.	10,1	5,0	2,00	20	5,3
26	11	11	282	391	9,4	5,8	1,62	15	3,0
28	25	28	240	317	10,6	6,2	1,71	18	3,7
29	34	37	230	330	12,0	6,6	1,82	22	5,8
30	39	39	239	329	9,0	5,6	1,61	14	2,8
31	20	29	238	344	10,9	6,9	1,58	17	7,2
33	31	36	235	367	11,4	6,3	1,81	20	7,5
35	19	19	267	389	10,4	6,5	1,60	17	5,3
36	14	18	287	355	8,3	5,8	1,43	12	5,3
37	19	19	273	366	11,1	5,4	2,06	23	5,6
38	16	18	280	386	10,0	5,5	1,82	18	6,2

Zahlentafel 2. Proben mit Verformungsbruch.
Bewertung erfolgte unter Verwendung der Durchbruchsbiegewinkel.

Probe Nr.	α_1 Grad	α_2 Grad	Hysterese-bereich Grad	Höchst-härte	$a_{k\,\text{längs}}$	$a_{k\,\text{quer}}$	S	$S \cdot a_{k\,\text{längs}}$	$a_{k\,(\text{Graf})}$
1	69	94	210	339	11,9	5,4	2,20	26	8,0
2	29	63	227	320	10,5	6,2	1,70	18	6,8
3	73	73	217	329	11,6	4,6	2,52	29	7,2
4	51	90	213	324	11,0	4,4	2,50	28	6,9
5	63	63	207	313	12,8	6,1	2,10	27	5,2
8	32	86	225	330	13,2	6,2	2,13	28	8,4
12	26	90	253	350	12,0	4,7	2,56	31	8,5
15	26	91	278	381	11,1	4,8	2,32	26	8,2
18	43	93	145	333	14,3	7,1	2,01	29	11,6
20	69	89	168	338	14,2	6,9	2,06	29	12,2
21	49	93	231	321	12,9	5,2	2,49	32	8,1
32	31	93	242	353	11,2	4,6	2,44	27	7,2
34	54	92	205	348	13,2	7,0	1,89	25	9,9

Zahlentafel 2a. Proben mit Mischbruch.

Probe Nr.	α_1 Grad	α_2 Grad	Hysterese-bereich Grad	Höchst-härte	$a_{k\,\text{längs}}$	$a_{k\,\text{quer}}$	S	$S \cdot a_{k\,\text{längs}}$	$a_{k\,(\text{Graf})}$
13	27	94	227	394	10,6	5,2	2,23	26	8,3
17	88	88	191	368	10,8	6,2	1,74	19	9,0
22	45	86	216	316	12,0	5,8	2,07	25	9,7
27	33	36	232	327	10,6	6,8	1,56	17	5,0

[15]) Es handelt sich bei dieser Produktbildung nicht, wie man annehmen könnte, um eine leere Rechenoperation zur Vergrößerung des a_k-Wertes, sondern um die Multiplikation von a_k mit einem Faktor, der der Gefügeanisotropie Rechnung trägt. Dieser Faktor wurde im vorliegenden Falle aus Gründen der Vereinfachung aus dem Quotienten $a_{k\,\text{längs}}/a_{k\,\text{quer}}$ gebildet. Er könnte jedoch ebensogut, und wahrscheinlich in ähnlicher Größenordnung, auch auf anderem Wege, z. B. durch Kerbzugversuche oder Kerbschlagzugversuche, gewonnen werden. Die Dimension der Kerbschlagzähigkeit, mkg/cm², bleibt bei der Produktbildung erhalten.

[16]) W. Kuntze, Stahlbau 14 (1941), S. 97.

Feinkornbehandlung [vorwiegend durch Aluminiumdesoxydation[17]], die neuerdings auch von A. Fry und L. Kirschfeld sowie von H. Hauttmann empfohlen wird (a. a. O.), bietet jedoch eine in jeder Hinsicht größere Sicherheit in Richtung auf die Erreichung des gewünschten Zweckes.

Durch den größeren Keimreichtum des mit Al desoxydierten Stahles wird 1. mit großer Sicherheit eine Verbesserung der Umwandlungskinetik bei Wärmeeinwirkung (d. h. beim Schweißen) im Sinne der oben gemachten Ausführungen erreicht; insbesondere wird auch ohne Vorwärmen mit Sicherheit die Gefahr der Martensitbildung in der wärmebeeinflußten Zone vermieden. 2. Die Sicherheit, mit der nach der Normalglühung der Stähle ein feinkörniges, kerbunempfindliches Gefüge erreicht wird, ist bei den „besonders" erschmolzenen Stählen größer als bei den normal erschmolzenen Stählen. Es wird sehr häufig vergessen, daß die mit der Normalglühung beabsichtigte Wirkung nur erreicht wird, wenn dabei drei Momente berücksichtigt werden: richtige Glühtemperatur, richtige Glühdauer und richtige Abkühlungsgeschwindigkeit. Die beiden ersten Forderungen sind leicht einzuhalten. Schwierigkeiten bereitet dagegen die Einhaltung der richtigen Abkühlungsgeschwindigkeit. Eine kleine Kerbschlagprobe kühlt sich wesentlich schneller an ruhender Luft ab als ein umfangreiches, dickwandiges Stahlprofil. Die mit Al desoxydierten keimreichen Stähle sind gegenüber Schwierigkeiten in der Abkühlung nach der Normalglühung unempfindlicher als die „normal" erschmolzenen Stähle.

Berücksichtigt muß freilich auch immer werden, daß auch die richtige Aluminiumdesoxydation eine Kunst ist, und daß die einfache Zugabe oder Anwesenheit von Aluminium im Stahl noch nicht die Gewähr dafür bietet, daß der gewünschte Effekt auch wirklich erreicht wird. Entscheidend für eine erfolgreiche Aluminiumdesoxydation ist der Zeitpunkt des Al-Zusatzes (besonders im Hinblick auf den zu diesem Zeitpunkt vorhandenen Sauerstoffgehalt des Stahlbades), ferner die richtige Temperatur des Stahlbades und schließlich die Menge des zugesetzten Aluminiums und die Art der Zugabe.

Die Brauchbarkeit der hier entwickelten Prüfgrößen für die Beurteilung von Stählen im Hinblick auf ihre praktische Bewährung, insbesondere in einer geschweißten Konstruktion[18], soll schließlich noch an einigen praktischen Beispielen erläutert werden.

Die Aufstellung der beiden Kenngrößen Δ_T und $S \cdot a_{k\,\text{längs}}$ läßt grundsätzlich vier Kombinationsmöglichkeiten voraussehen:

1. beide Kenngrößen liegen gut;
2. die erste Kenngröße (Δ_T) liegt gut, die zweite ($S \cdot a_k$) dagegen liegt schlecht;
3. die erste Kenngröße liegt schlecht, die zweite liegt gut;
4. beide Kenngrößen liegen schlecht.

Die Fälle 1 und 4 sind augenscheinlich am einfachsten zu beurteilen. Im Fall 1 gibt der Stahl zu keinerlei Beanstandungen Veranlassung, im Fall 4 wird man dagegen die stärksten Bedenken hegen müssen. Der Fall 2 wird häufig beobachtet. Der Stahl zeigt zwar einen günstigen Hysteresebereich, aber die Kerbsicherheit des unveränderten Werkstoffes ist nicht ausreichend. Hier kann mit einiger Sicherheit erwartet werden, daß bei geeigneter Wärmebehandlung eine wesentliche Verbesserung der Kerbsicherheit erreicht wird. Der Fall 3 wurde bisher verhältnismäßig selten beobachtet. Dies hat seinen Grund darin, daß ein umwandlungsträger Stahl auch meist ein sehr grobkörniges, kerbempfindliches Gefüge aufweist, welches nur schwer durch Wärmebehandlung verbessert werden kann.

In der folgenden Zahlentafel 3 sind für einige praktische Fälle die praktische Bewährung und die an kleinen Proben dieser Stähle ermittelten Kenngrößen zusammengestellt und in die Fälle 1 bis 4 eingeordnet. Dabei wurden nicht nur Proben aufgenommen, bei denen Schadensfälle eingetreten waren, oder die sich sonstwie nicht bewährt hatten, sondern es wurden ihnen ähnliche Proben gegenübergestellt, bei denen sich der Stahl bewährt hatte. In allen diesen Fällen war eine Kennzeichnung der Stähle mit Hilfe der hier entwickelten Kenngrößen möglich. Außer fünf Proben von St 52-Stählen enthält die Zusammenstellung noch drei St 37-Stähle; bei diesen dürfte die Kenngröße $S \cdot a_k$ wesentlich allein ausschlaggebend sein, da die Hysteresewerte bei St 37 erfahrungsgemäß und wohl auch aus theoretischen Gründen immer günstig liegen. Beim St 37 kommt freilich noch ein anderes, in der vorliegenden Untersuchung nicht berücksichtigtes Moment hinzu: es ist die Alterungsanfälligkeit des Stahles, die unter Umständen zu erheblichen Störungen Veranlassung geben kann. Hierüber wird zu gegebener Zeit noch an anderer Stelle zu berichten sein (vgl. auch A. Fry und L. Kirschfeld).

Nach den bisherigen Erfahrungen ist es am günstigsten, wenn bei einem zu schweißenden St 52 die Kenngröße Δ_T nicht nennenswert über 220° C liegt. Bei den vorschriftsmäßig mit Aluminium desoxydierten Stählen werden meist nur Hysteresewerte von etwa 100° beobachtet (vgl. Nr. 2 und 3). Hysteresewerte von 250 bis über 300° geben dagegen Veranlassung zu Beanstandungen (vgl. Nr. 1 und 4). Die Größe $S \cdot a_k$ soll möglichst nicht unter 23 kgm/cm² liegen. Bei ausgesprochen schlechten Stählen, d. h. bei Stählen, die in der Bewährung versagten (vgl. Nr. 1, 4 und 5 der Zahlentafel), können diese Werte bis auf 10 mkg/cm² absinken. In besonders günstigen Fällen (vgl. Nr. 3) werden dagegen Werte bis 50 mkg/cm² und darüber beobachtet. Bei den beiden St 37-Beispielen Nr. 7 und 8 sind die höchsten Kerbschlagwerte mit 12,5 und 14,5 nicht sehr voneinander verschieden. Das unterscheidende Merkmal wird erst durch die S-Werte 1,5 (bei Nr. 7) bzw. 2,2 (bei Nr. 8) gebildet, so daß bei der Multiplikation die stark voneinander unterschiedenen Produkte 19 bzw. 32 entstehen. Bei Beispiel und Gegenbeispiel Nr. 2 und 3 rührt dagegen die große Differenz der Produkte $S \cdot a_k$ (20,6 bzw. 50) sowohl von den Unterschieden in den S-Werten (1,7 bzw. 2,5) als auch von den Unterschieden in den a_k-Werten her.

4. Stellungnahme zu der Kritik der Verwendung der Hysteresewerte als Kenngröße in der Arbeit von E. H. Schulz und W. Bischof.

In der bereits erwähnten, in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit von E. H. Schulz und W. Bischof, Werkstofffragen beim Schweißen

[17]) An Stelle von Aluminium könnten auch Sonderkarbidbildner, wie etwa Titan, Vanadin oder Niob, treten, doch handelt es sich hierbei meist um schwer erreichbare Sparmetalle, die außerdem gegenüber dem Aluminium keinen grundsätzlichen Vorteil bieten.

[18]) Eine die Reißempfindlichkeit eines Stahles kennzeichnende Größe, wie etwa $S \cdot a_k$, kann unter Umständen auch für die Kennzeichnung von Stählen Bedeutung erlangen, die in genieteten Konstruktionen Verwendung finden sollen.

Zahlentafel 3. Zusammenhang zwischen den entwickelten Prüfgrößen und der praktischen Bewährung.

Lfd. Nr.	Probenbezeichnung	Art der Beanspruchung	Bewährung	Blechdicke mm	$a_{k\,\text{längs}}$	$a_{k\,\text{quer}}$	S	$S \cdot a_{k\,\text{längs}}$	Δ_T Grad	Bemerkungen
1	Sonderprofil 1 ungeglüht, mit angeschweißten Schottansätzen und Verstärkungslaschen	Zugversuch	Spröder Bruch in der Nähe einer Schweißnaht	rd. 40	6,7 bis 10,7	6,0 bis 8,5	1,2	8 bis 13	280	Fall 4
2	Sonderprofil 2 Cr-Cu-Stahl Zugstab mit Schweißraupen	Zugversuch	Spröder Bruch	rd. 70	12,5	7,6	1,65	20,6	100	Fall 2
3	Sonderprofil 2 Cr-Cu-Stahl Zugstab mit Schweißraupen (Gegenbeispiel)	Zugversuch	Verformungsbruch	rd. 70	19,8	7,8	2,54	50	100	Fall 1
4	Geschweißte Versuchsbrücke	Belastungsversuch	Spröder, vorzeitiger Bruch	rd. 40	9,7	5,5	1,75	17	285	Fall 4
5	Bahnübergang Zoo Hardenbergstraße	Betriebsbeanspruchung	Zahlreiche Risse	rd. 60	6,6	3,3	2,0	13,2	190	Fall 2
6	Albert-Kanal-Brücke Hérenthals—Oolen	Betriebsbeanspruchung	Risse und Bruch	rd. 48	6 bis 12	4,3 bis 4,0	1,5 bis 3,0	9 bis 36	n. b., da St 37	Fall 2
7	Geschweißte Lasche	Schrumpfspannungen	Riß in Nähe der Schweißnaht über 5/6 der Breite	rd. 15	8,5 bis 12,5	7	im Mittel 1,5	12 bis 19	n. b., da St 37	Fall 2
8	Geschweißte Lasche (Gegenbeispiel)	Schrumpfspannungen	Keine Risse	rd. 15	11,8 bis 14,5	6,2	im Mittel 2,2	23 bis 32	n. b. da St 37	Fall 1

dicker Abmessungen von St 52, werden einige früher von mir veröffentlichte Ergebnisse einer Kritik unterzogen, die nicht ohne Widerspruch hingenommen werden kann. Diese Kritik richtet sich in erster Linie gegen die auch in der vorliegenden Veröffentlichung nochmals erläuterte Kenngröße, den Hysteresebereich, als ein Maß zur Kennzeichnung des Verhaltens des St 52 unter der Einwirkung der Schweißwärme und insbesondere im Zusammenhang mit dem Aufschweißbiegeversuch als ein Maß zur Abschätzung des Biegewinkels beim ersten Anriß (α_1).

Hierzu ist folgendes zu bemerken:

1. Die von mir von Anfang an verwendete Definition des Biegewinkels beim ersten Anriß ist in der vorliegenden Arbeit nochmals ausführlich erläutert und begründet worden. Alle früher und jetzt mitgeteilten Ergebnisse beziehen sich nur auf den Biegewinkel α_1 entsprechend dieser Definition: der Biegewinkel α_1 wird dann gemessen, wenn der zunächst in der Schweiße entstehende kleine Anriß sich eben bis in die Übergangszone des Grundwerkstoffes durchgefressen hat, d. h. wenn er eben äußerlich erkennbar etwa 1 bis 2 mm in den Grundwerkstoff neben der Naht eingedrungen ist. Eigene Beobachtungen bestätigen das auch aus Zahlentafel 3 der erwähnten Arbeit von E. H. Schulz und W. Bischof zu entnehmende Ergebnis, daß zwischen dem Hysteresebereich und dem Biegewinkel beim ersten Anriß in der Schweiße keinerlei Zusammenhang besteht. Dieser fehlende Zusammenhang spricht jedoch nicht gegen die Verwendung der Hysteresewerte als Kenngröße, sondern gegen die abweichende Definition des Biegewinkels α_1.

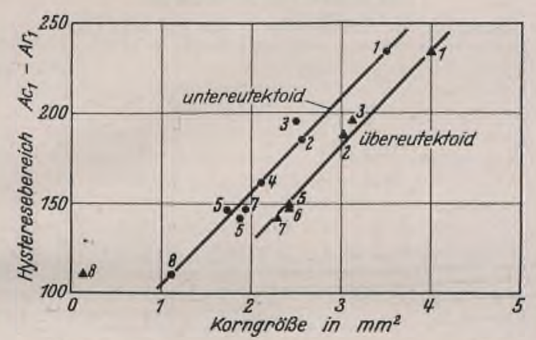


Bild 9. Zusammenhang zwischen Austenitkorngröße und Hysteresebereich (I).

2. In den letzten Spalten der gleichen Zahlentafel 3 sind eine größere Anzahl Hysteresewerte zusammen mit den Ehn-Korngrößen der betreffenden Stähle mitgeteilt. Aus theoretischen Gründen muß zwischen der Ehn-Korngröße und dem Hysteresebereich ein enger Zusammenhang bestehen: Sowohl die Austenitkorngröße (Ehn-Korngröße) als auch der Hysteresebereich hängen in gleicher Weise von der Menge und der Verteilung der Keime im Stahl ab, wobei unter der Korngrößen auf Grund der A. S. T. M.-Skala, ein Verfahren, welches auch in der Technik allgemein üblich ist; doch sind freilich auch die Fehlerstreuungen hierbei größer.

Dieser enge Zusammenhang zwischen Ehn-Korngröße und Hysteresebereich soll noch an zwei weiteren Beispielen belegt werden: Vor längerer Zeit wurden mir von Herrn Prof. Graf fünf Stahlproben mit der Bitte um Bestimmung der Hysteresebereiche nach meinem Verfahren übersandt. Proben der gleichen Stähle wurden auch Herrn Prof. Eilender zur Verfügung gestellt, der an ihnen die Ehn-Korngrößen nach der A. S. T. M.-Skala bestimmen ließ. Die Ergebnisse der völlig unabhängig voneinander ausgeführten Messungen sind in der bekannten, mehrfach erwähnten Arbeit von O. Graf (a. a. O.) veröffentlicht worden. Eine graphische Zusammenstellung dieser Ergebnisse an Hand der Zahlenangaben der Veröffentlichung von O. Graf ist in Bild 10 enthalten. Der erwähnte Zusammenhang zwischen Hysteresebereich und Ehn-Korngröße ist trotz der geringen Probenzahl völlig eindeutig. Schließlich wurden vor einiger Zeit von mir selbst noch einige weitere Messungen ausgeführt, wobei außer den Hysteresebereichen auch die Ehn-Korngrößen entsprechend der A. S. T. M.-Skala bestimmt wurden. Das Ergebnis ist in Bild 11 enthalten. Auch aus diesen Versuchen geht der oben theoretisch vorausgesagte Zusammenhang zwischen Ehn-Korngröße und Hysteresebereich eindeutig hervor.

Wendet man nun das gleiche Verfahren auf die in Zahlentafel 3 der Arbeit von E. H. Schulz und W. Bischof mitgeteilten Ehn-Korngrößen und Hysteresewerte an, so erhält man die in Bild 12 wiedergegebene Zusammenstellung, welche besagt, daß hier zwischen den beiden Größen entweder kein oder nur ein sehr entfernter Zusammenhang besteht. Da nun aber ein solcher Zusammenhang sowohl theoretisch zu erwarten ist, als auch, wie gezeigt, in der Tat vorhanden ist, bleibt nach Bild 12 nur die Schlußfolgerung übrig, daß entweder bei der Bestimmung der Hysteresebereiche oder bei der Bestimmung der Ehn-Korngrößen Fehler unterlaufen sind. Da nun aber die Bestimmung der Ehn-Korngrößen ein in der Stahlindustrie sehr häufig geübtes Verfahren ist, die Bestimmung der Hysteresebereiche jedoch eine Neuerung darstellt, liegt der Schluß nahe, daß die Versuchsfehler wohl bei der Bestimmung der Hysteresewerte zu suchen sind.

Sind aber die Hysteresewerte fehlerhaft, so kann auch kein Zusammenhang mit dem Anrißbiegewinkel gefunden werden, besonders wenn auch die gemessenen Anrißbiegewinkel nicht definitionsgemäß sind.

3. In den Bildern 33 und 34 der genannten Arbeit sind ferner die Hysteresewerte mit den Kerbschlagzähigkeiten des unveränderten Werkstoffes (unter Verwendung der Schlitzkerbprobe) kombiniert, und aus dem hierbei festgestellten fehlenden Zusammenhang der Schluß hergeleitet, daß die Bestimmung der Hysteresewerte kein geeignetes Verfahren zur Erlangung von Kenngrößen ist. Hierzu ist zu bemerken, daß weder jetzt noch in meinen früheren Veröffentlichungen das Vorhandensein eines derartigen Zusammenhanges behauptet worden ist. Ein solcher Zusammenhang kann auch grundsätzlich nicht erwartet werden, was leicht einzusehen ist: Ein sogenannter Feinkornstahl hat beispielsweise vor der Normalglühung eine Kerbschlagzähigkeit von etwa 12 kgm/cm², nach der

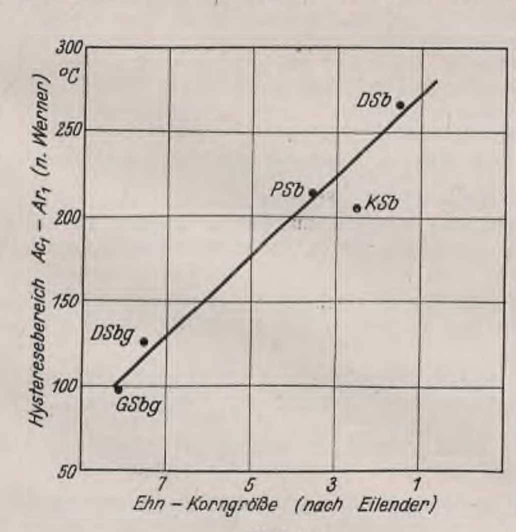


Bild 10.
Zusammenhang zwischen Ehn-Korngröße und Hysteresebereich (II).

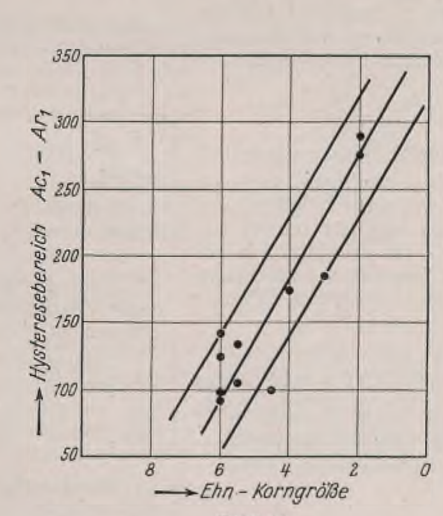


Bild 11.
Zusammenhang zwischen Ehn-Korngröße und Hysteresebereich (III).

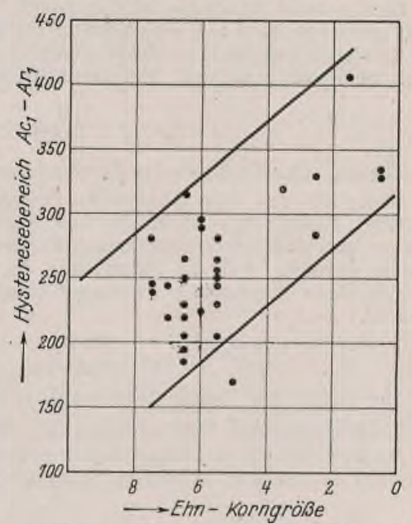


Bild 12. Zusammenhang zwischen Ehn-Korngröße und Hysteresebereich nach E. H. Schulz und W. Bischof.

Keimen neben Sonderkarbiden in erster Linie die oxydischen und gegebenenfalls auch die sulfidischen nichtmetallischen Einschlüsse im Stahl zu verstehen sind. Dieser theoretisch zu erwartende Zusammenhang zwischen Austenitkorngröße und Hysteresebereich wurde bereits in einer meiner ersten Arbeiten auf diesem Gebiet nachgewiesen. Die entsprechende Abbildung soll hier nochmals wiedergegeben werden (vgl. Bild 9). Die außergewöhnlich gute Übereinstimmung zwischen den Austenitkorngrößen (untereutektisch und übereutektisch, ausgedrückt in dem Flächenmaß mm²) und dem Hysteresebereich wurde bei den damaligen Versuchen dadurch erzielt, daß eine sehr große Zahl von Körnern ausplanimetriert und aus den Flächenwerten die Korngröße durch statistische Auswertung erhalten wurde. Dieses Berechnungsverfahren ist jedoch reichlich umständlich; wesentlich einfacher ist die Abschätzung

Normalglühung dagegen infolge der Kornverfeinerung eine solche von etwa 18 kgm/cm². Der Hysteresebereich bleibt jedoch in beiden Fällen unverändert.

Eine Zusammenstellung, wie sie in den Bildern 33 und 34 der erwähnten Arbeit enthalten ist, entbehrt daher jeder praktischen und theoretischen Grundlage. Die gleichen Überlegungen gelten für die Kombination der mit der Kerbschlagzähigkeit parallel laufenden Sekundärkorngröße und der Ehn-Korngröße, die in den Bildern 29 bis 32 der gleichen Arbeit vorgenommen wurde. In allen Fällen ist in diesen Zusammenstellungen der Einfluß einer möglichen Wärmebehandlung, die zwar die Kerbschlagzähigkeit und die Sekundärkorngröße, nicht aber den Hysteresebereich und die Ehn-Korngröße beeinflußt, unberücksichtigt geblieben.

4. Schließlich muß noch darauf hingewiesen werden, daß bei erfolgreich mit Aluminium desoxydierten Stählen nach den Untersuchungen im Staatlichen Materialprüfungsamt ausnahmslos niedrige Hysteresewerte von 90 bis höchstens 170° gefunden wurden. Wie schon in Abschnitt 3 der vorliegenden Arbeit erläutert, beginnt der Gefahrenbereich erst bei Hysteresewerten von wesentlich mehr als 200°. Bei Stählen, die nach zuverlässiger Angabe des Herstellers mit Aluminium desoxydiert worden sind, kann auf die Bestimmung des Hysteresewertes praktisch überhaupt verzichtet werden. Von Bedeutung werden die beiden, in der vorliegenden Arbeit entwickelten Kenngrößen dagegen, wenn es sich um die Kennzeichnung von Stählen unbekannter Herkunft oder um die Beurteilung von Schadensfällen handelt.

Wenn in der genannten Arbeit von E. H. Schulz und W. Bischof bei den mit Aluminium desoxydierten Stählen Hysteresewerte von 345° festgestellt werden, so erscheint ein solcher Befund nach meinen bisherigen Erfahrungen schwer verständlich. Er kann nur auf eine von meinen eigenen Versuchen weitgehend abweichende Art der Versuchsausführung zurückzuführen sein. Derartige Messungen können daher nicht als Beweismaterial gegen meine eigenen Messungen und Überlegungen dienen.

Zuschrift an die Schriftleitung

(Ohne Verantwortung der Schriftleitung)

zum Aufsatz „Die Stabilität der Drei- und Zweigelenkrechteckrahmen mit Eckstreben und Fachwerkriegeln" von Dipl.-Ing. Wilhelm Bültmann, Stahlbau 1941, Heft 6/7.

Zur Bestimmung der Knicklast unsymmetrisch belasteter Zweigelenkrechteckrahmen bemerke ich folgendes:

Auf die Größe der Gesamtknicklast $Q = P_1 + P_2$ hat das Verhältnis der Lasten P_1 und P_2 nur geringen Einfluß, falls beide Kräfte lotrecht bleibend nach abwärts wirken. Man kann daher die Gesamtknicklast wie für den symmetrisch belasteten Rahmen z. B. mit Hilfe der Näherungsformel[1])

$$(1)\quad s_k \approx 2\,h\sqrt{1+0{,}38\,c}, \quad \text{wobei } c = \frac{J_h}{h}\cdot\frac{l}{J_R}, \quad \left[c_{\text{Puwein}} = \frac{1}{c_{\text{Bültmann}}}\right],$$

oder der genaueren Beziehung[2])

$$(2)\quad s_k \doteq 2\,h\sqrt{1+\frac{16+(\pi^2+3\,d)\,c}{48+24\,c}\cdot c}, \quad \text{wobei } d = \frac{H\,l}{2\,P\,h}, \quad H = \text{Horizontalschub},$$

bestimmen und sodann im gegebenen Verhältnis $P_1 : P_2$ auf die Knoten aufteilen. Die tatsächlichen Knicklängen unter den Lasten P_1 und P_2 betragen somit im Sinne der Gl. (1)

$$(3)\quad \begin{cases} s_{k\,1} \approx h\sqrt{2\left(1+\dfrac{P_2}{P_1}\right)}\sqrt{1+0{,}38\,c} \\ s_{k\,2} \approx h\sqrt{2\left(1+\dfrac{P_1}{P_2}\right)}\sqrt{1+0{,}38\,c}. \end{cases}$$

Daher ist mindestens eine der beiden Knicklängen größer als $2\,h$.

Bei unsymmetrischer Belastung liegt übrigens nur dann ein Knickproblem in der strengen Bedeutung des Wortes vor, wenn unter der gegebenen Belastung vor dem Erreichen der Knickgrenze keine waagerechte Bewegung der Knoten erfolgt[3]), was auch bei der Beanspruchung durch Windkräfte bedacht werden muß.

Die gesamte Belastung ist dabei nach dem „Umlast"-Verfahren[4]) in einen symmetrischen und einen antimetrischen Teil zu zerlegen. Nur die dem letzteren zugehörigen Biegemomente wirken fördernd auf das antimetrische Ausknicken und sind daher in die bekannte Näherungsformel

$$\frac{P}{F}\cdot\omega + \frac{M}{W} \leqq s_{\text{zul}}$$

einzuführen. Der Nachweis der Randspannungen bleibt hiervon unberührt.

Bezüglich des von Bültmann behandelten einhüftigen Rahmens mit einer Pendelstütze stelle ich fest, daß das verwandte, allgemeinere Problem des Stockwerkrahmens mit Pendelstützen von mir bereits behandelt wurde[5]). Auf die Möglichkeit $P_2/P_1 \gg 1$ sei mit Hinblick auf die sich dann ergebenden großen Knicklängen besonders aufmerksam gemacht.

Dr.-Ing. M. G. Puwein, Wien.

Erwiderung.

Die Größe der Gesamtknicklast $Q = P_{k\,1} + P_{k\,2} = (1+m)\,P_{k\,1}$ des Zweigelenkrechteckrahmens ergibt sich für $J_r = \infty$ (starrer Riegel) aus Bild 16 bzw. Tabelle 3 meiner Arbeit sofort ohne weitere Überlegungen. Dabei ist es beiläufig nicht von Bedeutung, die Knicklänge $s_{k\,1}$ durch

$$\gamma_1 \approx \sqrt{2\,(1+m)\left(1+\frac{0{,}35}{c}\right)}$$

oder durch

$$\gamma_1 \approx (1{,}43+0{,}57\,m)\sqrt{1+\frac{0{,}35}{c}}, \quad 0 < m < 1,$$

entsprechend der Näherungsformel (7c) anzugleichen, wie Bild 17, in das die exakt ermittelten Beiwerte aufgenommen sind, vermittelt. Dieses Bild 17 habe ich seinerzeit nicht mehr meiner Arbeit beigefügt und die Faustformel auch nicht angegeben, weil der Verlauf der Beiwerte denen nach Bild 3a gleicht und mithin nichts Neues bringt.

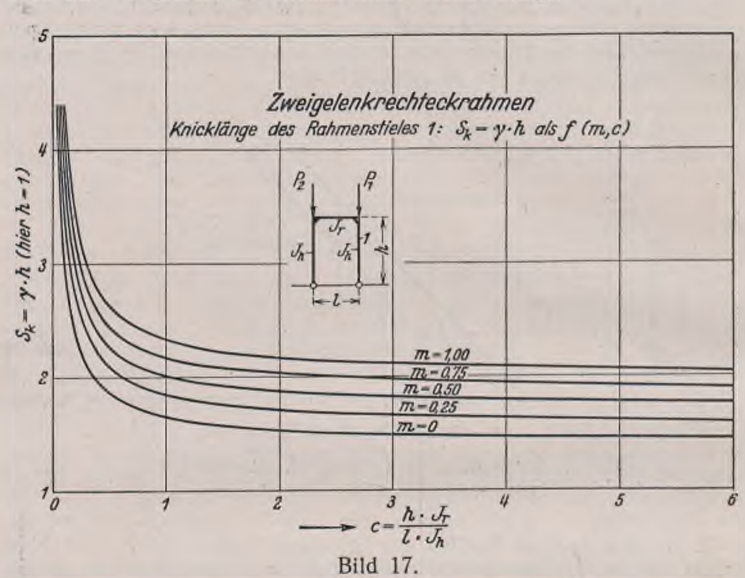


Bild 17.

Man kann allerdings auch die Knicklänge für symmetrische Eckenbelastung

$$\gamma \approx 2\sqrt{1+\frac{0{,}35}{c}}$$

beibehalten und die reduzierte Last

$$P \approx \mu\,P_1 \quad \text{mit} \quad \mu \approx \frac{1+m}{2}$$

der weiteren Rechnung zugrunde legen.

Die Angabe der Knicklänge $s_{k\,2}$ erübrigt sich, da ja voraussetzungsgemäß $P_{k\,2} = m\,P_{k\,1}$ immer kleiner als $P_{k\,1}$ ist.

Betreffs Berücksichtigung der Biegemomente verweise ich auf die Schlußbemerkung meiner Arbeit[6]), die insbesondere auf die Arbeit[3]) hinweisen sollte.

Demnach muß es auch fraglich erscheinen, das antimetrische Knicken unter Vernachlässigung der Biegemomente symmetrischer Belastungen erfassen zu können[7]).

Die Angabe der einfach herzuleitenden Gleichungen (16) und (17) für den Dreigelenkrechteckrahmen erfolgte der Vollständigkeit halber und unabhängig von den Arbeiten[5]) von Puwein schon allein, um dem weniger geübten Statiker deren Herleitung aus Gl. (25) auf S. 8[5]) zu ersparen.

Die Zunahme der Knicklänge mit wachsendem m dürfte kaum klarer und einfacher als in Bild 16 darzustellen sein, denn während $m > 1$ für den Zweigelenkrechteckrahmen zwecklos ist (siehe oben), ist die γ-Kurve für den Dreigelenkrechteckrahmen bei $m > 1$ entsprechend zu verlängern, worauf aber Puwein in [5]) schon hingewiesen hat.

Dipl.-Ing. W. Bültmann, Hamburg.

---

[1]) E. Chwalla und W. Gehler, Erläuterungen zur Begründung des Normblattentwurfs DIN E 4114 und Erläuterungen zur Bemessung von Knickstäben, 1939, I. Teil, S. 16, und II. Teil, S. 25, nach einer ähnlichen Näherungsformel von M. G. Puwein.

[2]) M. G. Puwein, Die Knickfestigkeit des Rechteckrahmens. Bautechn. 1940, Heft 2/3.

[3]) E. Chwalla, Die Stabilität lotrecht belasteter Rechteckrahmen. Bauing. 1938, Heft 5/6 und Fußnote 5.

[4]) M. Mayer, Neue Statik der Tragwerke aus biegungssteifen Stäben, S. 19. Berlin, Bauwelt-Verlag.

[5]) M. G. Puwein, Die Knickfestigkeit des Stockwerkrahmens. Stahlbau 1936, Heft 26; 1937, Heft 1; 1938, Heft 14/15.

[6]) W. Bültmann, Die Stabilität des Dreigelenkrechteckrahmens. Stahlbau 1941, Heft 1/3, S. 3.

[7]) F. Hartmann, Knickung, Kippung, Beulung, S. 96, unten. Leipzig und Wien 1937.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Organ des Arbeitskreises „Stahlbau" der Fachgruppe Bauwesen im NS.-Bund Deutscher Technik

Schriftwaltung: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 7 RM und Postgeld

15. Jahrgang — BERLIN, 3. April 1942 — Heft 8/9

Längsträgerunterbrechungen bei Deckbrücken mit starrer Fahrbahnplatte.

Von Dr.-Ing. Ullrich Thran, Grünberg/Schlesien.

A. Allgemeines.

Die ständig wachsenden Stützweiten der vollwandigen Brückenhauptträger verlangen von dem verantwortungsbewußten Ingenieur auch eine stete Überprüfung aller statischen und konstruktiven Erfahrungen, um sich vor Überraschungen bei der Bauausführung zu sichern. Während es bei den wachsenden Stützweiten und Hauptträgerhöhen zuerst die Stegblechdicken waren, deren Beulsicherheit größere Untersuchungen erforderte, als die Stützweiten etwa die 20 m-Grenze überschritten, mußte sich die Aufmerksamkeit schließlich den Abmessungen der Aussteifungen zuwenden, als auch die 50 m-Grenze überschritten wurde. Und gerade hier sind erst Teilprobleme der Praxis verwendungsfähig gemacht worden. Nachdem heute aber die 100 m-Grenze schon in mehreren Bauausführungen und noch mehr Planungen weit überschritten ist, gewinnen auch konstruktive Fragen wieder an Bedeutung, die bisher nicht bestanden. Zu diesen gehören die Fahrbahnunterbrechungen, die bei Eisenbahnbrücken mit ihrem höheren Anteil an Verkehrslast schon bei kürzeren Brücken selbstverständlich werden, wenn nicht die Längsträger auf den Querträgern verschieblich gelagert sind. Auch etwas anderes kommt noch hinzu. Während früher Straßenbrücken größerer Stützweite fast ausschließlich als Trogbrücken ausgebildet waren, deren Längsträger in größerer Nähe der Hauptträgernullinie liegen, hat sich heute die Deckbrücke mit ihrer freien Sicht von der Fahrbahn durchgesetzt. Solange noch geschweißte Hauptträger mit ihren glatten Oberseiten gebaut wurden, konnte die Fahrbahnplatte mit einer Schmierschicht auf den Hauptträgern gleitend gelagert werden (z. B. Talübergang Rüdersdorf). Nachdem jedoch die bekannten Schäden und die immer dicker werdenden Gurtpakete wieder die genietete Ausführung zu Ehren gebracht haben, besteht der Wunsch, die Obergurte zur Überprüfung und etwaiger Auswechslung von Nieten freizuhalten. Bei der heute üblichen Querschnittsanordnung liegt deshalb die Fahrbahnplatte auf Längsträgern etwa 50 cm über dem Hauptträgerobergurt. Die Längsträger liegen also weit oberhalb der Hauptträgernullinie und müssen an den Verformungen der Hauptträger teilnehmen, wenn nicht die ganze Fahrbahnkonstruktion auf den Hauptträgern beweglich gelagert ist (z. B. Reichsautobahnbrücke über die Havel bei Werder). Bei den folgenden Untersuchungen ist nun angenommen, daß die gesamte ständige Last durch entsprechende Montagevorgänge so aufgebracht wird, daß durch sie keine zusätzlichen Längsträgerbelastungen entstehen. Die Längsträger werden also unter diesen Voraussetzungen nur durch die Verkehrslast und durch Temperaturunterschiede zusätzlich beansprucht. Jedoch sollen auch Temperaturunterschiede in dieser Untersuchung unberücksichtigt bleiben.

Unter der gröbsten Annahme, daß Längs- und Hauptträger als einheitlicher Querschnitt wirken, lassen sich die zusätzlichen Spannungen in den Längsträgern aus Verkehrslast leicht berechnen.

Mit den Querschnittswerten (Bild 1) F_l der Längsträger F_h, J_h und W_h der Hauptträger allein und J und W des zusammengesetzten Querschnitts erhält man, wenn $J_h = \mu F_h \cdot \frac{h^2}{4}$ gesetzt wird, unter Vernachlässigung praktisch kleiner Größen

$$J = J_h + F_l e^2 \cdot \frac{F_h}{F_l + F_h} \quad \text{und} \quad W = \frac{J_h}{e} \cdot \frac{F_l + F_h}{F_h} + F_l e.$$

Ferner ist $W_h = \mu \cdot \frac{F_h h}{2}$, so daß das Verhältnis $\frac{W}{W_h} = \frac{\varphi + 1}{\varepsilon} + \frac{\varphi \varepsilon}{\mu}$

mit den Abkürzungen $\frac{F_l}{F_h} = \varphi$ und $\frac{e}{h/2} = \varepsilon$ wird.

Den Zusammenhang zeigt Bild 2.

In dieser Beziehung kann μ theoretisch zwischen 1/3 (nur Stegblech) und 1,0 (nur Lamellen), praktisch jedoch nur zwischen 0,625 und 0,975 mit dem Mittelwert $\mu = 0,8$ schwanken. Der Wert von φ pflegt bei 0,1 und der Wert von ε zwischen 1,1 bis 1,2 zu liegen.

Die gebräuchlichsten Werte von W/W_h liegen demnach im schraffierten Bereich mit dem Mittelwert $W/W_h \approx 1,1$. Sollte also durch konstruktive Maßnahmen ein geradliniger Spannungsverlauf zwischen Längsträgern und Hauptträgern bestehen, d. h. der Gesamtquerschnitt der längsdurchlaufenden Bauteile einheitlich wirken, so sind die zusätzlichen Spannungen in den Längsträgern aus Verkehrslast um etwa 10 % kleiner als diese Spannungen in den Hauptträgern, wenn sie ohne Berücksichtigung der mittragenden Längsträger bemessen werden. Der Anteil der Verkehrsbelastung beträgt aber selbst bei Reichsautobahnbrücken mit schwerer Fahrbahn — im günstigen Falle also — noch immer rd. 40 % der Gesamtbelastung. Die hier untersuchten Blechträgerbrücken bestehen jedoch stets aus St 52, so daß Zusatzspannungen von etwa 0,70 t/cm² in den Längsträgern auftreten können. Solche Nebenspannungen, die sich zu den Spannungen aus direkter Belastung einfach addieren, können ohne nähere Untersuchung nicht einfach übergangen werden.

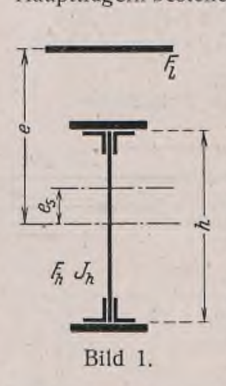


Bild 1.

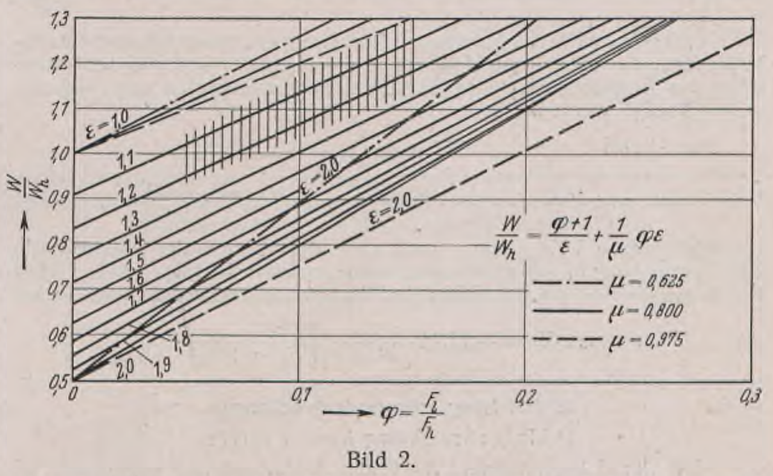


Bild 2.

Wie oben erwähnt, kann geradlinige Spannungsverteilung über den Gesamtquerschnitt nur angenommen werden, wenn durch besondere konstruktive Maßnahmen für einen formänderungsfreien stetigen Übergang der Schubspannungen gesorgt ist. Da diese Maßnahmen jedoch ungewöhnlich sind, sind die Zusatzspannungen der Längsträger im allgemeinen kleiner. Die folgende Untersuchung soll Anhaltspunkte für die Größenordnung dieser Spannungen liefern.

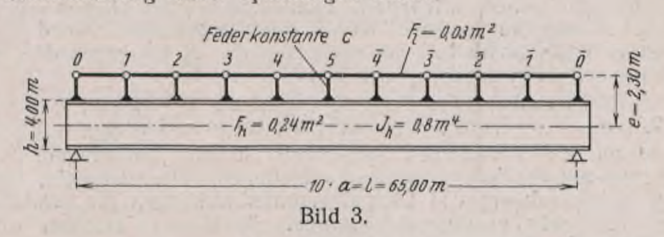


Bild 3.

B. Einfeldbalken.

Die allgemeinen Spannungsverhältnisse seien an folgendem einfachen Beispiel erläutert.

Ein Blechträger von 65,0 m Stützweite und einer Belastung von $g = 10$ t/m und $\varphi p = 5$ t/m ist mit Längsträgern, die in 2,30 m Abstand über seiner Nullinie auf Kragarmen gelagert sind, verbunden. Die Kragarme werden auf dem Hauptträgerobergurt starr eingespannt und die Längsträger an die Kragenden gelenkig angeschlossen gedacht. Die

Kragarme sollen die elastische Verbindung, die sonst durch die Querträger gebildet wird, ersetzen.

Die Bezeichnungen und Abmessungen gehen aus Bild 3 hervor. Als einzige Unbekannte geht in die elastischen Grundgleichungen die Größe der Federkonstante c der Kragarme ein. Von der Oberkante der Hauptträger bis zur Nullinie werden dabei die Kragarme als unendlich starr angesehen, so daß Verformungen nur in dem Teil über der Hauptträgeroberkante auftreten können.

1. Ohne Längsträgerunterbrechungen.

Als Unbestimmte des durch Symmetrie fünffach unbestimmten Systems werden die Stabkräfte in den Längsträgerfeldern mit X_1 bis X_5 eingeführt, wodurch dreigliedrige Gleichungen entstehen.

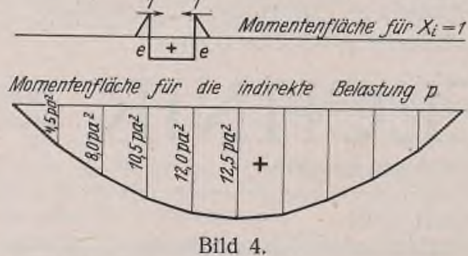


Bild 4.

Die Verschiebungsgrößen lauten:

$$E J \delta_{ii} = \frac{2 E J}{c} + e^2 a + J a \left(\frac{1}{F_h} + \frac{1}{F_b} \right) = \varepsilon$$

$$E J \delta_{i, i+1} = - \frac{E J}{c} = - \alpha$$

$E J \delta_{10} = 2{,}25\, p\, e\, a^3 = 2{,}25\, \beta$ $\quad E J \delta_{40} = 11{,}25\, p\, e\, a^3 = 11{,}25\, \beta$
$E J \delta_{20} = 6{,}25\, p\, e\, a^3 = 6{,}25\, \beta$ $\quad E J \delta_{50} = 12{,}25\, p\, e\, a^3 = 12{,}25\, \beta.$
$E J \delta_{30} = 9{,}25\, p\, e\, a^3 = 9{,}25\, \beta$

Die größte Längsträgernormalkraft wird mit diesen Bezeichnungen

$$\max X = X_5 = \cfrac{-\beta}{\varepsilon - \alpha - \cfrac{\alpha^2}{\varepsilon - \cfrac{\alpha^2}{\varepsilon - \cfrac{\alpha^2}{\varepsilon - \cfrac{\alpha^2}{\varepsilon}}}}} \left[12{,}25 + \cfrac{\alpha}{\varepsilon - \cfrac{\alpha^2}{\varepsilon - \cfrac{\alpha^2}{\varepsilon - \cfrac{\alpha^2}{\varepsilon}}}} \right.$$

$$\left. \cdot \left\{ 11{,}25 + \cfrac{\alpha}{\varepsilon - \cfrac{\alpha^2}{\varepsilon - \cfrac{\alpha^2}{\varepsilon}}} \left[9{,}25 + \cfrac{\alpha}{\varepsilon - \cfrac{\alpha^3}{\varepsilon}} \left(6{,}25 + \frac{\alpha}{\varepsilon} \cdot 2{,}25 \right) \right] \right\} \right].$$

Für $0 \leqq c \leqq 100$ t/m können mit Rechenschiebergenauigkeit die Formänderungen der Längs- und Hauptträger aus Normalkräften und der Hauptträger aus Biegemomenten gegenüber den Formänderungen der Kragarme vernachlässigt werden.

Damit wird
$$\frac{\alpha}{\varepsilon} = \frac{1}{2}$$
und
$$\max X = X_5 = -148{,}75 \cdot \frac{\beta}{\alpha} = -148{,}75 \cdot \frac{p\, e\, a^3}{E J} \cdot c.$$

Für größere Werte von c muß auch der Einfluß der Normalkräfte und Biegemomente auf die Formänderungen berücksichtigt werden. Für $c = \infty$ wird $\alpha = 0$ und die Normalkraft in den Längsträgern am größten mit

$$\max X_5 = -12{,}25 \cdot \frac{p\, e\, a^2}{e^2 + J\left(1/F_h + 1/F_b\right)}.$$

2. Mit Längsträgerunterbrechungen.

a) Unterbrechung in der Mitte.

Wird im Längsträgerfeld 5—4 eine Unterbrechung angeordnet, so sinken die zusätzlichen Spannungen in den Längsträgern schon beträchtlich. Bei kleinen Werten von c wird X_3 hierbei am größten. Bei höheren c-Werten ist X_4 die höchste Normalkraft, während bei sehr hohen Werten von c schließlich X_5 sich bis zum Werte von X_5 bei $c = \infty$ steigert.

b) Unterbrechungen in den Drittelpunkten.

Unterbrechungen in den Feldern 3—4 und 4—3 senken die zusätzlichen Spannungen noch weiter. Hierbei ist bei sehr kleinen c-Werten zunächst X_2 der ungünstigste Wert. Mit wachsendem c wird X_3 und schließlich im Normalfall X_5 am ungünstigsten. X_4 ist wegen der Unterbrechung selbstverständlich gleich Null.

Im Bild 5 sind für das Beispiel $a = 6{,}5$ m; $l = 65{,}0$ m; $h = 4{,}0$ m; $e = 2{,}30$ m; $J_c = 0{,}8$ m⁴; $F_h = 0{,}24$ m²; $F_l = 0{,}03$ m²; $g = 10{,}0$ t/m; $p = 5{,}0$ t/m die zusätzlichen Spannungen in den Längsträgern in Abhängigkeit von der Federkonstante c aufgetragen. Wie man sieht, können durch die Anordnung von Längsträgerunterbrechungen die zusätzlichen Spannungen sehr herabgesetzt werden. Auch ist zu ersehen, welche Bedeutung die Zahl und Lage der Unterbrechungen hat.

C. Federkonstante c.

Aus Bild 5 ist zu ersehen, welche überragende Bedeutung die Größe der Federkonstanten c auf die Zusatzspannungen hat. Ihre Größe ist daher auch das eigentliche Grundproblem. Das elastische Verhalten der Verbindung zwischen Haupt- und Längsträger ist im wesentlichen eine Folge der allgemeinen Querschnittsausbildung. Es kann nur beschränkt durch konstruktive Maßnahmen bei der Ausbildung der Einzelteile be-

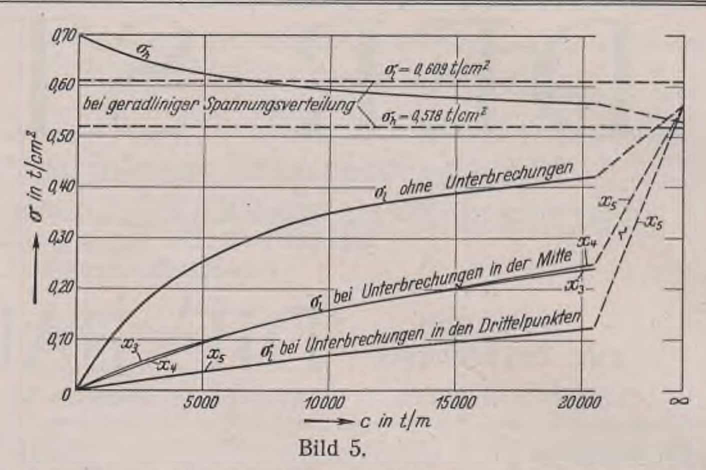


Bild 5.

einflußt werden. Daher ist die ganze Frage von vornherein bei der ersten Planung zu berücksichtigen. Wenn der Querschnitt erst einmal festliegt, ist nicht mehr viel zu ändern. Es gilt also zunächst einmal, die grundsätzlichen Brückenquerschnitte in dieser Hinsicht zu untersuchen

1. Längsträger auf den Querträgern durchlaufend.

Wenn die Oberkanten der Quer- und Hauptträger auf gleicher Höhe liegen, werden die Fußwege von Konsolen getragen (Bild 6). Die Zuglaschen der Konsolen laufen entweder über den Obergurt der Hauptträger zum Querträger, oder durch beiderseitige kräftige Anschlüsse wird das Lamellenpaket selbst zur Zuglasche. Die erforderliche Höhe über dem Hauptträger-Obergurt zur Unterhaltung oder zum Auswechseln der Niete wird dadurch erreicht, daß die Längsträger auf den Querträgern bzw. Konsolen durchlaufen. Die Fahrbahnplatte liegt daher nur auf den Längsträger-Obergurten auf und verhindert deren gegenseitige horizontale Verschiebung in Brückenlängsrichtung, weil sie in ihrer Ebene praktisch als starr anzusprechen ist. Hierdurch werden auch die Querträger-Obergurte an den Anschlußpunkten der Längsträger starr in ihrer ursprünglichen Lage gehalten. Wird also das Tragwerk belastet, so können Verschiebungen zwischen Längs- und Hauptträgern (Abweichungen vom geradlinigen Spannungsverlauf) nur eintreten, wenn die Querträger-Obergurte sich um ihre y-Achse verbiegen.

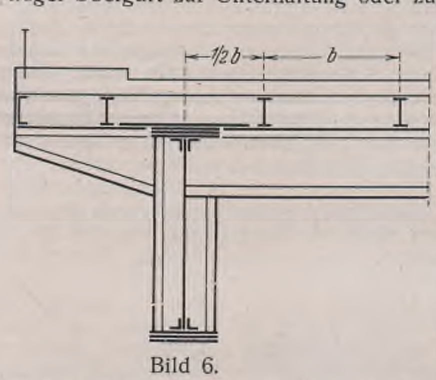


Bild 6.

Der Obergurt des Querträgers verhält sich nach dem Obigen so wie ein durchlaufender Träger auf starren Stützen, dessen eine — der Hauptträger — eine Stützensenkung erfährt. Durch die erwähnte Zuglasche und die erheblich größere Steifigkeit des Hauptträgergurtes muß jedoch der Querträger-Obergurt am Hauptträger starr eingespannt gelten, wenn sich auch als Folge starker Formänderung hier ein plastisches Gelenk ausbilden könnte. Dieses soll dadurch berücksichtigt werden, daß die starre Einspannung in die Achse des Hauptträgers verlegt wird. An zwei Beispielen sollen die etwaigen Grenzen der Federkonstanten betrachtet werden.

Untere Grenze.

Als äußerst günstige Abmessungen werden gewählt:

Längsträgerabstand $b = 3{,}00$ m
Querträger-Obergurt 1 ▬ 220 · 12; 2 ∟ 100 · 10
$J_y = 1842$ cm⁴.

Vom zweiten Längsträger ab wird die Einspannung durch den weiter durchlaufenden Querträger-Obergurt vernachlässigt, so daß das in Bild 7 dargestellte System entsteht. Die Federkonstante beträgt hier $c = 625$ t/m.

Obere Grenze.

Längsträgerabstand $b = 1{,}60$ m
Querträger-Obergurt 2 ▬ 330 · 12; 2 ∟ 130 · 12;
$J_y = 9210$ cm⁴.
Hierbei wird $c = 20\,600$ t/m.

Es ist also ersichtlich, daß c in sehr weiten Grenzen schwanken kann. Irgendwelche Einschnürungen im Querträger-Obergurt, die eine geringere Steifigkeit zur Folge haben sollen, sind jedoch statisch und konstruktiv kaum einwandfrei herzustellen, wenn auch dieser Vorschlag schon häufig ernsthaft in Erwägung gezogen wurde. Grundsätzlich läßt sich die Steifigkeit des Querträger-Obergurtes durch schmale Lamellen und weite Längsträgerteilung erzielen. Aber auch hier sprechen meistens andere Gründe für eine ungünstige Ausbildung.

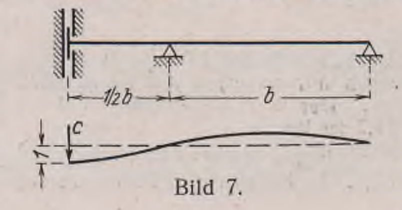


Bild 7.

2. Längsträger in die Querträger eingewinkelt.

Werden die Längsträger in die Querträger eingewinkelt, so werden fast stets die Querträger-Obergurte zur Unterstützung der Fahrbahnplatte mit herangezogen (Bild 8). In diesem Fall sind Querverbiegungen des Querträger-Obergurtes überhaupt nicht mehr möglich, so daß die Stahlkonstruktion nur auf andere Weise elastisch nachgeben kann. Eine Verschiebung des Querträger-Obergurtes, der durch die starre Fahrbahnplatte festgehalten wird, kann gegenüber dem Hauptträger also nur noch durch Verbiegung des über dem Hauptträger liegenden Querträgerstegbleches und der Aussteifungen um die Z-Achse entstehen. Da die Torsionssteifigkeit der I-Träger vernachlässigbar klein ist, bleibt mindestens ein Querträgerteil von der Länge der Hauptträgerlamellenbreite als federnder Querschnitt übrig.

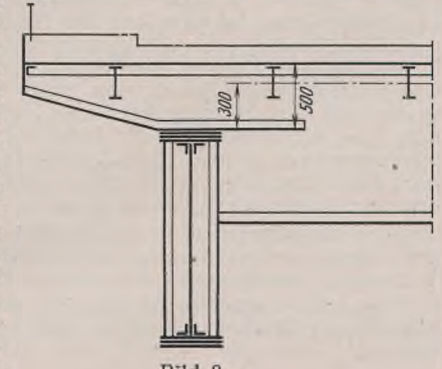


Bild 8.

Die Feder kann hier etwa als ein in der Achse der Längsträger und auf dem Hauptträger-Obergurt starr eingespannter Balken aufgefaßt werden, damit die Mitwirkung der seitlich anschließenden Stegblechteile und die Einspannung durch die Fußwinkel wenigstens roh erfaßt wird. Bei einer Gurtbreite von 1000 mm und 12 mm Stegblechdicke beträgt die Federkonstante (Bild 9) bei 300 mm Kraglänge

$$c = \frac{3EJ}{\left(\frac{l}{2}\right)^3}, \quad J = 14{,}4 \text{ cm}^4, \quad c = 2688 \text{ t/m}.$$

Sind jedoch noch senkrechte Aussteifungen angeordnet, so erhöht sich die Federkonstante beträchtlich. Bei zwei Aussteifungswinkeln L 100 · 100 · 10 mit 10 mm dicken Futtern (Bild 10) wird $J = 1145$ cm⁴, $c = 213\,700$ t/m. Aus diesen Beispielen wird deutlich, wie wichtig die einwandfreie konstruktive Durchbildung ist und wie sehr die Spannungsverhältnisse beeinflußt werden können.

Bild 9. Bild 10.

D. Durchlaufträger.

Während beim Balken auf zwei Stützen die Spannungsverhältnisse und der Einfluß der Fahrbahnunterbrechungen auch gefühlsmäßig richtig abgeschätzt werden können, ist dieses beim Durchlaufträger kaum möglich.

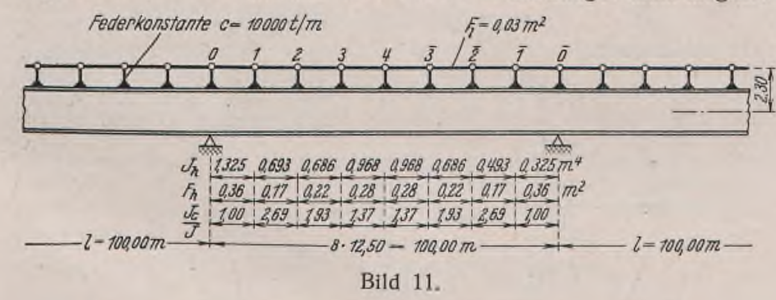


Bild 11.

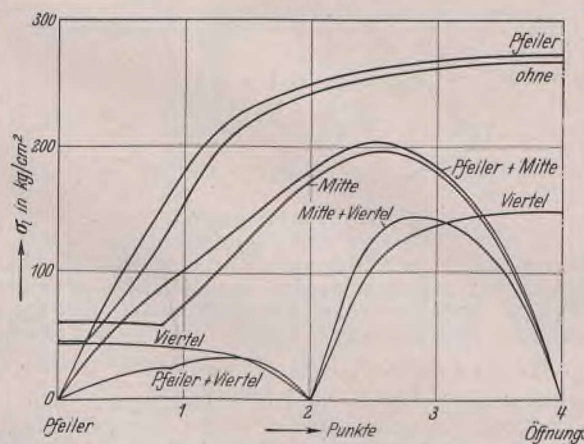


Bild 12. Größte Druckspannungen in den Längsträgern. Unterbrechungen an den bezeichneten Punkten.

Besonders ist es ohne weiteres nicht übersehbar, wie weit sich der Wechsel der Normalspannungsvorzeichen günstig auswirkt und an welchen Stellen Fahrbahnunterbrechungen den größten Nutzen versprechen. Auch dieses soll an einem Beispiel untersucht werden. Hierzu wird ein durchlaufender Träger über unendlich vielen Öffnungen gleicher Stützweite und mit Trägheitsmomenten, die dem Maximalmomentenverlauf angepaßt sind, betrachtet.

Tafel 1.

Spannungen in den Längsträgern (kg/cm²) bei Laststellung für das größte Feldmoment (tm) und Unterbrechungen über

Feld	M	ohne	Pfeiler	Mitte	Viertel	Pfeiler Viertel	Pfeiler Mitte	Viertel Mitte
	−2133							
1		−79	−97	−31	+18	−10	−58	+18
	+601							
2		−218	−229	−126	−20	−31	−142	−20
	+2555							
3		−253	−261	−196	−105	−105	−204	−126
	+3726							
4		−266	−272	−122	−148	−148	−126	−92
	+4117							

Tafel 2.

Spannungen in den Längsträgern (kg/cm²) bei Laststellung für das größte Stützenmoment (tm) und Unterbrechungen über

Feld	M	ohne	Pfeiler	Mitte	Viertel	Pfeiler Viertel	Pfeiler Mitte	Viertel Mitte
	+1718							
1		−44	−17	−59	−43	−19	−24	−43
	+1099							
2		−33	−18	−52	−33	−22	−32	−33
	+479							
3		−1	+8	−29	+2	+2	−18	0
	−140							
4		+36	+41	+9	+10	+10	−4	+4
	−760							

Tafel 3.

Spannungen in den Längsträgern (kg/cm²) bei Laststellung für das kleinste Feldmoment (tm) und Unterbrechungen über

Feld	M	ohne	Pfeiler	Mitte	Viertel	Pfeiler Viertel	Pfeiler Mitte	Viertel Mitte
	−2133							
1		+28	+120	+45	+48	+38	+64	+48
	−2133							
2		+111	+167	+100	+58	+54	+111	+58
	−2133							
3		+141	+179	+99	+66	+66	+105	+44
	−2133							
4		+147	+178	+63	+87	+87	+66	+39
	−2133							

Tafel 4.

Spannungen in den Längsträgern (kg/cm²) bei Laststellung für das kleinste Stützenmoment (tm) und Unterbrechungen über

Feld	M	ohne	Pfeiler	Mitte	Viertel	Pfeiler Viertel	Pfeiler Mitte	Viertel Mitte
	−5984							
1		+97	+38	+122	+110	+49	+49	+110
	−2631							
2		+55	+20	+87	+71	+45	+45	+71
	−57							
3		−24	−47	+23	−42	−42	0	−24
	+1733							
4		−85	−101	−10	−70	−70	−20	−31
	+2744							

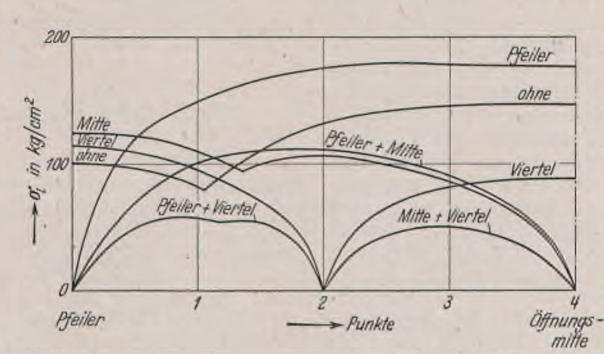


Bild 13. Größte Zugspannungen in den Längsträgern. Unterbrechungen an den bezeichneten Punkten.

Die Abmessungen gehen aus Bild 11 hervor. Untersucht wird öffnungsweise Belastung mit einer Verkehrslast von $p = 5{,}0$ t/m. Für die Federkonstante wird ein Mittelwert von $c = 10\,000$ t/m angenommen. Für die statische Untersuchung erweist es sich als günstig, daß in den Formänderungsbeiwerten δ_{ii} und δ_{ik} das Glied, das die Formänderung der Kragarme umfaßt, so groß wird, daß nur die Glieder der Hauptdiagonale und der anschließenden Schrägreihe im unendlichen Gleichungssystem

berücksichtigt zu werden brauchen. Es entstehen also wieder dreigliedrige Gleichungen. Bei sehr großen Federkonstanten, etwa von $c = 1\,000\,000$ t/m, würde diese Vernachlässigung jedoch ein falsches Bild ergeben. In praktischen Fällen dürfte diese Nährung jedoch ausreichen. Um die Spannungen von der Länge der Längsträgerfelder unabhängig zu machen, die im Beispiel zur Erleichterung der Rechnung sehr groß gewählt wurde, sind die Unterbrechungen konstruktiv so gedacht, daß rechts und links von der Fuge ein Kragarm (Querträger) mit derselben Steifigkeit wie die übrigen angeschlossen ist. Dadurch erhalten beide Felder rechts und links von der Fuge Kräfte, während sonst das Feld, in dem die Fuge liegt, selbstverständlich spannungsfrei ist.

Die positiven und negativen Zusatzspannungen in den Längsträgern bei öffnungsweiser Verkehrsbelastung sind aus den Tafeln 1 bis 4 zu ersehen und sind in Bild 12 und 13 dargestellt. In den Tafeln ist jeweils der Punkt, an dem sich eine Fuge befindet, durch Doppelstrich gekennzeichnet.

In Bild 12 und 13 sind die auftretenden Spannungen zur besseren Anschaulichkeit in der Mitte des Feldes aufgetragen und zu Kurven verbunden, obwohl sie in jedem Feld konstant sind. Man kann sich die Kurven durch sehr enge Querträgerteilung mit den Federkonstanten $c_i = \frac{c}{a} = \frac{10\,000}{12{,}5} = 800$ t/m² entstanden denken.

Allgemein erreichen die Spannungen fast dieselbe Größe wie der entsprechend verkürzte Balken auf zwei Stützen (vgl. Bild 5). Während jedoch beim Träger auf zwei Stützen jede Unterbrechung an beliebiger Stelle die Längsträgerspannungen herabsetzt, ist aus Bild 12 und 13 zu ersehen, daß beim durchlaufenden Träger dieses nicht ohne weiteres der Fall ist. Hier beeinflussen sich vielmehr die wechselnden Spannungsvorzeichen, so daß eine einzige Unterbrechung im positiven Spannungsbereich die Spannungen im negativen erhöht, und umgekehrt. Dies gilt auch für Unterbrechungen in den „Momentennullpunkten" (etwa Fünftelpunkte), da diese je nach dem Belastungsfall (Verkehrslast) keine feste Lage haben bzw. bei Belastung der Nachbaröffnungen nicht vorhanden sind. Unterbrechungen in den Viertelpunkten senken wohl die Spannungen in der Mitte der Öffnung beträchtlich. Die kleineren Spannungen über den Stützen werden jedoch eher etwas erhöht. Will man die Zusatzspannungen wirklich weitgehend ausschalten, so bleibt nur die Möglichkeit, über den Stützen, in der Mitte und in den Viertelpunkten Unterbrechungen anzuordnen. Die Zusatzspannungen erreichen dann zwar noch die Größenordnung von etwa 0,100 t/cm². Sie betragen jedoch nur etwa ein Drittel der Spannungen, die ohne Unterbrechungen entstehen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß nur verhältnismäßig eng angeordnete Unterbrechungen ($\leqq l/4$) wirklichen Erfolg haben. Weitere Teilung als diese kann die Verhältnisse sogar verschlechtern.

Nebenbei verdient Erwähnung, daß durch das Mitrechnen der Längsträger zum tragenden Querschnitt nicht immer die Hauptträger entlastet werden.

In Tafel 1, 2 und 4 ist zu sehen, daß bei positiven Biegemomenten auch positive Längsträgerkräfte auftreten. Der Hauptträger wird hier durch das Nachhinken der Längsträgerkräfte nicht nur nicht entlastet, sondern sogar — wenn auch wenig — belastet. Also auch hierbei ist Vorsicht geboten.

Grundzüge der Kuppelberechnung nach dem Formänderungsverfahren.

Von Dr.-Ing. **Alexis Rudakow**, München.

1. Allgemeines.

Obwohl die Kuppeln zunächst von Schwedler, Zimmermann u. a. als räumliche Fachwerke mit gelenkigen Knoten berechnet wurden, so gehören sie, streng genommen, doch in die Gruppe der räumlichen Rahmentragwerke, weil ja praktisch fast alle Knotenverbindungen steif ausgeführt werden. Nachdem in der neueren Zeit aus ästhetischen Gründen auch die Strebenausfachung vermieden wird, verwandeln sie sich vollends in reine Rahmenkonstruktionen. Diese räumlichen Rahmentragwerke sind hochgradig statisch unbestimmt. Da eine genaue statische Untersuchung im allgemeinen nur für die zyklisch-symmetrischen räumlichen Rahmen durchzuführen ist, wird hier ein solches Gebilde vorausgesetzt. Die Betrachtungen werden an dem Beispiel einer Rahmenkuppel mit geraden Stäben nach Bild 1 angestellt. Sie gelten grundsätzlich auch dann, wenn — unter Wahrung der zyklischen Symmetrie — zwischen den Knoten gekrümmte Stäbe, beliebig geformte Vollwand- oder Fachwerkträger eingefügt sind, oder wenn die Rahmenfelder durch einfache oder gekreuzte Streben ausgefacht sind; ferner ist es für die grundsätzlichen Betrachtungen gleichgültig, ob die Rahmen eingespannt oder gelenkig gelagert sind.

Die allgemeinen Grundlagen des Formänderungsverfahrens in Anwendung auf eingeschossige räumliche Rahmen bzw. Kuppeln wurden in einer früheren Arbeit[1]) des Verfassers eingehend behandelt. Nachfolgend wird das auf mehrgeschossige räumliche Rahmen und Kuppeln erweiterte Verfahren kurz erläutert, das anläßlich der Bearbeitung des Entwurfs für ein bestimmtes Bauvorhaben vom Verfasser im Jahre 1940 entwickelt und in einer Ausarbeitung[2]) ausführlich dargestellt wurde. Dieser Ausarbeitung sind dabei unverändert entnommen sowohl die äußeren Kennzeichen des Verfahrens, wie Bezeichnungen, Bezifferungen, Vorzeichenregeln, als auch seine Grundgedanken, wie systematische Durchführung der reinen Deformationsmethode (Unbekannte nur Formänderungen) für räumliche Tragwerke mit beliebiger Stützenzahl; Berücksichtigung des Einflusses von Normalkräften; Ableitung der allgemeinen Beziehungen zwischen Kräften im Stab und Formänderungen der Knotenpunkte, hierdurch gebrauchsfertige Auswertungsformeln für Modellversuche; gleichzeitige Aufstellung des gesamten Gleichungssystems für die unbekannten Formänderungen; Auflösung der Gleichungen mit Hilfe einfacher Umformungen oder durch Einführung von Formänderungsgruppen.

Bild 1. Rahmenkuppel.

2. Rahmentragwerk.

Das gegebene System sei eine zyklisch-symmetrische Kuppel mit p gleichen Rippen und mit U als regelmäßige p-Ecke ausgebildeten Ringen. Die Rippen werden entgegen dem Uhrzeigersinn mit 1, 2, ... k, ... p ($\equiv 0$), die Ringe von oben nach unten mit I, II, ... R, ... U beziffert. Die Stablängen sind l_R bzw. a_R, und der Zentriwinkel des Ringstabes im Grundriß ist $2\varphi = \frac{2\pi}{p}$. Alle freien Knoten der Kuppel sind steif, die Lagerknoten dagegen sind gelenkig. Die Knotenachsen r, v, t (radial, vertikal, tangential) und ihre positiven Richtungen, durch Doppelpfeile gekennzeichnet, sind in Bild 1 festgelegt. Jedem Rippen- bzw. Ringstab wird eine gerichtete Stablängsachse z bzw. z' zugeordnet; auch die Querschnittshauptachsen x, y bzw. x', y' erhalten positive Richtungen; außerdem werden beim Ringstab noch die Hilfsachsen r' und v' (waagerecht und lotrecht) benutzt. Der Querschnitt und die Trägheitsmomente in einem Rippen- bzw. Ringstab des Ringes R lauten: F_R, J_R^x, J_R^y, J_R^z bzw. F_R', $J_R^{x'}$, $J_R^{y'}$, $J_R^{z'}$. Diese und alle weiteren Bezeichnungen sind aus Bild 1 und 2 ersichtlich.

Bild 2. Bezeichnungen.

Unter äußeren Belastungen sowie infolge Wärmeänderungen und Stützensenkungen erfährt das vorliegende System Knotenverschiebungen und -verdrehungen. Die Knotendrehwinkel um die Achsen r, v, t sind ϱ, ν, τ, und zwar positiv, wenn sie — gesehen in Richtung dieser Achsen — im Uhrzeigersinn drehen (Korkzieherregel); die Knotenverschiebungen sind r, v, t, positiv im Sinne der entsprechenden Achsen. Alle Stabendverdrehungen γ, Stabsehnendrehwinkel ψ sowie Stabendmomente M werden auf die oben eingeführten Achsen bezogen und als positiv festgelegt, wenn die Drehung im Uhrzeigersinn erfolgt. Ferner wird die Querkraft Q positiv gezählt, wenn sie den Stab im Uhrzeigersinn um die Bezugsachse zu verdrehen sucht. Schließlich ist die axiale Stabverlängerung bzw. Zugkraft im Stab positiv zu nehmen.

[1]) A. Rudakow, Berechnung räumlicher Rahmen nach der Deformationsmethode. Stahlbau 1934, S. 25.

[2]) A. Rudakow, Berechnungsmethoden für räumliche symmetrische Stockwerkrahmen und Rahmenkuppeln. — Diese Arbeit wurde im Dezember 1940 als Vervielfältigung in Form eines geschlossenen Heftes herausgegeben und den an der Durchführung des genannten Bauvorhabens beteiligten Stellen zugestellt; sie wurde ferner sonstigen Fachleuten vorgelegt.

3. Grundsystem.

Das „Grundsystem" des Formänderungsverfahrens ist eine Kuppel, bei der alle freien Knoten „starr" sind, d. h. unter den Lasten sich weder drehen noch verschieben können, was im allgemeinen nur durch besondere „Zwangskräfte" erzwungen werden kann. Nach Einführung des Grundsystems zerfällt das vorliegende Tragwerk in einzelne, voneinander unabhängige Stäbe (bzw. Träger oder Scheiben), die jeder für sich elementar berechnet werden. Es sind beiderseits starr eingespannte Träger bzw., wie die Rippenstäbe im untersten Geschoß, Träger mit einseitiger starrer Einspannung. Man bezeichnet diesen Formänderungszustand im Tragwerk als Zustand „alle $\zeta = 0$", wo unter ζ die Verschiebungskomponenten $r, v, t, \varrho, \nu, \tau$ sämtlicher Knoten zu verstehen sind. Die zugehörigen „Zwangskräfte" Z^0, das sind die zur Beseitigung der Knotenverschiebungen und -verdrehungen erforderlichen Knotenlasten und -momente, ergeben sich aus der Berechnung der Einzelstäbe des starren Grundsystems. Sie sind entgegengesetzt gleich den resultierenden am Knoten wirkenden Stabendkräften und -momenten einschließlich der am Knoten unmittelbar angreifenden Kräfte und Momente. Die Berechnung des Grundsystems liefert auch sämtliche inneren Kräfte $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{Q}$ in einem beliebigen Querschnitt, die am „starren" System infolge äußerer Belastungen, Wärmeänderungen und Lagerverschiebungen entstehen.

Nunmehr untersucht man nacheinander die einzelnen Formänderungszustände „$\zeta_{k/R} = 1$", wobei also nur an dem einen Knotenpunkt k/R allein die Verschiebungsgröße $\zeta_{k/R} = 1$ (ζ bezeichnet allgemein r, v, t, ϱ, ν oder τ) erzwungen wird. Infolge dieser Formänderung erhält man in den Stäben, wiederum als einzelne unabhängige Träger unter Einwirkung der Lagerverschiebungen betrachtet, bestimmte innere Kräfte und auch die Kräfte und Momente an den Stabenden. Die letzteren ergeben mit Hilfe der Arbeitsgleichung[3]) die „Zwangskräfte" $Z_{i/Q\,k/R}$ (nachfolgend kurz als Z_{ik} bezeichnet).

4. Grundgleichungen des Formänderungsverfahrens.

Die sechs Verschiebungskomponenten an jedem freien Knoten der Kuppel, drei Verschiebungen r, v, t und drei Verdrehungen ϱ, ν, τ, sind die „Unbekannten" des Verfahrens. Die Gesamtzahl der unbekannten Formänderungsgrößen ist also $6\,pU$[4]). Sie werden aus ebenso vielen „Grundgleichungen", deren formales Anschreiben nach dem bekannten Schema

$$Z_{ia}\,\zeta_a + Z_{ib}\,\zeta_b + \ldots + Z_{ii}\,\zeta_i + \ldots + Z_i^0 = 0$$

mühelos ist, bestimmt. Das sind je sechs Gleichgewichtsbedingungen für die am Knoten angreifenden Kräfte und Momente, jeweils in Richtung der entsprechenden Formänderung ζ_i genommen. Alle Beiwerte Z_{ik} sowie die Belastungsglieder Z_i^0 wurden vorstehend als Zwangskräfte der Formänderungszustände „$\zeta_k = 1$" sowie „$\zeta = 0$", unter Einbeziehung der Anteile aus Normalkräften, ermittelt[5]).

5. Allgemeine Beziehungen.

Für die Berechnung der endgültigen Kräfte und Momente an den Stabenden dienen die Beziehungen zwischen diesen Größen und den Formänderungen $r, v, t, \varrho, \nu, \tau$ bzw. deren Abgeleiteten $\gamma, \psi, \Delta l, \Delta a$. Die Ausdrücke zur Bestimmung der Biege- und Torsionsmomente sind schon früher angegeben[1]). Die Stabendverdrehungen γ können leicht unmittelbar aus Bild 2 abgelesen werden. Es wird nachstehend nur die Ermittlung der Werte Δl, Δa sowie ψ gezeigt und der Ausdruck für ein Biegemoment M^y und die Stabkraft N angeschrieben. Aus Bild 3 und 4 erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\Delta l_{R(R+1)} &= +(r_R - r_{R+1})\sin\varepsilon_R - (v_R - v_{R+1})\cos\varepsilon_R \\
\psi^x_{R(R+1)} &= -\frac{1}{l_R}\left[(r_R - r_{R+1})\cos\varepsilon_R + (v_R - v_{R+1})\sin\varepsilon_R\right] \\
\psi^y_{R(R+1)} &= +\frac{1}{l_R}(t_R - t_{R+1})
\end{aligned}\right\}\ \text{an der Rippe } k,$$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta a_{k(k+1)} &= -\left[(r_k + r_{k+1})\sin\varphi + (t_k - t_{k+1})\cos\varphi\right] \\
\psi^{v'}_{k(k+1)} &= +\frac{1}{a_R}\left[(r_k - r_{k+1})\cos\varphi - (t_k + t_{k+1})\sin\varphi\right] \\
\psi^{r'}_{k(k+1)} &= -\frac{1}{a_R}(v_k - v_{k+1}) \quad \text{und aus Bild 2:} \\
\psi^{x'} = \psi^{r'}\cdot\cos\beta_R - \psi^{v'}\cdot\sin\beta_R&, \quad \psi^{y'} = \psi^{r'}\cdot\sin\beta_R + \psi^{v'}\cdot\cos\beta_R
\end{aligned}\right\}\ \text{am Ring } R.$$

Ein Biegemoment M^y z. B. im Rippenstab $R(R+1)$ der Rippe k am Stabende R ist

$$M^y_{R(R+1)} = \mathfrak{M}^y_{R(R+1)} + 2\cdot\frac{EJ^y_R}{l_R}\left(2\,\gamma^y_{R(R+1)} + \gamma^y_{(R+1)R} - 3\,\psi^y_{R(R+1)}\right), \text{ wo}$$

$$\gamma^y_{R(R+1)} = \varrho_{k/R}\cos\varepsilon_R + \nu_{k/R}\sin\varepsilon_R$$

$$\gamma^y_{(R+1)R} = \varrho_{k/R+1}\cos\varepsilon_R + \nu_{k/R+1}\sin\varepsilon_R, \quad \psi^y_{R(R+1)} = \frac{1}{l_R}(t_R - t_{R+1}).$$

Die Normalkraft N beispielsweise im Rippenstab $R\,(R+1)$ der Rippe k lautet

$$N_{R(R+1)} = \mathfrak{N}_{R(R+1)} + \frac{EF}{l_R}\cdot\Delta l_{R(R+1)}.$$

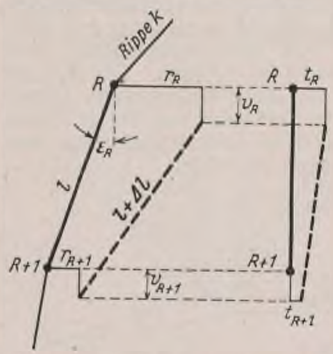


Bild 3. Knotenverschiebungen an der Rippe k.

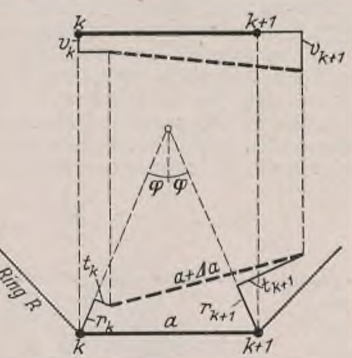


Bild 4. Knotenverschiebungen am Ring R.

Diese allgemeinen Beziehungen stellen gleichzeitig die gebrauchsfertigen Auswertungsformeln dar, falls die Knotenbewegungen nicht aus den Gleichungen berechnet, sondern an einem statischen Modell der Kuppel gemessen sind.

6. Auflösung der Gleichungen.

Wegen der zyklischen Symmetrie des Systems lassen sich die Gleichungen sofort in p unabhängige Gruppen mit je $6\,U$ Hilfsunbekannten umformen. Man erhält dann zwölfgliedrige Gleichungen. Die zahlenmäßige Auswertung ist bei geradem p für $\frac{1}{2}(p+2)$, bei ungeradem p für $\frac{1}{2}(p+1)$ Gruppen durchzuführen. Die Umformung des Gleichungssystems kann entweder mathematisch[6]) oder, wie hier, statisch durch Einführung der Formänderungs-Gruppen ζ', ζ'' an Stelle der Einzel-Formänderungen ζ geschehen. Die neuen Größen ζ', ζ'', die „Hilfsunbekannten", werden durch folgenden Ansatz definiert:

$$\zeta_{n/R} = \sum_i \left(\zeta''_{i/R}\cdot\sin 2\,\varphi\, i\, n \pm \zeta'_{i/R}\cdot\cos 2\,\varphi\, i\, n\right)$$

$$[n = 0, 1, 2, \ldots p-1; \quad R = I, II, \ldots U].$$

Die Summe $\sum_i$ erstreckt sich

bei geradem p über $\quad i = 0, 1, 2 \ldots \frac{p}{2}$,

bei ungeradem p über $\quad i = 0, 1, 2 \ldots \frac{p-1}{2}$;

das positive Vorzeichen in der Klammer gilt für ϱ, ν, t, das negative für τ, r, v.

Ist die Anzahl U der Ringe und damit die Anzahl $6\,U$ der Unbekannten jeder Gruppe sehr groß, so kann es zweckmäßig sein, weiter zu unterteilen. Hierfür gibt es folgende Wege:

Man teilt zunächst alle $6\,p\,U$ Formänderungen in zwei Hauptgruppen (ϱ, ν, t) und (τ, r, v), die teilweise voneinander unabhängig sind (symmetrische und antimetrische Deformationen); sodann führt man dieselbe Berechnung in zwei Stufen mit je $3\,U$ Unbekannten durch.

Man kann ferner das System mit $3\,U$ (bzw. $6\,U$) Unbekannten noch in U Stufen mit je 3 (bzw. 6) Unbekannten nach gleichem Schema auflösen. Dies entspricht der stockwerkweisen Berechnung des Tragwerks. Die größere Einfachheit der stufenweisen Lösung wird jedoch durch die zusätzliche Berechnung sehr vieler Übergangszahlen erkauft.

7. Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird über ein vom Verfasser im Jahre 1940 aufgestelltes Berechnungsverfahren berichtet, das versucht, durch systematische Entwicklung der reinen Formänderungsmethode für räumliche Gebilde die Berechnung dieser verwickelten statischen Systeme einfach und übersichtlich zu gestalten.

Das Verfahren wurde Anfang 1941 von Sachverständigen geprüft und vom zuständigen Ministerium zur Durchführung der statischen Berechnung eines hochgradig statisch unbestimmten Kuppelbauwerks genehmigt. Die bisher durchgeführten Berechnungen, bei denen die Stäbe den tatsächlichen Verhältnissen entsprechend als gekrümmte, rahmenartige oder polygonal geformte Stäbe mit veränderlichen Querschnitten eingeführt wurden, bestätigten die Eignung des Verfahrens für die Praxis.

[3]) Die ausführliche Beschreibung und Ermittlung der Zwangskräfte findet man in der unter Fußnote 1 angegebenen Arbeit.

[4]) $6\,pU$ gilt bei Berücksichtigung des Einflusses von Normalkräften. Ohne diesen Einfluß sinkt die Zahl der Unbekannten auf $4\,pU$, jedoch wird die Bestimmung der Beiwerte verwickelter. Die in Fußnote 2 genannte Ausarbeitung enthält eingehende Untersuchungen von solchen Systemen mit axial undehnbaren Stäben.

[5]) Alle Beiwerte sind in der Ausarbeitung (vgl. Fußnote 2) als gebrauchsfertige Formeln angegeben.

[6]) A. Hertwig, Bauing. 1928, S. 161 u. 181. — L. Mann, Eisenbau 1911, S. 18. — W. Kaufmann, Z. ang. Math. 1921, S. 345.

Graphische Kräfteermittlung am statisch bestimmt gestützten Körper.

Von Prof. Dr.-Ing. habil. Robert Kraus, Shanghai.

(Schluß aus Heft 6/7.)

Seilecke im Raum.

Zur Kräftebestimmung an den Fachwerken Bild 1e, e' und f, f', bei denen ein Körper an fünf und sechs Stellen gestützt ist, reicht die bisher benutzte Methode mit dem Ersatz der Last P durch zwei Seitenkräfte nicht mehr aus. Man geht dazu über, die Last P an einem beliebigen Punkt O ihrer Wirkungslinie durch drei Seitenkräfte zu ersetzen und jede dieser Seitenkräfte mit dem Anteil an Stab- oder Gelenkkräften, der durch sie verursacht wird, ins Gleichgewicht zu bringen. Die Summe der von den drei Seitenkräften der Last P an einem Gelenk verursachten Teilkräfte ist die gesuchte Gelenkkraft. Der Kräfteplan aus den in Teilen gewonnenen und daher bekannten Gelenkkräften muß sich schließen und dadurch die Richtigkeit der Kräftebestimmung bestätigen.

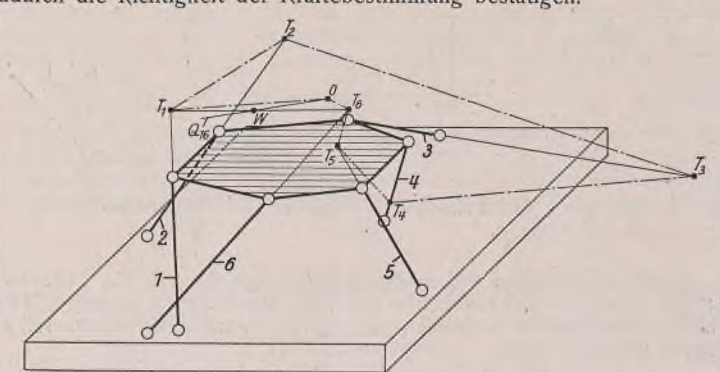


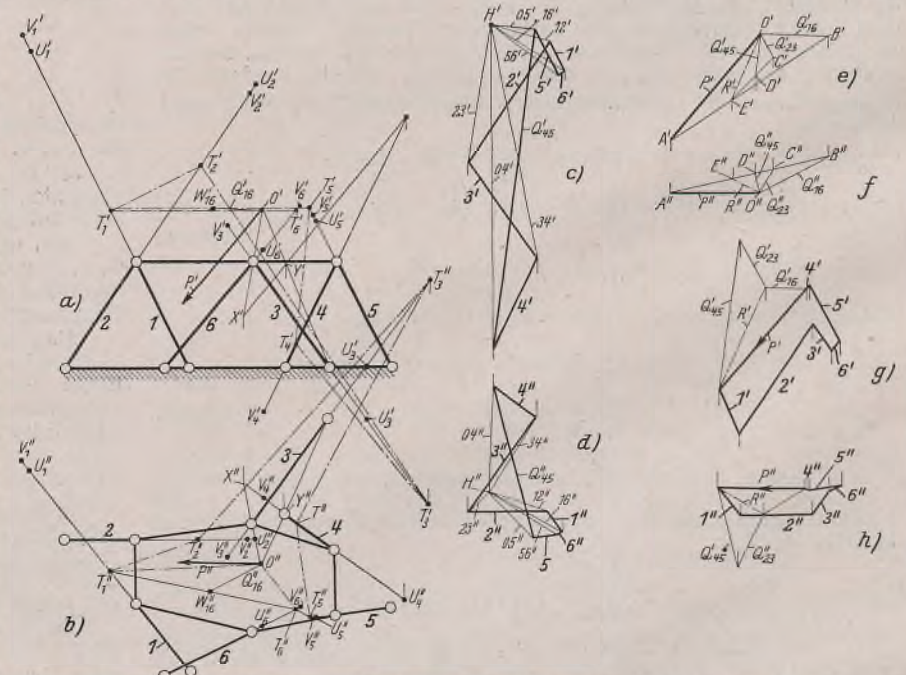
Bild 8. Räumliches Seileck $OT_1 \ldots T_6 O$ für die Körperstützung nach Bild 1f, f'.

Die durch eine Seitenkraft der Last P erzeugten Stabkräfte und die Wirkungslinie dieser Seitenkraft selbst findet man durch Legen eines Seilecks. In Bild 8 ist für eine Seitenkraft Q_{16} vom Punkt O aus ein Seileck $OT_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 O$ gezogen. In der Bezeichnung Q_{16} bedeutet der Zeiger 16, daß die von O ausgehenden Seileckseiten nach den Stäben 1 und 6 gezogen werden sollen. Das Seileck muß die Eigenschaft haben, daß zwei Seiten, die sich in einem Punkt eines Stabes oder der Wirkungslinie eines Gelenkes treffen, in derselben Ebene mit diesem Stab oder der Wirkungslinie liegen. Außerdem müssen die Kräfte der sich in einem Punkt treffenden Seileckseiten mit der durch die Seitenkraft Q_{16} verursachten Stabteilkraft im Gleichgewicht sein, und es müssen schließlich die Gleichgewichtszustände bei zwei aufeinanderfolgenden Stäben mit derselben Kraft des zwischen den Stäben liegenden Seilstückes möglich sein. Mit der einen Last Q_{16} und sechs unbekannten Stabkräften kann man kein Seileck zeichnen, das die Größen dieser sechs Unbekannten angibt. Man muß in diesem Fall in der Weise vorgehen, daß man vom Punkt O aus ohne Rücksicht auf Kräfte ein Seileck durch die Stäbe oder Wirkungslinien legt, wobei die vorhin genannten Eigenschaften eines Seilecks die Konstruktion des Seilecks bestimmen. Da in Bild 8 die Seileckseiten OT_1 und $T_1 T_2$ mit dem Stab 1 in derselben Ebene liegen müssen, legt man von O über den Stab 1 eine Ebene, welche den Stab 2 in dem bestimmbaren Seileckspunkt T_2 trifft. Von T_2 aus legt man die Ebene über Stab 3 und bestimmt ihren Schnittpunkt T_4 mit Stab 4. Von T_4 aus wird die Ebene über Stab 5 gelegt und als ihr Schnittpunkt mit Stab 6 der Seileckspunkt T_6 und damit die Seileckseite OT_6 gefunden. Die Seite OT_6 liegt mit dem Stab 6 und der Seite $T_6 T_5$ in derselben, den Stab 6 enthaltenden Ebene, so daß man von O aus über Stab 6 die Ebene legen muß, um als ihren Schnittpunkt mit Stab 5 den Seileckspunkt T_5 zu finden. Die Ebene von T_5 über Stab 4 ergibt T_3 und die Ebene von T_3 über Stab 2 den Punkt T_1, womit sämtliche Seileckspunkte bekannt sind und das Seileck gezeichnet werden kann. Da das Seileck ohne zugehörigen Kräfteplan vollständig festgelegt wurde, sind im noch zu zeichnenden Kräfteplan keinerlei Annahmen außer der Wahl des Kräftemaßstabes mehr möglich. Durch das Seileck, dessen Gestalt nur von der Wahl des Punktes O abhing, ist auch die Wirkungslinie der Seitenkraft Q_{16} festgelegt, die also nicht gewählt werden kann. Man bestimmt die Wirkungslinie Q_{16}, von der bis jetzt nur der Punkt O bekannt ist, praktisch am besten durch Zeichnung des Kräfteplans mit einer beliebig angenommenen Kraftgröße, weil man diesen Kräfteplan später für die Ermittlung der Teilkräfte der Stabkräfte braucht.

Man wiederholt das geschilderte Verfahren der Legung eines Seilecks von demselben Punkt O aus, z. B. noch für Seitenkräfte Q_{23} und Q_{45}, und ermittelt die Wirkungslinien dieser Seitenkräfte durch Zeichnen der Kräftepläne in beliebigen Maßstäben. Da man nun die Wirkungslinien der drei Seitenkräfte Q kennt, kann man nach dem Culmannschen Verfahren die wirklichen Größen der Seitenkräfte Q aus der gegebenen Last P bestimmen, damit die Maßstäbe für die bereits gezeichneten Kräftepläne festlegen und die Stab- oder Gelenkkräfte durch Summierung der sich aus den einzelnen Kräfteplänen ergebenden Teilkräfte ermitteln. Es empfiehlt sich, mit dem Ergebnis zur Kontrolle der Richtigkeit einen endgültigen Kräfteplan zu zeichnen. Das geschilderte Kräfteermittlungsverfahren durch räumliche Seilecke ist allgemeingültig, erfordert aber die Zeichnung von drei Kräfteplänen in Grund- und Aufriß und wird deshalb in Sonderfällen, die einfacher sind, besser durch andere Verfahren, wie sie eingangs beschrieben wurden, ersetzt.

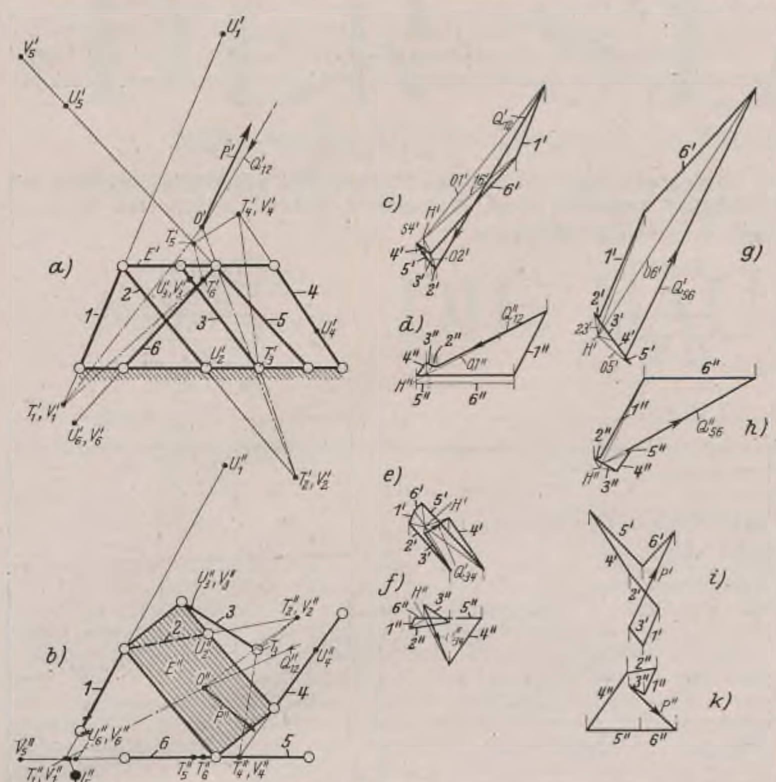
Am Beispiel Bild 9a bis h ist die Ermittlung der Stabkräfte für den allgemeinen Fall des Fachwerks nach Bild 1f durchgeführt. Auf der Wirkungslinie der Last P ist der Punkt O beliebig gewählt und angenommen, daß die Last P durch Seitenkräfte Q_{16}, Q_{23}, Q_{45} ersetzt wird. Demnach sind drei Seilecke zu zeichnen, von denen nach Angabe der Zeiger das erste Seileck von O nach den Stäben 1 und 6, das zweite von O nach den Stäben 2 und 3 und das dritte nach den Stäben 4 und 5 zu legen ist. Die Eckpunkte des ersten Seilecks werden mit T_1 bis T_6, die des zweiten mit U_1 bis U_6 und des dritten mit V_1 bis V_6 bezeichnet. Zur Bestimmung der Punkte T werden Ebenen von O über Stab 1 nach T_2, von T_2 über Stab 3 nach T_4, von T_4 über Stab 5 nach T_6 und rückwärts von O über Stab 6 nach T_5, von T_5 über Stab 4 nach T_3, von T_3 über Stab 2 nach T_1 gelegt, wobei sich die Punkte T als Schnittpunkte der Ebenen mit den betreffenden Stäben ergeben. Das Verfahren der Schnittpunktermittlung ist immer dasselbe und in Bild 9a u. b beispielsweise am Punkt U_4 gezeigt, der der Schnittpunkt der Ebene von O über den Stab 3 mit dem Stab 4 ist. Man zieht im Grundriß von O'' zwei Gerade über zwei Punkte des Stabes 3, wobei man zur Ersparnis von Zeichenarbeit möglichst bekannte Punkte, z. B. die Gelenke, verwendet, bis zum Schnitt X'' und Y'' mit der Projektion der Wirkungslinie des Stabes 4, zieht im Aufriß von O' aus die Strahlen durch die verwendeten Punkte, also z. B. Gelenke des Stabes 3, und projiziert aus dem Grundriß die Punkte X'' und Y'' auf diese Strahlen nach X' und Y'. Die Gerade durch X' und Y' schneidet die Projektion der Wirkungslinie des Stabes 4 im Punkt U_4', dessen Lot in den Grundriß auf Stab 4 den Punkt U_4'' ergibt.

Zu den drei Seilecken werden, ausgehend von den ersten Seileckseiten OT_1, OU_1, OV_1, unter beliebiger Annahme ihrer Größe die Kräftepläne gezeichnet, wofür Bild 9c u. d ein Beispiel darstellt, in dem die Stabkräfte von dem Pol H', H'' ausgehen und mit den Nummern der Stäbe bezeichnet sind, zwischen denen die zugehörige Seileckseite liegt. Die Stabkräfte selbst sind mit den einfachen Stabnummern bezeichnet. Die Kräftepläne ergeben die Lagen der Seitenkräfte Q in Grund- und Aufriß, die in Bild 9a u. b übertragen werden. Man hat hier als erste Kontrolle festzustellen, daß die Wirkungslinie der Seitenkraft Q_{16} in der Ebene $OT_1 T_6$, diejenige der Seitenkraft Q_{23} in der Ebene $OU_2 U_3$, diejenige der Seitenkraft Q_{45} in der Ebene $OV_4 V_5$ liegt, weil zwischen jeder Seitenkraft und den Kräften der anschließenden Seileckseiten Gleichgewicht herrschen muß. Man zieht zu diesem Zweck bei der Seitenkraft Q_{16} die Geraden $T_1' T_6'$ und $T_1'' T_6''$ und beachtet, ob die Schnittpunkte W_{16}', W_{16}'' der Wirkungslinien Q_{16}', Q_{16}'' in der



a) u. b). Auf- und Grundriß des Fachwerks mit den Seilecken T, U, V für die Seitenkräfte Q_{16}, Q_{23}, Q_{45} der Last P.
c) u. d). Kräfteplan der durch die Seitenkraft Q_{45} erzeugten Teilstabkräfte in Auf- und Grundriß.
e) u. f). Ermittlung der Wirkungslinie der Mittelkraft R' zur Bestimmung der drei Seitenkräfte Q nach Culmann.
g) u. h). Ermittlung der Seitenkräfte Q mit Hilfe der Culmannschen Mittelkraft R' und Plan der durch die Last P verursachten Stabkräfte in Auf- und Grundriß.

Bild 9a bis h. Kräfteermittlung durch drei räumliche Seilecke an der Körperstützung nach Bild 1f, f'.



a) u. b). Auf- und Grundriß des Fachwerks.
c) u. d). Plan der durch die Seitenkraft Q_{12} verursachten Teilstabkräfte in Auf- und Grundriß.
e) u. f). Plan der durch die Seitenkraft Q_{34} verursachten Teilstabkräfte in Auf- und Grundriß.
g) u. h). Plan der durch die Seitenkraft Q_{56} verursachten Teilstabkräfte in Auf- und Grundriß.
i) u. k). Plan der durch die Last P verursachen Stabkräfte in Auf- und Grundriß.

Bild 10a bis k. Ermittlung der Stabkräfte durch drei räumliche Seilecke an der Körperstützung nach Bild 1c.

Zeichnung lotrecht übereinanderliegen. In entsprechender Weise werden die Schnittpunkte W_{23}', W_{23}'' und W_{45}', W_{45}'' geprüft.

In Bild 9e u. f ist die Last P mit den Wirkungslinien der Seitenkräfte Q in Auf- und Grundriß dargestellt. An Hand dieser Abbildung wird die Last nach dem Culmannschen Verfahren in der Weise in Seitenkräfte zerlegt, daß im Grundriß durch die z. B. auf P'' und Q_{16}'' beliebig gewählten Punkte A'', B'' die Gerade gezogen wird, die in den Punkten C'', D'' die Wirkungslinien Q_{23}'', Q_{45}'' schneidet. Man projiziert die Punkte A'' bis D'' auf die zugehörigen Wirkungslinien im Aufriß nach A' bis D' und bringt die Geraden $A'B'$ und $C'D'$ im Punkt E' zum Schnitt, wodurch man die Lage der Mittelkraft R' erfährt, deren Projektion im Grundriß die Mittelkraft R'' ist. Mit R' und R'' kann nach Bild 9g u. h der Kräfteplan für die Last P und ihre Seitenkräfte Q gezeichnet werden, deren Größe und Richtungen dadurch bekannt werden. Damit kennt man die Kräftemaßstäbe, mit denen die bereits wie in Bild 9c, d gezeichneten Kräftepläne zu messen sind. Aus den drei Kräfteplänen für die drei Seitenkräfte Q werden die Teilkräfte der Stabkräfte abgemessen und zu denselben Stäben gehörende Teilkräfte summiert. Zur Kontrolle wird mit den Stabkräften der endgültige Kräfteplan in Auf- und Grundriß nach Bild 9g u. h gezeichnet.

In Bild 10a bis k ist die Kräfteermittlung mit räumlichen Seilecken an einem Fachwerk nach Bild 1c durchgeführt, um seine Anwendung, die unverändert bleibt, für die Fälle zu zeigen, in denen zwei Stäbe in einem Gelenk zusammenlaufen. Als Seitenkräfte der Last P sind die Kräfte Q_{12}, Q_{56}, Q_{34} gewählt und wie früher die Seilecke T für Q_{12}, U für Q_{56}, V für Q_{34} ermittelt worden, wobei sich durch die Schnittpunkte der Stabpaare 1, 2 und 5, 6 einige Vereinfachungen in der Seileckermittlung von selbst ergeben. Im Lageplan 10a u. b sind zur Verdeutlichung des Verfahrens die Seitenkraft Q_{12} und das zugehörige Seileck durch die Punkte T eingezeichnet, was an sich nicht nötig ist, da die Kenntnis der Eckpunkte T, U, V zur Zeichnung der Kräftepläne genügt.

a) u. b). Auf- und Grundriß des Fachwerks.
c) u. d). Plan der durch die Seitenkraft Q_6 verursachten Gelenk- und Stabkräfte.
e) u. f). Plan der durch die Seitenkraft Q_{45} verursachten Teilkräfte in den Gelenken und Stäben.
g) u. h). Plan der durch die Seitenkraft Q_{123} verursachten Stabkräfte am Gelenk A.
i) u. k). Plan der durch die Last P verursachten Gelenk- und Stabkräfte.

Bild 11a bis k. Ermittlung der Gelenk- und Stabkräfte durch einfache Seilecksanwendung an einer Körperstützung nach Bild 1a, a'.

Die Kraftepläne Bild 10c, d sowie e, f u. g, h gelten für die Seitenkräfte der Last P, ergeben wie früher deren Wirkungslinien und werden damit aus der Last P nach dem hier nicht gezeichneten Culmannschen Verfahren bestimmt. Die Bestimmung der wahren Einzelkräfte in diesen Kräfteplänen ergibt die Stabkräfte, mit denen zur Kontrolle der endgültige Kräfteplan Bild 10i, k gezeichnet wird.

Bei einem Fachwerk nach Bild 1a benutzt man das Seileck in anderer und einfacherer Weise, wofür Bild 11a bis h ein Beispiel bietet. Das Gelenk A ist fest, das Gelenk B durch einen und Gelenk C durch zwei Stäbe unterstützt. Man ersetzt die Last P im beliebigen Punkt O durch drei Seitenkräfte, von denen die Kraft Q_{123} durch das Gelenk A, Q_6 durch das Gelenk B und Q_{45} durch das Gelenk C geht. Im Gegensatz zu früher ermittelt man, da die Wirkungslinien der Kräfte Q bekannt sind, sofort die wirklichen Seitenkräfte Q und erhält damit Kräftepläne, die maßstäblich sind. Die Kraft Q_{123} wird von dem Gelenk A auf die Stäbe 1, 2, 3 übertragen, wofür mit Hilfe der Culmannschen Mittelkraft R_3 der Kräfteplan Bild 11g, h gezeichnet wird.

Um die von der Kraft Q_6 erzeugten Teilstabkräfte zu finden, werden die Seileckseiten q_1, q_2, q_3 gezogen und zur Zeichnung des Kräfteplans Bild 11c, d verwendet. Zur Kräfteermittlung am Gelenk B wird hierbei die Culmannsche Mittelkraft R_6 verwendet, die in bekannter Weise, wie in Bild 11a, b angedeutet, gefunden wird. Die Seilkräfte q_1, q_2 ergeben im Kräfteplan die durch das Gelenk A gehende Mittelkraft R_0, aus der mit Hilfe der Culmannschen Mittelkraft R_1 die Teilkräfte der Stäbe 1, 2, 3 bestimmt werden.

Die dritte Seitenkraft Q_{45} stützt sich in C auf den Stäben 4, 5 und der Seileckseite q_1 ab, weil diese am Gelenk A einen Festpunkt hat, während in der Seileckseite q_3 wegen der Beweglichkeit des Stabes 6 keine Kraft von C nach B übertragen wird. Daher wird der Kräfteplan Bild 11e, f nur mit der Seileckseite q_1 gezeichnet. Zur Bestimmung der Teilstabkräfte 4, 5 und der Seilkraft q_1 ist die Culmannsche Mittelkraft R_{45} des Gelenkes C zu ermitteln. Am Gelenk A werden aus der Seilkraft q_1 durch die Mittelkraft R_2 die Teilstabkräfte 1, 2, 3 gefunden.

Da die Kräftepläne mit den wirklichen Seitenkräften Q gezeichnet wurden, können die zusammengehörigen Teilkräfte der Stäbe direkt addiert werden. Mit den resultierenden Stabkräften zeichnet man zur Kontrolle den Kräfteplan Bild 11i u. k. Die Kraft 123 ist hierin die Gelenkkraft A, die Kraft 45 die Gelenkkraft C.

Berechnung der X-Kraft bei dem System „Binder auf eingespannten Stützen".

Von Obering. **Hans Fritzen**, Mainz.

Wegen seiner vielfachen Vorzüge wird bei einschiffigen Hallenbauten sehr häufig die in Bild 1 im System dargestellte Konstruktion verwendet. Bei gleichen Stützen links und rechts sind J_u und J_o in den meisten Fällen verschieden groß. Ferner wechselt von Fall zu Fall das Verhältnis $\frac{a}{h}$. Das Stützenunterteil kann Fachwerk oder Vollwand sein. Grundsätzlich gleiche Verhältnisse liegen auch bei mehrschiffigen Hallen, z. B. nach Bild 2, vor.

Wenn auch die Berechnung des einfach statisch unbestimmten Systems an sich keine Schwierigkeiten macht, so legt die häufige Verwendung doch den Wunsch nach einfachen Formeln nahe, zumal wegen der Veränderlichkeit der Trägheitsmomente die Werte für X selten im ersten Rechnungsgang gefunden werden. Ein Weg zur Berechnung ist im Stahlbau-Kalender 1942, S. 292, gezeigt, ohne allerdings fertige Formeln anzugeben. Dies ist aber leicht möglich, wenn man die Unbekannte in der Form $X = -\frac{\delta_{01}}{\delta_{11}}$ ermittelt und dabei folgende Bezeichnungen einführt:

$$a = \beta h \qquad \eta = \frac{J_u}{J_o}$$

$$a' = a \cdot \frac{J_u}{J_o} = \beta \eta h \qquad b = h - a = h(1-\beta).$$

Für alle Belastungsfälle gilt dann als Nennerwert:

$$\delta_{11} = \frac{2}{3} \cdot h^3 [1 + \beta^3(\eta - 1)]. \tag{1}$$

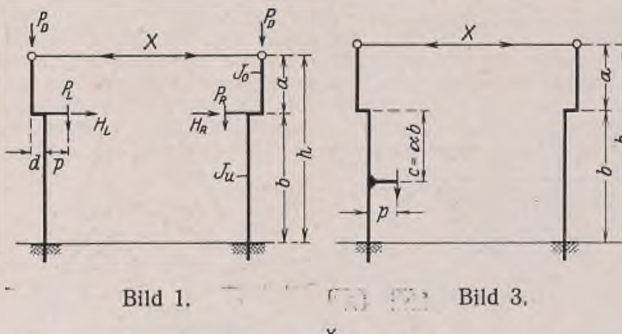


Bild 1. Bild 3.

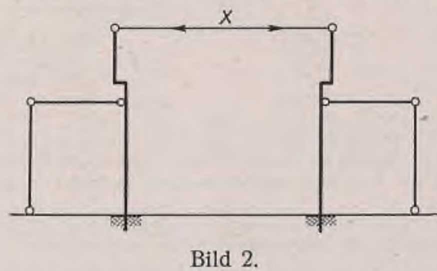


Bild 2.

Für die einzelnen δ_{01}-Werte lassen sich ebenso allgemeine Ausdrücke ableiten. Für die in Bild 3 dargestellte Belastung erhält man z. B.:

$$\delta_{01} = -\frac{P p h^2}{2} [(1-\beta) - \alpha(1-\beta)] \, [(1+\beta) + \alpha(1-\beta)]. \tag{2}$$

Auch für „Horizontalkraft am unteren Stützenteil" kann man den δ_{01}-Wert allgemein errechnen. Doch bringt die Auswertung wegen der vielgestaltigen Verhältnisse keinen Zeitgewinn. Es ist zweckmäßiger, für Sonderfälle, wie z. B. Belastung durch Konsolkran, δ_{01} jeweils besonders zu ermitteln. Anders ist es jedoch in den zumeist vorkommenden Fällen: Belastung durch Kran, Kranschub und Wind. Hierfür seien deshalb die Formeln angegeben.

Fall 1: Kranlast.

Aus Gl. (2) entsteht für $\alpha = 0$ und der in Bild 1 gezeichneten Belastung

$$\delta_{01} = -\frac{h^2}{2}(P_L + P_R p(1-\beta^2)) \tag{3}$$

und in Verbindung mit Gl. (1)

$$X = -\frac{3}{4}(P_L + P_R)\frac{p}{h} \cdot \frac{(1-\beta^2)}{[1+\beta^3(\eta-1)]} = -(P_L + P_R)\frac{p}{h} \cdot y_1. \tag{4}$$

In Tafel 1 sind die Beiwerte y_1 für verschiedene η und β aufgetragen. Die Kurven veranschaulichen den Einfluß der veränderlichen Werte und ermöglichen so, insbesondere beim Entwurf, ein Abschätzen, inwieweit sich X ändert, wenn η nicht mit der ersten Annahme übereinstimmt.

Die Formel kann natürlich auch zur Berechnung des X-Wertes für Dachlasten Verwendung finden, wobei $p = -d$ und $P_L + P_R = 2 P_D$ wird.

Fall 2: Kranschub.

Nimmt man H in der gezeichneten Richtung an, so erhält man:

$$X = -\frac{(H_L - H_R)}{4} \cdot \frac{(2 - 3\beta + \beta^3)}{[1+\beta^3(\eta-1)]} = -(H_L - H_R)\, y_2. \tag{5}$$

In Tafel 2 sind die Beiwerte y_2 in Beziehung zu β und η aufgetragen.

Fall 3: Wind gleichmäßig verteilt.

Wegen der besseren Verteilung der Einspannungsmomente auf die beiden Stützen wird Trennung der Windlast in Druck und Sog vorgenommen, und zwar sind gleich die Werte 64 bzw. 32 kg/m² eingesetzt, die für Höhen bis 20,0 m gelten. Für 1,0 m Belastungsbreite ist dann:

$$X = -\frac{3}{500} \cdot h \cdot \frac{[1+\beta^4(\eta-1)]}{[1+\beta^3(\eta-1)]} = -\frac{3}{500} \cdot h\, y_3. \tag{6}$$

Tafel 3 gibt die Beiwerte.

Kommt noch Wind W_0 auf Dach (Oberlicht) hinzu, so verteilt sich diese Einzellast gleichmäßig auf beide Stützen.

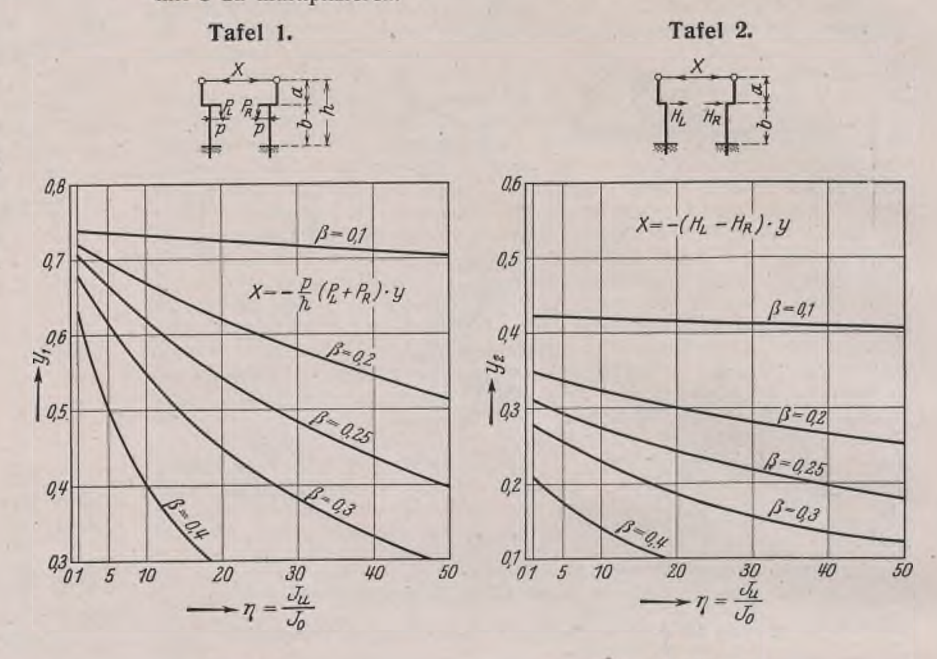
Fall 4: Wind als Einzellast in Kranbahnhöhe eingetragen.

Dieser Fall ist eine Sonderform von Fall 2. Dabei ist $W_{96} = W_{64}' + W_{32}''$ für die zugehörige Belastungsbreite mit 96 kg/m² einzuführen. Beiwerte siehe Tafel 4.

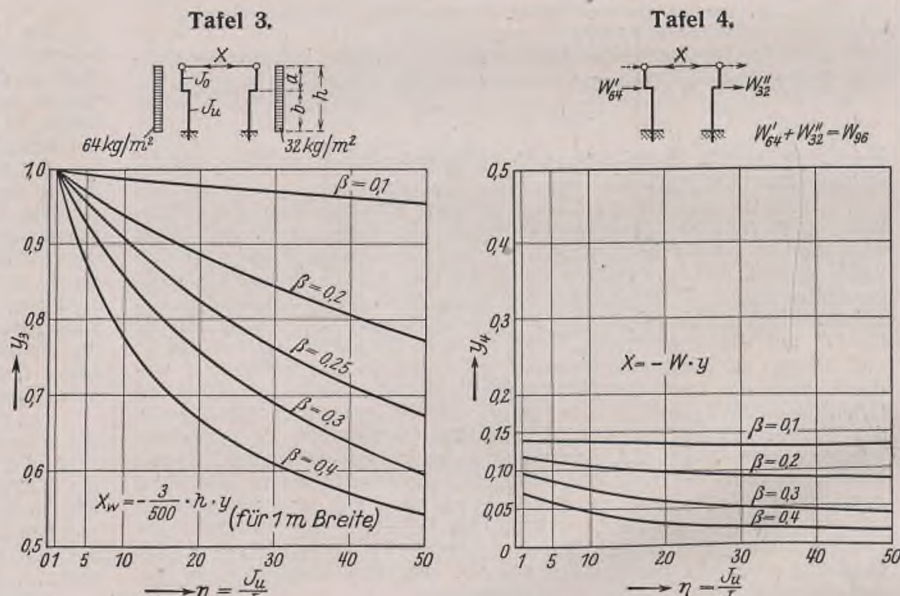
$$X = -\frac{W}{12} \cdot \frac{[2 - 3\beta + \beta^3]}{[1+\beta^3(\eta-1)]} = -W_{96}\, y_4. \tag{7}$$

Bemerkung: Wird in den Fällen 3 und 4 der Wind luvseitig mit 96 kg/m² angesetzt, dann sind die vorstehend berechneten Werte X mit 3 zu multiplizieren.

Tafel 1. Tafel 2.



Tafel 3. Tafel 4.



Berichtigung

zum Aufsatz: „Ein Rechenschema zur Knickberechnung mehrfeldriger beliebig gestützter Druckstäbe und seine Anwendung auf Zahlenbeispiele" von Prof. Dr.-Ing. K. Kriso, Brünn, Stahlbau 1941, Heft 25/26, und 1942, Heft 1/3.

In Gl. (8), Heft 25/26, 1941, S. 118, ist $S^* c^*$ zu ersetzen durch $\frac{S^* c^*}{S_r c_r}$ und in der 5. Zeile der Tabelle 1, S. 122 die Zahlenwerte

0,9834 0,7033 0,7051 0,7357 0,6514 0,5967

zu ersetzen durch die Reziprokwerte

1,0168 1,4218 1,4182 1,3593 1,5351 1,6759.

In Tabelle 1, Heft 1/3, 1942, S. 7, ist $T_r = 2105$ zu ersetzen durch 210,5 t/cm². K. Kriso, Brünn.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Organ des Arbeitskreises „Stahlbau“ der Fachgruppe Bauwesen im NS.-Bund Deutscher Technik

Schriftwaltung: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 7 RM und Postgeld

15. Jahrgang | BERLIN, 8. Mai 1942 | Heft 10/11

Zur Berechnung von Kesselböden.

Von **Maria Eßlinger**, Zweibrücken.

Die Forderung, daß der Übergang vom Kesselboden zum Kesselmantel möglichst allmählich sein soll und daß die Schweißnaht mindestens 10 cm vom Übergang entfernt sein muß, ist für Hochdruckkessel allgemein anerkannt. Bei niedrig beanspruchten Kesseln, Behältern, Luftschleusen usw. geht man der Einfachheit halber von der Idealforderung ab und verschweißt den Mantel mit dem schwach gewölbten Kesselboden unter scharfem Knick. Im folgenden werden für einen Kessel, der durch konstanten Innendruck belastet ist, einfache Formeln abgeleitet zur Bestimmung der Druck- und Biegespannung in der Schweißnaht am Knick zwischen dem zylindrischen Kesselmantel und dem Kesselboden, der als flache Kugelkalotte ausgebildet ist (Bild 1).

Bezeichnungen:

- r = Radius cm,
- s = Wanddicke cm,
- p = Innendruck kg/cm²,
- M = Biegemoment cmkg/cm,
- N = Normalkraft kg/cm,
- Q = Querkraft kg/cm,
- $_z$ = Index des Kesselmantels,
- $_k$ = Index des Kesselbodens,
- $_0$ = Index der Knickstelle,
- x = laufende Ordinate des Kesselmantels cm,
- φ = laufende Ordinate des Kesselbodens,
- E = Elastizitätsmodul $= 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm²,
- ν = Querkontraktionszahl = 1/3.

Weitere Bezeichnungen werden im Text eingeführt und erklärt.

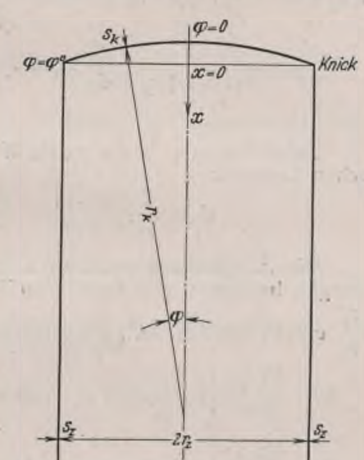


Bild 1. Kessel mit scharfem Knick zwischen Mantel und Boden.

Rechnungsgang: Die Spannungen und Deformationen werden aus der Membrantheorie für Kesselmantel und Kesselboden getrennt bestimmt. Dabei ergeben sich nur Zugspannungen. Die Grenzbedingungen an der Stoßstelle sind nicht erfüllt. Deshalb muß an der Stoßstelle bei Kesselmantel und Kesselboden noch eine Belastung überlagert werden, derart, daß beim Zusammensetzen von Mantel und Boden keine äußeren Kräfte übrigbleiben und daß die Deformationsbedingungen erfüllt sind. Dabei ergeben sich Zug-, Druck-, Biege- und Schubspannungen, die nach der Biegetheorie der Schalen ermittelt werden (s. W. Flügge, Statik und Dynamik der Schalen, Berlin 1934).

Im Kesselmantel wirkt nach der Membrantheorie die tangentiale Zugspannung $\sigma_t = \frac{p\,r_z}{s_z}$ und die axiale Zugspannung $\sigma_a = \frac{p\,r_z}{2\,s_z}$. Die zugehörige Belastung am Zylinderrand ist die axiale Zugkraft, die je cm Umfang $\frac{p\,r_z}{2}$ beträgt; die zugehörige Deformation liefert die tangentiale Dehnung $\varepsilon = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\,\sigma_a) = \frac{5}{6} \cdot \frac{p\,r_z}{E s_z}$. Eine Winkeländerung tritt in keiner Richtung auf (Bild 2).

Im Kesselboden wirkt nach der Membrantheorie in allen Richtungen die tangentiale Zugspannung $\sigma_t = \frac{p\,r_k}{2\,s_k}$. Die zugehörige Belastung am Kalottenrand ist die tangentiale (in Richtung wachsender φ) Zugkraft, die je cm Umfang $\frac{p\,r_k}{2}$ beträgt. Die zugehörige Deformation gibt die tangentiale (in Richtung konstanter φ) Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\sigma_t}{E}(1-\nu) = \frac{1}{3} \cdot \frac{p\,r_k}{E\,s_k}.$$

Eine Winkeländerung tritt in keiner Richtung auf (Bild 2).

Die axiale Zugkraft des Kesselmantels und die Axialkomponente der Kesselbodenbelastung heben sich aus Gleichgewichtsgründen gegenseitig auf. Die Belastung des Kesselbodens senkrecht zur Kesselachse bildet als Ringbelastung eine Gleichgewichtsgruppe, die sich auf Kugelschale und Zylinder derart verteilt, daß an der Stoßstelle die Dehnung gleich und die axiale Winkeländerung entgegengesetzt gleich wird. Dabei wirkt bekanntlich auf den Kesselboden und auf den Kesselmantel an der Stoßstelle ein axiales Biegemoment, das aus Gleichgewichtsgründen entgegengesetzt gleich sein muß.

Bevor wir die Deformationsgleichungen aufstellen, wollen wir für Kesselmantel und Kesselboden getrennt untersuchen, welche Spannungen und Deformationen auftreten, wenn an der Stoßstelle ein axiales Biegemoment und eine Ringbelastung senkrecht zur Kesselachse auftritt. Die Ableitung der Formeln geschieht genau nach den Überlegungen, die in dem Werk von W. Flügge dargestellt sind, so daß wir uns im folgenden darauf beschränken können, den Rechnungsgang kurz zu skizzieren unter Hinweis auf alle Vereinfachungen, die der vorliegende Sonderfall erlaubt.

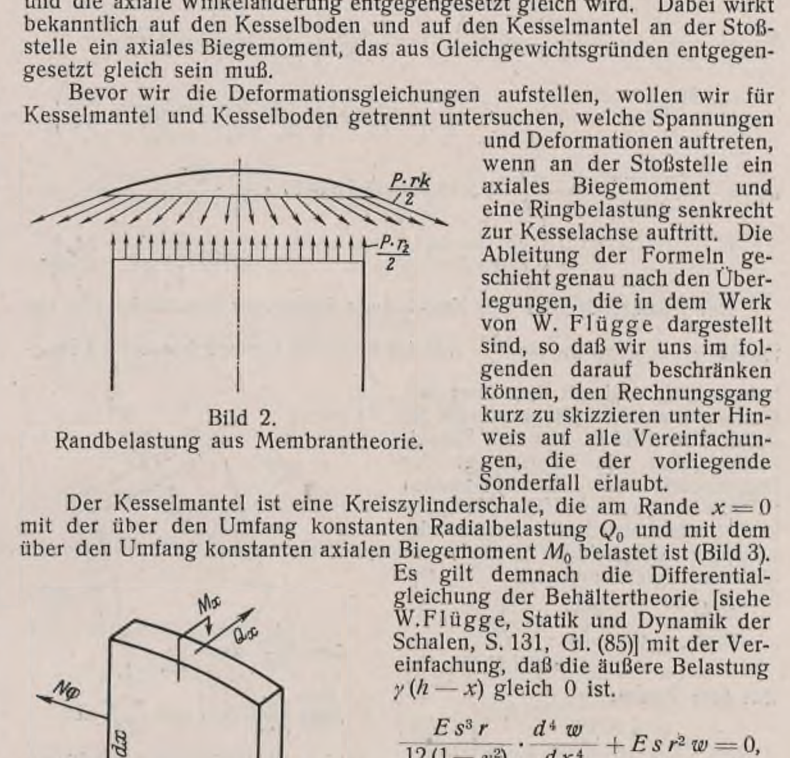


Bild 2. Randbelastung aus Membrantheorie.

Bild 3. Bezeichnungen der Biegetheorie der Kreiszylinderschalen.

Der Kesselmantel ist eine Kreiszylinderschale, die am Rande $x = 0$ mit der über den Umfang konstanten Radialbelastung Q_0 und mit dem über den Umfang konstanten axialen Biegemoment M_0 belastet ist (Bild 3). Es gilt demnach die Differentialgleichung der Behältertheorie [siehe W. Flügge, Statik und Dynamik der Schalen, S. 131, Gl. (85)] mit der Vereinfachung, daß die äußere Belastung $\gamma(h-x)$ gleich 0 ist.

$$\frac{E\,s^3\,r}{12\,(1-\nu^2)} \cdot \frac{d^4 w}{d x^4} + E\,s\,r^2\,w = 0,$$

wobei w die Durchbiegung in Radialrichtung bedeutet.

Für die Lösung der Differentialgleichung machen wir den Ansatz

$$w = c\,e^{\lambda \cdot \frac{x}{r}},$$

wobei λ die Abklinggeschwindigkeit der Randspannungen und c eine Konstante, die durch die Grenzbedingungen bestimmt wird, bedeutet. Die Abklinggeschwindigkeit λ bestimmt sich dabei aus der Gleichung

$$\lambda^4 + 12 \cdot \frac{r_z^{\,2}}{s_z^{\,2}}(1-\nu^2) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1{,}285\sqrt{\frac{r_z}{s_z}} \pm 1{,}285\sqrt{\frac{r_z}{s_z}} \cdot i = -a \pm a\,i$$

$$\lambda_{3,4} = +1{,}285\sqrt{\frac{r_z}{s_z}} \pm 1{,}285\sqrt{\frac{r_z}{s_z}} \cdot i.$$

Die beiden ersten Werte für λ liefern Lösungen w, die vom Schalenrand aus exponentiell abnehmen und für den vorliegenden Fall maßgebend sind; die beiden letzten Werte von λ liefern Lösungen, die vom Schalenrand aus exponentiell anwachsen und für den vorliegenden Fall nicht brauchbar sind. Damit wird unsere endgültige Lösung der Differentialgleichung

$$w = e^{-a\cdot\frac{x}{r_z}}\left[c_1\, e^{ia\cdot\frac{x}{r_z}} + c_2\, e^{-ia\cdot\frac{x}{r_z}}\right] = e^{-kx}\left[A\cdot\cos kx + B\cdot\sin kx\right],$$

wobei $k = \frac{a}{r_z} = \frac{1{,}285}{\sqrt{r_z\, s_z}}$ und A und B neue Integrationskonstanten bedeuten. Damit lauten die Ausdrücke für die inneren Kräfte und für die axiale Winkeländerung unter Vernachlässigung aller von zweiter Ordnung kleinen Größen:

$$N_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2}\cdot\frac{s_z}{r_z}\cdot w = \frac{E}{1-\nu^2}\cdot\frac{s_z}{r_z}\cdot e^{-kx}\left[A\cdot\cos kx + B\cdot\sin kx\right]$$

$$Q_x = \frac{E\, s_z^3}{12(1-\nu^2)}\cdot w''' = \frac{E\, s_z^3}{6(1-\nu^2)}\cdot k^3\, e^{-kx}\left[(A+B)\cos kx + (-A+B)\sin kx\right]$$

$$M_x = \frac{E\, s_z^3}{12(1-\nu^2)}\cdot w'' = \frac{E\, s_z^3}{6(1-\nu^2)}\cdot k^2\, e^{-kx}\left[-B\cdot\cos kx + A\cdot\sin kx\right]$$

$$w' = k\, e^{-kx}\left[(-A+B)\cos kx - (A+B)\sin kx\right]$$

[s. W. Flügge, S. 116, Gl. (69)]. Die Integrationskonstanten A und B werden durch die Grenzbedingungen bestimmt, daß an der Stelle $x = 0$ die Belastungen $-Q_0$ und M_0 angreifen sollen. Dies liefert:

$$A = \frac{6(1-\nu^2)}{k^2 E\, s_z^3}\left(-\frac{Q_0}{k} + M_0\right) \qquad B = -\frac{6(1-\nu^2)}{E\, s_z^3}\cdot\frac{M_0}{k^2}.$$

Wenn man diese Werte in die Gleichungen für N_φ und w' einsetzt, bekommt man die gesuchten Formeln für die tangentiale Dehnung und die axiale Winkeländerung an der Stelle $x = 0$.

$$N_{\varphi_0} = \frac{6}{k^2 s_z^2 r_z}\left(-\frac{Q_0}{k} + M_0\right) = -2{,}8277\sqrt{\frac{r_z}{s_z}}\cdot Q_0 + 3{,}6337\cdot\frac{M_0}{s_z}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{N_{\varphi_0}}{E\, s_z} = \frac{1}{E}\left(-2{,}8277\sqrt{\frac{r_z}{s_z}}\cdot\frac{Q_0}{s_z} + 3{,}6337\cdot\frac{M_0}{s_z^2}\right)$$

$$w_0' = -\frac{6(1-\nu^2)}{k\, E\, s_z^3}\left(-\frac{Q_0}{k} + 2M_0\right) = \frac{1}{E}\left(3{,}3067\cdot\frac{r_z}{s_z}\cdot\frac{Q_0}{s_z} - 8{,}4981\sqrt{\frac{r_z}{s_z}}\cdot\frac{M_0}{s_z^2}\right).$$

Der Kesselboden ist eine Kugelschale konstanter Wanddicke, die am Rande $\varphi = \varphi_0 = \arcsin\frac{r_z}{r_k}$ mit der über den Umfang konstanten Ringbelastung L_0 und mit dem über den Umfang konstanten Biegemoment M_0 belastet ist (Bild 4). Für den Kesselboden gelten die Gleichungen der Biegetheorie der Rotationsschalen (s. W. Flügge, S. 145ff.). Die Querkraft Q setzt sich linear aus den vier Lösungen der beiden Besselschen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + \frac{1}{\varphi}\cdot\frac{dQ}{d\varphi} - \frac{1}{\varphi^2}\cdot Q \pm 2\, i\, k^2 Q = 0$$

mit dem Parameter

$$k = \sqrt[4]{3}\sqrt{\frac{r_k}{s_k}} = 1{,}316\sqrt{\frac{r_k}{s_k}}$$

Bild 4. Bezeichnungen der Biegetheorie der Rotationsschalen.

zusammen. Die Lösungen der beiden Differentialgleichungen sind konjugiert komplex. Da die Belastung in Richtung abnehmender Werte von φ abklingt, kommt für unseren Fall nur die folgende Linearkombination als Lösung in Frage:

$$Q_{(\varphi)} = A_0\, Z_1'\left(k\sqrt{2}\,\varphi\right) + B\, Z_2'\left(k\sqrt{2}\,\varphi\right).$$

Dabei bedeuten A_0 und B_0 Integrationskonstanten und Z_1' und Z_2' die Besselschen Funktionen

$$Z_1' = -\frac{x}{2}\left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!\,2!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{3!\,4!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{5!\,6!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{14}}{7!\,8!}\ldots\right]$$

$$Z_2' = -\frac{x}{2}\left[1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!\,3!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{4!\,5!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{12}}{6!\,7!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{16}}{8!\,9!}\ldots\right] \quad \text{mit } x = k\sqrt{2}\,\varphi.$$

Für Argumente $x = k\sqrt{2}\,\varphi > 6$, wie sie auf Grund der praktischen Ausmaße hier nur in Frage kommen, kann man die bekannten asymptotischen Darstellungen einführen [s. W. Flügge, S. 163, Gl. (114)]

$$Z_1' = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\cdot e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$Z_2' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\cdot e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right).$$

Damit wird die Querkraft

$$Q_{(\varphi)} = A_0\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\cdot e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - B_0\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\cdot e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\cdot\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \frac{e^{k\varphi}}{\sqrt{k\varphi}}\left(\cos k\varphi\cdot\frac{A_0\cdot\cos\frac{\pi}{8} - B_0\cdot\sin\frac{\pi}{8}}{\sqrt{2\sqrt{2}\,\pi}} - \sin kx\cdot\frac{A_0\cdot\sin\frac{\pi}{8} + B_0\cdot\cos\frac{\pi}{8}}{\sqrt{2\sqrt{2}\,\pi}}\right)$$

$$= \frac{e^{k\varphi}}{\sqrt{k\varphi}}\left(A\cdot\cos k\varphi + B\cdot\sin k\varphi\right).$$

Dabei bedeuten A und B neue Integrationskonstanten.

Bei der Bestimmung der übrigen Kräfte und der Deformationen darf, weil die Gleichungen wegen der Näherungsformeln für die Z'-Funktionen nur für den Schalenrand gelten — und da die Störbelastung sehr schnell abklingt, auch nur am Schalenrand interessieren —, $\frac{1}{2\varphi}$ gegenüber k vernachlässigt werden. Außerdem wird 1 gegenüber k vernachlässigt.

$$N_\varphi = -\frac{1}{\varphi}\cdot Q_{(\varphi)} = -\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{e^{k\varphi}}{\sqrt{k\varphi}}\left[A\cdot\cos k\varphi + B\cdot\sin k\varphi\right]$$

$$N_\vartheta = -\frac{dQ}{d\varphi} = -k\cdot\frac{e^{k\varphi}}{\sqrt{k\varphi}}\left[(A+B)\cos k\varphi + (-A+B)\sin k\varphi\right]$$

$$E\, s_k\,\chi = -r_k\, L(Q) - \nu\, Q = 2\,k^2\cdot\frac{e^{k\varphi}}{\sqrt{k\varphi}}\left[-B\cdot\cos k\varphi + A\cdot\sin k\varphi\right]$$

$$M_\varphi = \frac{E\, s_k^3}{12(1-\nu^2)\, r_k}\left(\frac{d\chi}{d\varphi} + \nu\cdot\frac{\chi}{\varphi}\right) = \frac{s^2\, k^3}{6(1-\nu^2)\, r_k}\cdot\frac{e^{k\varphi}}{\sqrt{k\varphi}}\left[(A-B)\cos k\varphi + (A+B)\sin k\varphi\right].$$

Dabei bedeutet χ die axiale Winkeländerung und $L(\,)$ den Meißnerschen Operator

$$L = \frac{1}{r_k}\left[\frac{d^2\ldots}{d\varphi^2} + \frac{d\ldots}{d\varphi}\cdot\operatorname{ctg}\varphi + \ldots\operatorname{ctg}^2\varphi\right].$$

Die Integrationskonstanten A und B werden durch die Grenzbedingungen bestimmt, daß an der Stelle $\varphi = \varphi_0$, wobei φ_0 annähernd durch $\frac{r_z}{r_k}$ ersetzt werden darf, die Belastungen L_0 und M_0 angreifen sollen.

$$A = \frac{\sqrt{k\varphi_0}}{e^{k\varphi_0}}\left[\varphi_0 L_0(\cos k\varphi_0 - \sin k\varphi_0) + \frac{6(1-\nu^2)\, r_k}{s_k^2\, k^3}\cdot M_0\cdot\sin k\varphi_0\right]$$

$$B = \frac{\sqrt{k\varphi_0}}{e^{k\varphi_0}}\left[\varphi_0 L_0(\cos k\varphi_0 + \sin k\varphi_0) - \frac{6(1-\nu^2)\, r_k}{s_k^2\, k^3}\cdot M_0\cdot\cos k\varphi_0\right].$$

Wenn man diese Werte in die Gleichungen für N_ϑ und χ einsetzt, bekommt man die gesuchten Formeln für die tangentiale Dehnung und die axiale Winkeländerung an der Stelle $\varphi = \frac{r_z}{r_k}$.

$$N_{\vartheta_0} = -2\,k\,\varphi_0\, L_0 + \frac{6(1-\nu^2)\, r_k}{s_k^2\, k^3}\cdot M_0 = -2{,}6322\cdot\frac{r_z}{\sqrt{r_k s_k}}\cdot L_0 + 3{,}1522\cdot\frac{M_0}{s_k}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{N_{\vartheta_0}}{E\, s_k} = \frac{1}{E}\left(-2{,}6322\cdot\frac{r_z}{\sqrt{r_k s_k}}\cdot\frac{L_0}{s_k} + 3{,}1522\cdot\frac{M_0}{s_k^2}\right)$$

$$\chi_0 = -\frac{2\,k^2\,\varphi_0}{E\, s_k}\cdot L_0 + \frac{12(1-\nu^2)\, r_k}{E\, s_k^3\, k}\cdot M_0 = \frac{1}{E}\left(-3{,}4642\cdot\frac{r_z}{s_k}\cdot\frac{L_0}{s_k} + 8{,}2972\sqrt{\frac{r_k}{s_k}}\cdot\frac{M_0}{s_k^2}\right).$$

Damit sind die Vorarbeiten zum Aufstellen der Deformationsgleichungen abgeschlossen. Die Ergebnisse werden nochmal zusammengefaßt angeschrieben (Bild 5).

Kesselmantel:

Dehnung nach der Membrantheorie

$$\varepsilon = 0{,}8333\cdot\frac{p\, r_z}{E\, s_z},$$

Dehnung nach der Schalentheorie

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\left(-2{,}8277\sqrt{\frac{r_z}{s_z}}\cdot\frac{Q_0}{s_z} + 3{,}6337\cdot\frac{M_0}{s_z^2}\right),$$

Winkeländerung nach der Schalentheorie

$$w' = \frac{1}{E}\left(3{,}3067 \cdot \frac{r_z}{s_z} \cdot \frac{Q_0}{s_z} - 8{,}4981 \sqrt{\frac{r_z}{s_z}} \cdot \frac{M_0}{s_z^2}\right).$$

Kesselboden:

Dehnung nach der Membrantheorie

$$\varepsilon = 0{,}3333 \cdot \frac{p\, r_k}{E\, s_k},$$

Dehnung nach der Schalentheorie

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\left(-2{,}6322 \cdot \frac{r_z}{\sqrt{r_z s_k}} \cdot \frac{L_0}{s_k} + 3{,}1522 \cdot \frac{M_0}{s_k^2}\right),$$

Winkeländerung nach der Schalentheorie

$$\chi = \frac{1}{E}\left(-3{,}4642 \cdot \frac{r_z}{s_k} \cdot \frac{L_0}{s_k} + 8{,}2972 \sqrt{\frac{r_k}{s_k}} \cdot \frac{M_0}{s_k^2}\right).$$

Die Gleichgewichtsbedingung der Ringbelastung lautet:

$$(1) \qquad Q_0 + L_0 = \frac{p\, r_k}{2} \cdot \cos \varphi_0.$$

Dies kann annähernd gleich $\frac{p\, r_k}{2}$ gesetzt werden, da φ_0 sehr klein ist.

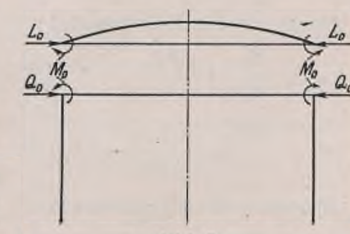


Bild 5.
Randbelastung aus Biegetheorie.

Es bestehen folgende Deformationsbedingungen:

Die tangentiale Dehnung muß an der Stoßstelle bei Kesselmantel und Kesselboden gleich sein, d. h.

$$(2) \qquad 0{,}8333 \cdot \frac{p\, r_z}{s_z} - 2{,}8277 \sqrt{\frac{r_z}{s_z}} \cdot \frac{Q_0}{s_z} + 3{,}6377 \cdot \frac{M_0}{s_z^2}$$
$$= 0{,}3333 \cdot \frac{p\, r_k}{s_k} - 2{,}6322 \cdot \frac{r_z}{\sqrt{r_k s_k}} \cdot \frac{L_0}{s_k} + 3{,}1522 \cdot \frac{M_0}{s_k^2}.$$

Die Winkeländerung muß an der Stoßstelle bei Kesselmantel und Kesselboden entgegengesetzt gleich sein.

$$(3) \qquad 3{,}3067 \cdot \frac{r_z}{s_z} \cdot \frac{Q_0}{s_z} - 8{,}4981 \sqrt{\frac{r_z}{s_z}} \cdot \frac{M_0}{s_z^2}$$
$$= -3{,}4642 \cdot \frac{r_z}{s_k} \cdot \frac{L_0}{s_k} + 8{,}2971 \sqrt{\frac{r_k}{s_k}} \cdot \frac{M_0}{s_k^2}.$$

Aus den drei linearen Gleichungen (1), (2) und (3) ergeben sich für die Unbekannten Q_0, L_0 und M_0 folgende Werte:

$$Q_0 = \frac{p_1 l_2 - p_2}{l_2 - q_2} \cdot p\, r_z,$$

$$L_0 = \frac{p_2 - q_2 p_1}{l_2 - q_2} \cdot p\, r_z,$$

$$M_0 = \frac{p_2 (l_1 - q_1) + p_1 (q_1 l_2 - l_1 q_2)}{l_2 - q_2} \cdot p\, r_z,$$

wobei

$$l_1 = \frac{s_z^2 \sqrt{s_k s_z}}{2{,}3951 \sqrt{r_k s_z}\, s_z^2 + 2{,}4531 \sqrt{r_z s_k}\, s_k^2}$$

$$q_1 = \frac{s_k^2 \sqrt{s_k s_z}}{2{,}5092 \sqrt{r_k s_z}\, s_z^2 + 2{,}5700 \sqrt{r_z s_k}\, s_k^2}$$

$$l_2 = 2{,}6322 \cdot \frac{r_z}{\sqrt{r_k s_k}} + 3{,}6377 \cdot \frac{r_z s_k}{s_z^2} \cdot l_1 - 3{,}1522 \cdot \frac{r_z}{s_k} \cdot l_1$$

$$q_2 = -2{,}8277 \sqrt{\frac{r_z}{s_z}} \cdot \frac{s_k}{s_z} + 3{,}6377 \cdot \frac{r_z s_k}{s_z^2} \cdot q_1 - 3{,}1522 \cdot \frac{r_z}{s_k} \cdot q_1$$

$$p_1 = \frac{r_k}{2\, r_z},$$

$$p_2 = -0{,}8333 \cdot \frac{s_k}{s_z} + 0{,}3333 \cdot \frac{r_k}{r_z}.$$

Damit sind die Formeln zur Berechnung der Spannungen im ganzen Kessel gegeben. Ihre Anwendung wird an einem Zahlenbeispiel gezeigt.

Die Formeln gelten nur für Kesselböden, die so flach sind, daß man $\operatorname{ctg} \varphi_0 = \frac{1}{\varphi_0} = \frac{r_k}{r_z}$ setzen kann, und die so dünnwandig und so weit gewölbt sind, daß man 1 und $\frac{1}{2\varphi_0} = \frac{r_k}{2\, r_z}$ gegenüber $k = 1{,}316 \sqrt{\frac{r_k}{s_k}}$ vernachlässigen darf, und daß $k\sqrt{2}\,\varphi_0 = k\sqrt{2} \cdot \frac{r_z}{r_k} > 6$ ist.

Zahlenbeispiel: Gegeben ist ein Kessel mit 1 cm Wanddicke und 1 atü innerem Überdruck; Radius des Kesselmantels $r_z = 100$ cm, Radius des Kesselbodens $r_k = 300$ cm. Gesucht sind die Spannungen!

$$k = 1{,}316 \sqrt{\frac{r_k}{s_k}} = 1{,}316 \sqrt{300} = 22{,}8$$

$$\varphi_0 = \frac{r_z}{r_k} = \frac{1}{3}.$$

Die Bedingungen $\operatorname{ctg} \frac{r_z}{r_k} = 0{,}2888 = \sim \frac{1}{3}$, $\frac{r_k}{2\, r_z} = 1{,}5 \ll 22{,}8$ und $k\sqrt{2} \cdot \frac{r_z}{r_k} = 10{,}75 > 6$ sind erfüllt; die oben abgeleiteten Formeln dürfen verwendet werden.

$$l_1 = \frac{1}{2{,}40 \sqrt{300} + 2{,}45 \sqrt{100}} = 0{,}015\,16$$

$$q_1 = \frac{1}{2{,}51 \sqrt{300} + 2{,}57 \sqrt{100}} = 0{,}014\,43$$

$$l_2 = 2{,}63 \cdot \frac{100}{\sqrt{300}} + 3{,}64 \cdot 100 \cdot 0{,}015\,16 - 3{,}15 \cdot 100 \cdot 0{,}015\,16 = 15{,}94$$

$$q_2 = -2{,}83 \sqrt{100} + 3{,}64 \cdot 100 \cdot 0{,}014\,43 - 3{,}15 \cdot 100 \cdot 0{,}014\,43 = -27{,}74$$

$$p_1 = \frac{300}{2 \cdot 100} = 1{,}5$$

$$p_2 = -0{,}83 + 0{,}33 \cdot \frac{300}{100} = 0{,}17$$

$$Q_0 = \frac{1{,}5 \cdot 15{,}94 - 0{,}17}{15{,}94 + 27{,}74} = 54{,}3 \text{ kg/cm}$$

$$L_0 = \frac{0{,}17 + 1{,}5 \cdot 27{,}74}{15{,}94 + 27{,}74} = 95{,}6 \text{ kg/cm}$$

$$M_0 = \frac{0{,}17\,(0{,}015\,16 - 0{,}014\,43) + 1{,}5\,(0{,}015\,16 \cdot 27{,}74 + 0{,}014\,43 \cdot 15{,}94)}{15{,}94 + 27{,}74} \cdot 1 \cdot 100^2 = 223{,}5 \text{ cmkg/cm}.$$

Tangentialspannung am Knick:

Kesselmantel

$$\sigma_t = \frac{N \varphi_0}{s_0} + \frac{p\, r_z}{s_0} = -2{,}8277 \sqrt{\frac{r_z}{s_z}} \cdot \frac{Q_0}{s_0} + 3{,}6337 \cdot \frac{M_0}{s_z s_0} + \frac{p\, r_z}{s_0} = -620 \text{ kg/cm}^2,$$

Kesselboden

$$\sigma_t = \frac{N \vartheta_0}{s_0} + \frac{p\, r_k}{2\, s_0} = -2{,}6322 \cdot \frac{r_z}{\sqrt{r_k s_k}} \cdot \frac{L_0}{s_0} + 3{,}1522 \cdot \frac{M_0}{s_k s_0} + \frac{p\, r_k}{2\, s_0} = -600 \text{ kg/cm}^2.$$

Axialspannung am Knick:

Kesselmantel

$$\sigma_a = \frac{6\, M_0}{s_0^2} + \frac{p\, r_z}{2\, s_0} = 1388 \text{ kg/cm}^2,$$

Kesselboden

$$\sigma_a = \frac{6\, M_0}{s_0^2} + \frac{p\, r_k}{2\, s_0} = 1488 \text{ kg/cm}^2.$$

Um ein vollständiges Bild über den Kraftverlauf zu geben, wird noch gezeigt, wie die Spannungen in einigem Abstand vom Knick abklingen.

Kesselmantel:

$$k = \frac{1{,}285}{\sqrt{r_z s_z}} = 0{,}1285$$

$$A = -\frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{6}{k^2 s_z^3}\left(-\frac{Q_0}{k} + M_0\right) = -\frac{1-\nu^2}{E} \cdot 71\,800 \text{ kg/cm}$$

$$B = -\frac{1-\nu^2}{E} \cdot \frac{6}{k^2 s_z^3} \cdot M_0 = -\frac{1-\nu^2}{E} \cdot 81\,200 \text{ kg/cm}$$

$$N_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{s_z}{r_z} \cdot e^{-kx}\,[A \cdot \cos kx + B \cdot \sin kx]$$
$$= -e^{-0{,}1285\,x}\,[718 \cdot \cos 0{,}1285\,x + 812 \cdot \sin 1285\,x]$$

$$M_x = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{s_z^3 k^2}{6} \cdot e^{-kx}\,[-B \cdot \cos kx + A \cdot \sin kx]$$
$$= e^{-0{,}1285\,x}\,[224 \cdot \cos 0{,}1285\,x - 198 \cdot \sin 0{,}1285\,x].$$

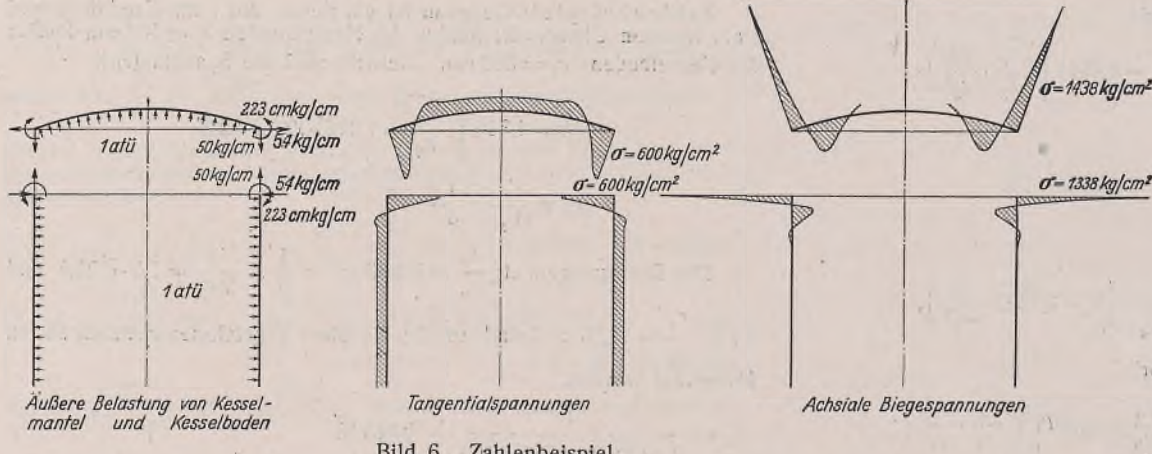


Bild 6. Zahlenbeispiel.

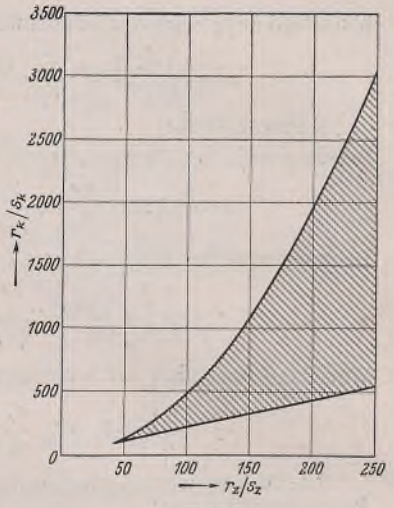


Bild 7. Geltungsbereich der Formeln für $s_z = s_k$.

Kesselboden:

$$k = 1{,}316 \sqrt{\frac{r_k}{s_k}} = 22{,}8$$

$$k\varphi_0 = 22{,}8 \cdot \frac{r_z}{r_k} = 7{,}6 = 360^\circ + 75{,}5^\circ$$

$$A = \frac{\sqrt{k\varphi_0}}{e^{k\varphi_0}} \left[\varphi_0 L_0 (\cos k\varphi_0 - \sin k\varphi_0) + \frac{6(1-\nu^2) r_k}{s_k^2 k^3} \cdot M_0 \cdot \sin k\varphi_0\right] = 0{,}0097 \text{ kg/cm}$$

$$B = \frac{\sqrt{k\varphi_0}}{e^{k\varphi_0}} \left[\varphi_0 L_0 (\cos k\varphi_0 + \sin k\varphi_0) - \frac{6(1-\nu^2) r_k}{s_k^2 k^3} \cdot M_0 \cdot \cos k\varphi_0\right] = 0{,}0429 \text{ kg/cm}$$

$$N_\vartheta = -k \cdot \frac{e^{k\varphi}}{\sqrt{k\varphi}} [(A+B)\cos k\varphi + (-A+B)\sin k\varphi]$$

$$= -\frac{e^{22,8\varphi}}{\sqrt{22{,}8\varphi}} [1{,}199 \cdot \cos 22{,}8\varphi + 0{,}757 \cdot \sin 22{,}8\varphi]$$

$$M_\varphi = \frac{s_k^2 k^3}{6(1-\nu^2) r_k} \cdot \frac{e^{k\varphi}}{\sqrt{k\varphi}} [(A-B)\cos k\varphi + (A+B)\sin k\varphi]$$

$$= \frac{e^{22,8\varphi}}{\sqrt{22{,}8\varphi}} [-0{,}240 \cdot \cos 22{,}8\varphi + 0{,}381 \cdot \sin 22{,}8\varphi].$$

Spannungen im Kesselmantel

$$\sigma_t = \frac{N_\varphi}{s_z} + \frac{p\, r_z}{s_z}$$

$$\sigma_a = \frac{6 M_x}{s_z^2} + \frac{p\, r_z}{2 s_z}.$$

Spannungen im Kesselboden

$$\sigma_t = \frac{N_\vartheta}{s_k} + \frac{p\, r_k}{2 s_k}$$

$$\sigma_a = \frac{6 M_\varphi}{s_k^2} + \frac{p\, r_k}{2 s_k}.$$

Das Ergebnis der Rechnung zeigt Bild 6.

Um dem Konstrukteur die schnelle und überschlägliche Anwendung der Formeln zu erleichtern, sind für den einfachsten und häufigsten Fall $s_z = s_k$ der Anwendungsbereich der Formeln (Bild 7) und das Biegemoment in der Schweißnaht (Bild 8) in Kurvenblättern aufgetragen.

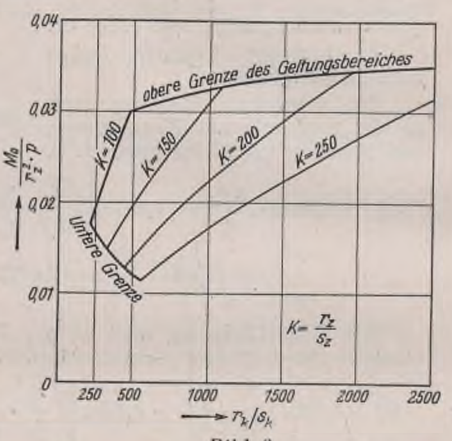


Bild 8. Biegemoment in der Schweißnaht für $s_z = s_k$.

Der durch einen biegungssteifen Bogen verstärkte Balkenträger.

Statische Untersuchung mit Hilfe von Kernmomenten.

Von Dr.-Ing. Karl Hoening, Köln.

1. Das Tragnetz kann als gelenkloser Rahmen mit $n-1$ statisch überzähligen Stabkräften der Hängepfosten betrachtet werden (Bild 1). Der Grad der statischen Unbestimmtheit ist mithin $3 + n - 1 = n + 2$. Die Berechnung eines solchen Tragnetzes höherer statischer Unbestimmtheit wird in der Weise vorgenommen, daß man es zunächst durch ein Grundnetz von niederem Grade statischer Unbestimmtheit ersetzt und in dies zusätzliche Kraftwirkungen oder Formänderungsgrößen derart einführt, daß alle Elastizitätsbedingungen erfüllt werden. Es ist für die Übersichtlichkeit und die Sicherheit der Rechnung von großem Wert, das Grundnetz so zu wählen, daß es dem endgültigen Tragwerk in seiner Wirkung möglichst nahekommt, und daß die zusätzlichen Bedingungen nur noch geringen Einfluß auf die Kraftverteilung haben.

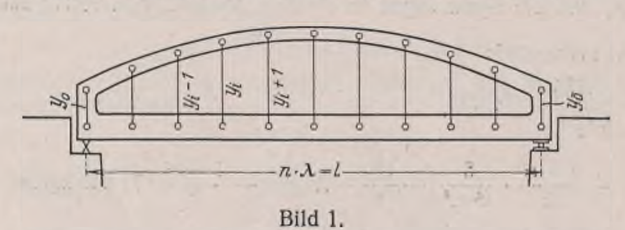


Bild 1.

Als statisch überzählige Größen können sowohl Kräfte und Momente als auch Formänderungsgrößen, wie Längenänderungen oder Winkeldrehungen, angenommen werden. Im vorliegenden Falle erweist es sich als besonders zweckmäßig, im Grundnetz bestimmte Formänderungen auszuschalten, und zwar die Längenänderungen der $n+1$ Pfosten. Das Grundnetz hat also dieselbe Zahl von Stäben und Stabverbindungen wie das endgültige Tragwerk, aber eine um $n+1$ verminderte Zahl von Formänderungsgrößen. Damit wird erreicht, daß die lotrechten Durchbiegungen des Bogens und des Versteifungsträgers in jedem Knotenpunkt gleich groß werden. Trägt man die Biegelinien beider Teile über der waagerechten Projektionsachse auf, so würden diese, abgesehen von kleinen waagerechten Abweichungen, die für die Berechnung belanglos sind, völlig kongruente Linien sein, wenn sich die Biegelinien auch in den Feldern zwischen den Knotenpunkten decken würden. Diese Bedingung kann nur erfüllt werden, wenn alle Stabachsen gerade sind und wenn alle Lasten in den Knotenpunkten angreifen. In diesem Falle ist als einzige statisch unbestimmte Größe der Bogenschub H zu ermitteln. Die Verteilung der Momente auf Bogen und Versteifungsträger ergibt sich ohne weiteres aus dem Verhältnis der Steifigkeitsgrade. Es soll vorausgesetzt werden, daß die Trägheitsmomente in jedem Einzelstab linear verlaufen, so daß sie durch Knotenpunkts-Mittelwerte ersetzt werden können.

Die Berechnung erfolgt durch Überlagern der beiden nachstehend gekennzeichneten Systemzustände. Die äußeren Lasten sollen dabei zunächst lotrecht, d. h. parallel den Pfosten wirkend, angenommen werden.

a) Bogenschub $H = 0$. Momente M_0.

Dieser Fall kann dadurch verwirklicht werden, daß man die Endpfosten y_o und y_o sowohl an den Bogen als auch an den Versteifungsträger gelenkig anschließt. Das Tragsystem besteht dann aus zwei übereinanderliegenden, in $n+1$ Punkten in lotrechter Richtung unverschieblich miteinander verbundenen Balkenträgern. Ist J_{st} das Trägheitsmoment des Versteifungsträgers, J_b dasjenige des Bogens an irgendeiner Stelle x, α der Neigungswinkel der Bogenachse an der gleichen Stelle, so ist das Steifigkeitsverhältnis an dieser Stelle bestimmt durch das Verhältnis J_{st} zu $J_b \cdot \cos\alpha$. Die Momentenanteile sind also

im Versteifungsträger: $$M_{st\,o} = M_0 \cdot \frac{J_{st}}{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha},$$

im Bogen: $$M_{b\,o} = M_0 \cdot \frac{J_b \cdot \cos\alpha}{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha}.$$

b) Bogenschub $= H$, äußere Lasten fehlen. Momente $M'H$.

Die Endpfosten sind an Bogen und Versteifungsträger biegungsfest angeschlossen. In jedem lotrechten Schnitt x ist das aufzunehmende Moment $-H y_x$. Da beide Teile im gleichen Sinne verwölbt werden, und zwar nach oben, wenn H als Druckkraft im Bogen, als Zugkraft im

Versteifungsträger wirkt, addieren sich ihre Momentenanteile. Ihr Verhältnis ist das gleiche wie im Falle a). Beide Anteile sind negativ, wenn die Verwölbung nach oben gerichtet ist. Ihre Größenwerte sind

im Versteifungsträger: $M'_{st}H = -Hy \cdot \frac{J_{st}}{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha}$,

im Bogen: $M_b'H = -Hy \cdot \frac{J_b \cdot \cos\alpha}{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha}$.

Im Endpfosten tritt damit ein Momenten-Wendepunkt auf in der Höhe

$$y_0 \cdot \frac{J_{st}}{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha}$$

über der Versteifungsträgerachse. Die Momentenverteilung und die Verbiegung im Endfeld sind in Bild 2 dargestellt.

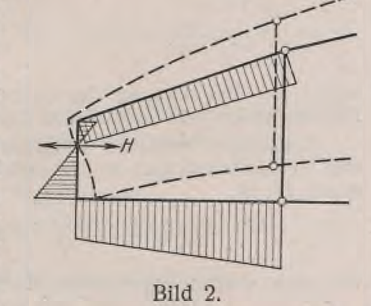


Bild 2.

Für die in waagerechter Richtung wirkenden Angriffskräfte gilt die gleiche Momentenverteilung. Da diese weniger wichtig sind, kann ein ausführlicher Nachweis hier unterbleiben.

2. Das Tragsystem mit starren Pfosten, geraden Stabachsen und mit Lastangriff nur in den Knotenpunkten ist damit auf ein einfach statisch unbestimmtes Netz zurückgeführt. Als einzige statisch unbestimmte Größe wird der Bogenschub H angenommen. Von der Berechnung des biegungsfreien Stabbogens mit Versteifungsträger unterscheidet sich die Berechnung dieses Tragwerks nur dadurch, daß seine Biegungssteifigkeit nicht mehr allein durch J_{st}, sondern durch $J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha$ bestimmt wird. Der Wert von H ergibt sich in bekannter Weise aus der Formel:

$$H = \frac{\Sigma S_0 S' \cdot \frac{s}{F} + \Sigma M_0 M' \cdot \frac{s}{J}}{\Sigma S'^2 \cdot \frac{s}{F} + \Sigma M'^2 \cdot \frac{s}{J}},$$

worin J durch $J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha$ zu ersetzen ist.

Die Einflußlinie für H wird nach dem Maxwellschen Satz als Biegelinie für $H = 1$ ermittelt. Bei Bildung des Nenners in obiger Formel für H, der den Maßstab der Einflußlinie angibt, sind auch die Längenänderungen der Pfosten, die weiter unten behandelt werden, zu berücksichtigen. Die Verbiegung der Endpfosten kann im allgemeinen unberücksichtigt bleiben, weil diese sehr kurz und steif sind und keinen nennenswerten Beitrag zur Verformung liefern.

3. Die Voraussetzung, völlige Deckung der Biegelinien von Bogen und Versteifungsträger auch in den Feldern zwischen den Knotenpunkten, trifft tatsächlich wegen der stetigen Krümmung der Bogenachse nicht zu. Aus dieser Krümmung ergeben sich zusätzliche Momente im Bogen von der Größe $\pm \nu H \Delta h$, wenn Δh die Höhe des Bogens über der Sehne in der Mitte eines Feldes und $\pm \nu$ einen Beiwert bezeichnet, der sich aus der Eigenschaft des Bogens als stetig durchlaufenden Trägers auf $n+1$ Stützen ergibt. Das Maß Δh ist in lotrechter Richtung zu messen und wird bei parabelförmiger Bogenführung in allen Feldern von gleicher Länge λ gleich groß. Die Bogenenden können als voll eingespannt betrachtet werden. Da die Stabachse an den Knotenpunkten unter der Einwirkung der Zusatzmomente ihre Richtung nicht ändern soll, folgt die Flächengleichheit der positiven und negativen Momentenflächenanteile.

Damit ergibt sich der Wert ν an den Knotenpunkten zu $+\frac{2}{3}$, in den Feldmitten zu $-\frac{1}{3}$. Für die Berechnung von H und M_x wird der Bogen durch einen Vieleckzug ersetzt, der den Bogen so schneidet, daß die für die Berechnung maßgebenden Bogenordinaten an den Knotenpunkten um $\frac{2}{3} \cdot \Delta h$ vergrößert werden,

$y^* = y + \frac{2}{3} \cdot \Delta h$ (s. Bild 3).

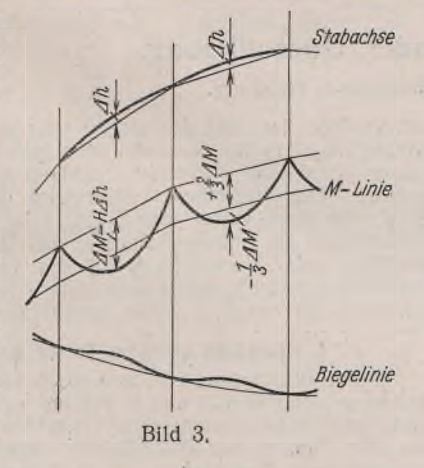


Bild 3.

Wenn man in der angegebenen Formel für H die Stablängen s des Bogens durch $\frac{\lambda}{\cos\alpha}$ ersetzt und berücksichtigt, daß alle Werte $S_0 = 0$ gesetzt werden können, so erhält man nach kurzer Umrechnung mit guter Annäherung für H die Formel:

$$H = \frac{\Sigma M_0 y^* \cdot \frac{\lambda}{J_{st} + J_b \cdot \cos^2\alpha_x}}{\sum \frac{y^{*2}\lambda}{J_{st} + J_b \cdot \cos^2\alpha} + \sum \frac{\lambda}{F_{stx}} + \sum \frac{\lambda}{F_{bx} \cdot \cos^3\alpha_x} + \sum \frac{V_x^2 v_x}{F_{vx}}}.$$

Im Nenner N, der für alle Belastungszustände denselben Wert behält, tritt die Quadratsumme der Bogenordinaten auf. Mit sehr guter Annäherung kann auch bei Bildung dieser Quadratsumme die bogenförmige Begrenzung durch die des flächengleichen Vielecks ersetzt werden.

Zum Aufzeichnen der Einflußlinie für H sind aus den Momenten $M' = y^*$ die E-fachen elastischen Gewichte

$$\frac{y^* \lambda}{J_{st} + J_b \cdot \cos^2\alpha_x}$$

zu bilden. Die Biegelinie für $H = 1$ ergibt sich als Momentenlinie dieser elastischen Gewichte. Die Einflußordinaten sind gleich den Biegeordinaten, geteilt durch den gemeinsamen Nenner N. Die Summe der Momente in Versteifungsträger und Bogen ergibt sich zu

$$M_x = M_x^0 - Hy^*.$$

Die Verteilung dieser Momentensumme auf den Versteifungsträger und den Bogen erfährt durch die Überlagerung der Momente aus der Stabkrümmung eine Änderung, weil für die Durchbiegung das mittlere Moment, das sich aus den anschließenden Feldern ergibt, maßgebend ist. Der auf den Bogen entfallende Anteil ist in den Knotenpunkten:

$$M_b = M_x \cdot \frac{J_b \cdot \cos\alpha}{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha} + \frac{2}{3} \cdot H \Delta h.$$

Aus Gleichgewichtsgründen muß daher der Anteil des Versteifungsträgers

$$M_{st} = M_x \cdot \frac{J_{st}}{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha} - \frac{2}{3} \cdot H \Delta h$$

sein. Das Moment in der Feldmitte $i - k$ ist zu ermitteln aus

$$M_{b(i-k)} = \frac{M_i + M_k}{2} - H \Delta h.$$

4. Der Einfluß der Längenänderungen der Pfosten auf die Momente ist, wie sich aus Zahlenrechnungen ergibt, so gering, daß seine Berücksichtigung nur in sehr genauen Berechnungen erforderlich ist. Er erstreckt sich im wesentlichen nur auf den Bogenansatz an den Trägerenden und vermindert dort die maßgebende Druckspannung an der unteren Bogenleibung in der Größenordnung von etwa 2 ‰. Er liegt also auf der sicheren Seite.

Die Pfostenkraft erhält man aus der Formel:

$$V_i = \frac{1}{\lambda}\left[H(-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1}) - M_{b(i-1)} + 2M_{bi} - M_{b(i+1)}\right].$$

Die daraus ermittelten Längenänderungen Δv_i verteilen sich auf den Bogen und den Versteifungsträger im umgekehrten Verhältnis der Steifigkeitsgrade $J_b \cdot \cos\alpha$ und J_{st}. Der Bogen erhält also zusätzliche Durchbiegungen:

$$\Delta y_b = -\Delta v \cdot \frac{J_{st}}{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha}.$$

Aus diesen Biegeordinaten sind die Biegemomente M^*_{bi} mit Hilfe einer Gruppe von dreigliedrigen Elastizitätsgleichungen der Form:

$$\frac{M^*_{b(i-1)}}{6J_{i-1} \cdot \cos\alpha_{i-1}} + \frac{2M^*_{bi}}{3J_i \cdot \cos\alpha_i} + \frac{M^*_{b(i+1)}}{6J_{i+1} \cdot \cos\alpha_{i+1}} = \frac{E\Delta y_{b(i-1)} - 2E\Delta y_{bi} + E\Delta y_{b(i+1)}}{\lambda^2}$$

zu ermitteln, wobei für die eingespannten Stabenden die Durchbiegung gleich Null und das Trägheitsmoment in der Einspannung gleich Unendlich einzusetzen sind. Die erste Gleichung der Gruppe lautet also:

$$0 + \frac{1 M^*_{b0}}{3J_0 \cdot \cos\alpha_0} + \frac{M^*_{b_1}}{6J_1 \cdot \cos\alpha_1} = \frac{0 - 0 + E\Delta y^*_{b_1}}{2}.$$

Die Werte $\frac{M^*_{bi}}{J_{bi} \cdot \cos\alpha_i}$ sind die Unbekannten X_i der Gleichungsgruppe.

Die durch die Änderung der Bogenmomente M_b sich ergebenden Rückwirkungen auf V_i sind so gering, daß sie in jedem Falle unberücksichtigt bleiben können. Dem Einfluß der Längenänderungen auf H ist bei Bildung des Nenners bereits Rechnung getragen worden.

5. Die Berechnung der endgültig gewählten Querschnitte erfolgt zweckmäßig aus den Kernmomenten, indem man Einflußlinien unmittelbar für die Werte σW zeichnet, wenn W das Widerstandsmoment eines Rahmenstabquerschnitts ist, denn nur diese Kerneinflußlinien zeigen die jeweils ungünstigste Laststellung richtig an. Dabei ist es erforderlich, auch der Knickzahl ω für den Bogenquerschnitt Rechnung zu tragen, was folgerichtig ebenfalls in der Einflußlinie geschieht, weil die Berücksichtigung der Knickzahl sonst die Berechnung von H für wechselnde Laststellungen erfordern würde.

Bezeichnet man mit W_{bo} das Widerstandsmoment für die obere Randfaser, mit W_{bu} dasjenige für die untere Randfaser des Bogenquerschnitts, mit W_{sto} und W_{stu} die entsprechenden Widerstandsmomente des Versteifungsträgers, ferner mit

$$k_{bo} = \frac{W_{bo}}{F_b} \qquad k_{bu} = \frac{W_{bu}}{F_b}$$

die Kernabstände von der Schwerachse, so erhält man aus:

$$\sigma_{bo} = -\frac{S}{F} \cdot \omega - \frac{M_b}{W_b} \qquad \sigma_{bu} = -\frac{S}{F} \cdot \omega + \frac{M_b}{W_b} \quad \text{usw.}$$

folgende Formeln zur Bestimmung der Einflußlinie. Der Vervielfältiger ist dabei so gewählt, daß, wie üblich, die Einflußlinie für H stets im gleichen Maßstab verwendet wird. Die Formeln entstehen durch entsprechende Umrechnung. Die Kernabstände k_{bo} und k_{bu} sind darin stets als positive Werte einzuführen. Da die Einflußfläche für M_x^0 als einfache Dreiecksfläche leicht darzustellen ist, erhält man so die Einflußflächen für σW als Differenz einer Dreiecksfläche und der einmal ermittelten Einflußfläche für H.

$$\sigma_{bo} \cdot \frac{W_{bo}}{y_x^* \cdot \frac{J_b \cdot \cos\alpha}{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha} - \left(\frac{k_{bo}\,\omega}{\cos\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \Delta h\right)} = \frac{-M_{xo}}{y_x^* - \left(\frac{k_{bo}\,\omega}{\cos\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \Delta h\right) \frac{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha}{J_b \cdot \cos\alpha}} + H$$

$$\sigma_{bu} \cdot \frac{W_{bu}}{y_x^* \cdot \frac{J_b \cdot \cos\alpha}{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha} + \left(\frac{k_{bu}\,\omega}{\cos\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \Delta h\right)} = \frac{M_{xo}}{y_x^* + \left(\frac{k_{bu}\,\omega}{\cos\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \Delta l\right) \frac{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha}{J_b \cdot \cos\alpha}} - H$$

$$\sigma_{sto} \cdot \frac{W_{sto}}{y_x^* \cdot \frac{J_{st}}{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha} + \left(k_{sto} + \frac{2}{3} \cdot \Delta h\right)} = \frac{-M_{xo}}{y_x^* + \left(k_{sto} + \frac{2}{3} \cdot \Delta h\right) \frac{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha}{J_{st}}} + H$$

$$\sigma_{stu} \cdot \frac{W_{stu}}{y_x^* \cdot \frac{J_{st}}{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha} - \left(k_{stu} + \frac{2}{3} \cdot \Delta h\right)} = \frac{M_{xo}}{y_x^* - \left(k_{stu} + \frac{2}{3} \cdot \Delta h\right) \frac{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha}{J_{st}}} - H,$$

darin ist $y_x^* = y_x + \frac{2}{3} \Delta h$, wie oben erläutert.

Um die Beanspruchungen in Feldmitte zu bestimmen, ist es zweckmäßig, zunächst den Knotenpunktsmomenten den Betrag $-H \Delta h$ hinzuzufügen und dann das arithmetische Mittel der Werte $\sigma_i W_i$ und $\sigma_k W_k$ zu bilden. Man erhält:

$$\sigma_{ik} = \frac{\sigma_i W_i + \sigma_k W_k}{2\,W_{ik}}.$$

Die Hinzufügung von $-H \Delta h$ geschieht durch Umrechnen der Beiwerte der Einflußordinaten, indem man in den Formeln $+\frac{2}{3} \cdot \Delta h$ durch $-\frac{1}{3} \cdot \Delta h$ ersetzt, also:

$$\sigma'_{bo} \cdot \frac{W_{bo}}{y_x^* \cdot \frac{J_b \cdot \cos\alpha}{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha} - \left(\frac{k_{bo}\,\omega}{\cos\alpha} - \frac{1}{3} \cdot \Delta h\right)} = \frac{-M_{xo}}{y_x^* - \left(\frac{k_{bo}\,\omega}{\cos\alpha} - \frac{1}{3} \cdot \Delta h\right) \frac{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha}{J_b \cdot \cos\alpha}} + H$$

u. s. f.

und die geänderten Einflußlinien erneut auswertet.

Die Pfostenkräfte erhält man aus den Kernmomenten $M_k = \sigma W$ mit Hilfe der abgeänderten Formel:

$$V_i = +\frac{1}{\lambda}\left[H\left(-y_{i-1} + 2\,y_i - y_{i+1} - \frac{k_{i-1}}{\cos\alpha_{i-1}} + \frac{2\,k_i}{\cos\alpha_i} - \frac{k_{i+1}}{\cos\alpha_{i+1}}\right) - M_{k\,(i-1)} + 2\,M_{ki} - M_{k\,(i+1)}\right],$$

wobei die Verwendung der oberen oder der unteren Kernpunkte und Kernmomente des Querschnitts dasselbe Ergebnis liefern muß.

Endlich ist noch ein Wärmeunterschied von $\pm 15°$ zwischen Bogen und Versteifungsträger zu berücksichtigen. Der dabei entstehende Bogenschub H_t ist

$$H_t = \pm \frac{\varepsilon\, t\, l}{N} = \pm \frac{0{,}000\,012 \cdot 15\, l}{N}.$$

Die sich daraus ergebenden Randspannungen der Rahmenstäbe sind:

$$\sigma_{bo} W_{bo} = H_t \left[y^* \cdot \frac{J_b \cdot \cos\alpha}{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha} - \left(\frac{k_{bo}\,\omega}{\cos\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \Delta h\right)\right]$$

$$\sigma_{bu} W_{bu} = H_t \left[y^* \cdot \frac{J_b \cdot \cos\alpha}{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha} - \left(\frac{k_{bu}\,\omega}{\cos\alpha} + \frac{2}{3} \cdot \Delta h\right)\right]$$

$$\sigma_{sto} W_{sto} = H_t \left[y^* \cdot \frac{J_{st}}{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha} + \left(k_{sto} + \frac{2}{3} \cdot \Delta h\right)\right].$$

$$\sigma_{stu} W_{stu} = H_t \left[y^* \cdot \frac{J_{st}}{J_{st} + J_b \cdot \cos\alpha} + \left(k_{stu} + \frac{2}{3} \cdot \Delta h\right)\right].$$

Die [ ]-Werte sind die oben bereits verwendeten Maßstabbeiwerte der Einflußordinaten. Für die Bogenquerschnitte in den Feldmitten ist der Teilhebelarm $+\frac{2}{3} \cdot \Delta h$ durch $-\frac{1}{3} \cdot \Delta h$ zu ersetzen und das arithmetische Mittel aus den Knotenpunkts-Kernmomenten $\sigma_i W_i$ und $\sigma_k W_k$ zu bilden.

Bei der Entwicklung der oben angegebenen Formeln zur Berechnung der Beanspruchungen σ ist nur die Axialkraft $S = \frac{H}{\cos\alpha}$ im Bogen mit dem Knickbeiwert ω vervielfacht. Sie gelten also unabhängig davon, für welche Querschnittsachse das Trägheitsmoment, das dem Wert ω zugrunde liegt, berechnet ist. Es ist stets der ungünstigste Schlankheitsgrad zu berücksichtigen. Für das Knicken in der Trägerebene ist die Knicklänge hier immer gleich der einfachen Stablänge. Für Knicken aus der Trägerebene sind, wenn ein oberer Windverband nicht vorhanden ist, die geltenden Vorschriften zu beachten oder besondere Überlegungen maßgebend[1]).

[1]) Eine Untersuchung über die Knicklängen der Bogentangenten bei halbrahmenförmiger Ausbildung der Querversteifungen in den Bogenendfeldern erscheint demnächst in der „Bautechnik".

Druckstäbe mit federnder Querstützung.

Von Dipl.-Ing. **Wilhelm Bültmann**, Hamburg.

Einleitung.

Bei der Nachprüfung geplanter Konstruktionen konnte unlängst festgestellt werden, daß die Anwendung der im Schrifttum mitgeteilten Ergebnisse einiger unter Labilitätsfälle behandelter Probleme elastisch quergestützter Druckstäbe[1]) sehr leicht zu unbefriedigenden Resultaten und erheblichen Trugschlüssen über die Standsicherheit solcher Bauglieder führen kann. Die unter Fußnote 1 mitgeteilten Gleichungen für den elastisch quergestützten gedrückten Gelenkstab sind, wie weiter unten gezeigt wird, nur dann zutreffend, wenn das obere Gelenk des Druckstabes mit dem Querkraftsmittelpunkt (Schubmittelpunkt) des die elastische Stützung übernehmenden Trägers entsprechend Bild 1 zusammenfällt. Das läßt sich jedoch sehr selten erreichen, da der so unterstützte Träger in den meisten Fällen gleichzeitig zur Aufnahme vertikaler Lasten dient und daher im Stahlbau vorwiegend als I profiliert vorkommt. Der Einfachheit halber wird dann allerdings der Gelenkstab auch noch direkt unter dem I-Träger so angeordnet, daß dessen Gelenk unmittelbar am unteren Flansch befestigt wird. Der Nachweis der Stabilität unter Vernachlässigung der Verdrehung der Querstütze bzw. deren Verdrehsteifigkeit ist dann ohne weiteres nicht mehr möglich, wie im folgenden für einige bisweilen vorkommenden Fälle gezeigt werden soll.

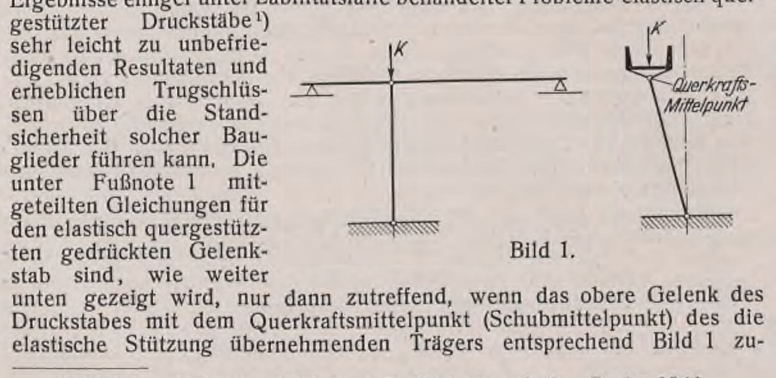


Bild 1.

[1]) Stahlbau-Kalender 1941, S. 117, Bild 41 und 42. Berlin 1941.

I. Elastisch quergestützter gelenkiger Druckstab.

Der in Bild 2a und 2b schematisch dargestellte, durch einen I-Träger, der an seinen Enden A und B wölbfrei gelagert ist, elastisch quergestützte Gelenkstab erfahre unter einer lotrechten Last, die etwas größer ist als die über dem oberen Trägerflansch angreifend eingetragene Last K, die eingezeichnete Verformung. Wir wollen nunmehr feststellen, bei welchem K-Wert diese Verformung beginnt und setzen zu diesem Zweck voraus, daß die Kraftrichtung bei dieser Verschiebung lotrecht bleibt. Gegenüber früheren Ausführungen soll außer der horizontalen Biegungssteifigkeit die auftretende Verdrehung des Trägers bzw. dessen Verdrehsteifigkeit berücksichtigt werden. Das bereitet keine Schwierigkeiten, denn mit

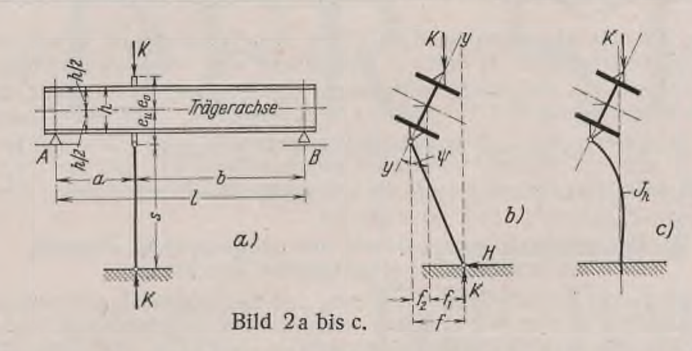


Bild 2a bis c.

der bekannten Bedingung kleiner auftretender Formänderungen ergibt sich die Stabilitätsgrenze an Hand der in Bild 2a und 2b aufgezeichneten Daten und deren Bedeutung als:

ψ = Verdrehung des Trägers gegen die Lotrechte infolge M_d an der Laststelle,
φ = Einheitsverdrehung (infolge $M_d = 1$),
ε = horizontale Einheitsverschiebung der Trägerachse (infolge $H = 1$),
M_d = das bei der Ausweichung auftretende Verdrehmoment,
h = Trägerhöhe,
h' = Abstand der Schwerpunkte der Trägerflansche,
l = Trägerlänge, a und b = Abstände des Gelenkstabes von den Lagern A und B,
e_o = Abstand des Lastangriffspunktes von der Trägerachse,
e_u = Abstand des oberen Gelenks von der Trägerachse,
J_y = Trägheitsmoment des Trägerquerschnitts um die Hochachse,
J_f = Trägheitsmoment eines Trägerflansches um die Hochachse,
J_d = Drillungsträgheitsmoment,
s = Länge des Druckstabes,
f_1 = horizontale Verschiebung der Trägerachse an der Laststelle infolge H,
f_2 = horizontale Verschiebung des oberen Gelenkpunktes infolge der Verdrehung des Trägers.

Mittels der bei der Ausweichung des oberen Trägers auftretenden Horizontalkraft H ergibt sich die Verschiebung des oberen Gelenks des Druckstabes gegen die Lotrechte durch das Fußgelenk zu:

$$f = f_1 + f_2 = H\varepsilon + e_u\,\psi.$$

Die Einführung des um die Trägerachse drehenden Moments $M_d = K(e_o + e_u)\psi + H e_u$ ergibt mittels der obengenannten Bezeichnungen aus $\psi = M_d\,\varphi = [K(e_o + e_u)\psi + H e_u]\,\varphi$ die Verdrehung des Trägers um seine Längsachse an der Laststelle zu:

$$\psi = \frac{H e_u \varphi}{1 - K(e_o + e_u)\varphi}$$

und die horizontale Verschiebung des oberen Gelenks

$$f = H\left[\varepsilon + \frac{e_u^2\,\varphi}{1 - K(e_o + e_u)\varphi}\right]. \tag{1'}$$

Wird nunmehr noch beachtet, daß ja $H = \frac{K f}{s}$ ist, so erhalten wir mit

$$1 = \frac{K}{s}\left[\varepsilon + \frac{e_u^2\,\varphi}{1 - K(e_o + e_u)\varphi}\right] \tag{1}$$

die Bestimmungsgleichung für den kritischen Wert K, bei dem das Gleichgewicht infolge Versagens der elastischen Stützung instabil wird.

Aus Gl. (1) können wir K noch in der expliziten Form

$$K = A - \sqrt{A^2 - B} \quad \text{angeben, wenn} \tag{2}$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{s}{\varepsilon} + \frac{e_u^2}{(e_o + e_u)\varepsilon} + \frac{1}{(e_o + e_u)\varphi}\right] \tag{2a}$$

und

$$B = \frac{s}{(e_o + e_u)\varepsilon\psi}$$

zur Abkürzung eingeführt wurde.

Greift die Last K direkt am oberen Flansch an und wird das Gelenk unmittelbar am unteren Flansch befestigt, dann gehen Gl. (1) u. (2a) in

$$1 = \frac{K}{s}\left[\varepsilon + \frac{h^2\varphi}{4(1 - K h \varphi)}\right] \quad \text{und} \tag{3}$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{s}{\varepsilon} + \frac{h}{4\varepsilon} + \frac{1}{h\varphi}\right] \tag{2b}$$

$$B = \frac{s}{h\varepsilon\varphi} \quad \text{über.}$$

In diesen Gleichungen ist ferner noch

$$\varepsilon = \frac{a^2 b^2}{3\,l\,E J_y}$$

und

$$\varphi = -\frac{l}{(\alpha l)\,G J_d}\left[\frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha a \cdot \mathfrak{Sin}\,\alpha b}{\mathfrak{Sin}\,\alpha l} - (\alpha b)\frac{a}{l}\right]$$

mit

$$\alpha l = \frac{l}{h'}\sqrt{2 \cdot \frac{G}{E} \cdot \frac{J_d}{J_f}} = 0{,}88 \cdot \frac{l}{h'}\sqrt{\frac{J_d}{J_f}},$$

die wir dem in Fußnote 2 genannten Buch entnommen haben und die von Timoshenko stammen.

Wir können uns die Diskussion der Gl. (2) ersparen, da sich aus Gl. (1) u. (3) eindeutig ergibt, daß bei großem s, verbunden mit kleinen ε und φ, die Grenzkraft K, die zweckmäßig größer als die zulässige Knicklast des Gelenkstabes gehalten wird, große Werte annimmt. Allerdings enthüllen diese Zwischengleichungen noch die weitere Stabilitätsbedingung

$$K < \frac{1}{(e_o + e_u)\varphi} \quad \text{bzw.} \quad K < \frac{1}{h\varphi}, \tag{4}$$

ohne deren Erfüllung Gl. (1), (2) u. (3) illusorisch werden. Überschreitet K nämlich die Werte der Ungleichungen (4), dann wird schon allein infolge allzu geringer Verdrehsteifigkeit des Trägers das Gleichgewicht instabil.

Beispiel.

Es sei: $l = 14{,}50$ m mit $a = b = \frac{1}{2}$ und $s = 3{,}50$ m, sowie $e_u = 17$ cm und $e_o = 21$ cm.

Die Trägerwerte werden angenommen zu: I P 34 mit $J_y = 9910$ cm⁴,
$J_f \approx \frac{J_y}{2}$, $J_d = 305$ cm⁴, $J_d : J_f = 0{,}0618$, $h = 34$ cm, $h' = 32$ cm.

Mit diesen Daten errechnen sich

die seitliche Einheitsverschiebung: $\varepsilon = \frac{1450^3}{48 \cdot 2100 \cdot 9910} = 3{,}05$ cm/t,

der Trägerwert: $\alpha l = \frac{0{,}88 \cdot 1450}{32}\sqrt{0{,}0618} = 9{,}91$ und

die Einheitsverdrehung: $\varphi = -\frac{1450}{9{,}91 \cdot 830 \cdot 305}\left(0{,}50 - \frac{9{,}91}{4}\right)$

$$\varphi = \frac{1}{875} \cdot 1/\text{t},$$

so daß über Gl. (2a)

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{350}{3{,}05} + \frac{17^2}{(21 + 17)\,3{,}05} + \frac{875}{21 + 17}\right] = 70{,}14 \text{ (t)}$$

$$B = \frac{350 \cdot 875}{(21 + 17)\,3{,}05} = 2642{,}36 \text{ (t}^2\text{)}$$

Gl. (2) die kritische Grenzkraft $K = 70{,}14 - \sqrt{70{,}14^2 - 2642{,}36} = 22{,}4$ t liefert, da $K < \frac{875}{(21 + 17)}$, $K < 23{,}0$ t erfüllt ist.

Da der gewählte Träger in Verbindung mit der angenommenen Stützweite sehr verdrehweich ist, wird die kritische Minimumlast sehr klein, denn bei alleiniger Berücksichtigung der horizontalen Trägersteifigkeit würde diese Last immerhin auf $K = \frac{350}{3{,}05} = 114{,}8$ t anwachsen. Die beiden Werte sprechen für sich und heben den Einfluß, den die Verdrehung auf die Stabilität nimmt, sehr deutlich hervor.

II. Der elastisch quergestützte einseitig eingespannte Druckstab.

Spannen wir den Gelenkstab des Falles I unten ein, wie im Bild 1c dargestellt, und behalten im übrigen die obere gelenkige Verbindung mit dem I-Träger bei, dann gelangen wir über die schon bekannte Behandlung[3]) mittels der soeben abgeleiteten Verschiebungsgleichung (1'), in der wir nur mehr $H = 1$ zu setzen haben, zu der erweiterten transzendenten Knickbedingungsgleichung

$$\left\{\frac{K}{s}\left[\varepsilon + \frac{e_u^2\,\varphi}{1 - K(e_o + e_u)\varphi}\right] - 1\right\} \cdot z + \operatorname{tg} z = 0 \tag{5}$$

mit den Abkürzungen

$$z = \alpha s \quad \text{und} \quad \alpha^2 = \frac{K}{E J_h}. \tag{5a}$$

Die Grenzwerte $K = \frac{0{,}25\,E J_h \pi^2}{s^2}$ und $K = \frac{2{,}05\,E J_h \pi^2}{s^2}$ stimmen mit den in [3]) angegebenen überein. Die zu diesen Grenzwerten führenden Bedingungen werden zusätzlich durch die der Verdrehung erweitert. Darüber hinaus behält die Forderung (4) auch hier ihre Gültigkeit. Wir müssen ihr nur die ihr jetzt zukommende Bedeutung beimessen, daß bei

$$\frac{1}{(e_o + e_u)\varphi} < \frac{0{,}25\,E J_h \pi^2}{s^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{h\varphi} < \frac{0{,}25\,E J_h \pi^2}{s^2} \tag{6}$$

durch allzu geringe Verdrehsteifigkeit die Stütze nicht elastisch quergestützt wird, sondern als unterer Grenzwert, deren Knicklast

$$K = \frac{0{,}25\,E J_h \pi^2}{s^2} \quad \text{ist.}$$

[2]) F. Bleich, Stahlhochbauten, Bd. I, S. 113. Berlin 1932.
[3]) E. Chwalla, Erläuterungen zu DIN E 4114, 1. Teil, S. 24, Gl. (56).

Beispiel.

Wir behalten die Werte des Falles I bei und fügen hier nur noch die Profildaten des Stieles hinzu, dessen maßgebendes Trägheitsmoment $J_h = 1520$ cm⁴ sei.

Da die Knicklast des I. Eulerfalles $K = \frac{0{,}25 \cdot 2100 \cdot 1520\,\pi^2}{350^2} = 64{,}3$ t beträgt, stellen wir an Hand der Ungleichung (6) mit $\frac{1}{(e_o + e_u)\,\varphi} = \frac{875}{21 + 17} = 23{,}0$ t fest, daß der untere Grenzwert des gewählten Beispiels mit $K = 64{,}3$ t dessen einzige Lösung ist. Würde man fälschlicherweise die Verdrehsteifigkeit des Trägers vernachlässigen, also dessen Drillungsträgheitsmoment $J_d = \infty$ annehmen und nur die horizontale Einheitsverschiebung des Balkens mit $\varepsilon = 3{,}05$ cm/t in Rechnung stellen, dann liefert die entsprechend vereinfachte Gl. (5) immerhin die ansehnliche Knickkraft im Betrage von $K = 155{,}0$ t, die somit um rd. 240 % über dem tatsächlichen Wert von $K = 64{,}3$ t liegt. Die unerläßliche Berücksichtigung der Verdrehung ist auch hier zu beachten.

III. Der elastisch quergestützte und eingespannte, einseitig gelenkig gelagerte Druckstab.

Wir wollen hier noch den Fall näher betrachten, daß der auf mittigen Druck beanspruchte Stab nach Bild 3a und 3b mit dem Stützträger biegungssteif verbunden ist und dessen andere Seite unverschieblich, aber gelenkig gelagert ist. Die biegungssteife Verbindung mit dem

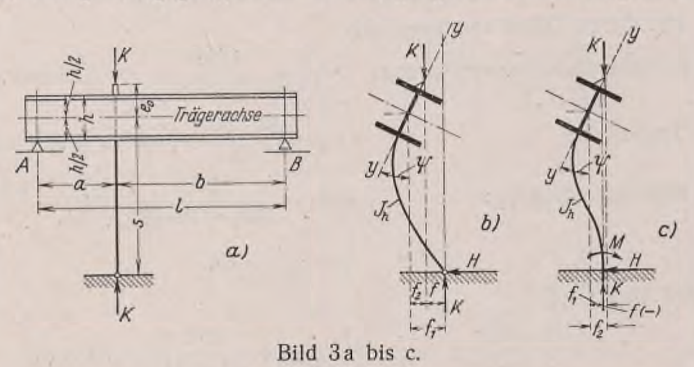


Bild 3a bis c.

Träger haben wir uns zumindest so ausgebildet zu denken, daß einerseits die unbeschränkte Verwölbung des Balkens nach wie vor gewährleistet ist, und andererseits eine Verdrehung des Druckstabes vermieden wird. Die Ausweichung des Druckstabes in der Bildebene 3a, die uns hier nicht zu interessieren hat, ist für alle Anschlußmöglichkeiten zwischen Träger und Stütze bekannt [für die elastische Einspannung vgl. Fußnote 4], und bleibt daher lediglich die Knickung aus dieser Bildebene nach Bild 3b, die wir anschließend nachweisen wollen.

Wir lassen hierbei aus Zweckmäßigkeitsgründen die Stütze bis zur Trägerachse durchgehen und zählen dann deren Länge s auch bis dort. Das in Bild 3a und 3b angedeutete Kräftespiel liefert, wenn jetzt f die Gesamtverschiebung des Lastangriffspunktes gegen die Lotrechte durch das untere Gelenk infolge der seitlichen Horizontalverschiebung und Verdrehung des Trägers um seine Achse ist, mit $f = f_1 - f_2 = H\varepsilon - e_o\,\psi$, worin $f_1 = H\varepsilon$ ist, und dem Verdrehmoment des Trägers um seine Achse in der Lastebene $M_d = Kf - Hs$ die Verdrehung des Trägers über $\psi = M_d\,\varphi$ zu $\psi = \frac{H(K\varepsilon - s)\,\varphi}{1 + K e_o\,\varphi}$.

An Hand der linearisierten Differentialgleichung der elastischen Linie und deren Auflösung erhalten wir mit den oben angegebenen Grenzbedingungen, f_1 für die obere seitliche Verschiebung und ψ für die obere Verdrehung der Stütze, die, wie gezeigt wurde, von der Weichheit des Balkens abhängen, die transzendente Knickbedingungsgleichung

$$(7) \qquad \left[\frac{K(K\varepsilon - s)\,\varphi}{1 + K e_o\,\varphi} - 1\right] \operatorname{tg} z = z\left(\frac{K}{s} \cdot \varepsilon - 1\right),$$

wenn wieder wie in Gl. (5) gemäß Gl. (5a) abgekürzt wurde. Die kleinsten von Null verschiedenen Wurzeln der Gl. (7) liefern für gegebene Stabwerte Knickkräfte, die je nach den Randbedingungen zwischen den Werten $K = 0$ und $K = \frac{2{,}05\,E\,J_h\,\pi^2}{s^2}$ liegen. Immerhin erscheint es vorteilhaft, das unter den Abschnitten I und II gezeigte Beispiel auch hier weiter fortzusetzen.

Beispiel.

Von den im Beispiel unter den Abschnitten I und II angeführten Daten ändern wir der angegebenen Gründe halber nur die Stielhöhe in $s = 3{,}50 + 0{,}17 = 3{,}67$ m, während allen anderen Größen nach wie vor die gleiche Bedeutung zukommt. Mit diesen Werten geht unsere Knickbedingungsgleichung (7) in

$$\left[\frac{K(3{,}05\,K - 367)}{875 + 21\,K} - 1\right] \operatorname{tg} z = z\left(\frac{3{,}05\,K}{367} - 1\right)$$

über, aus der wir, wenn noch K mittels der Elastizitätszahl E und des Stielträgheitsmoments J_h durch z ausgedrückt wird, nach zweckmäßiger Umformung und mehrmaligem Probieren die Knickkraft $K = 128{,}4$ t, die einer Knicklänge $s_k = 1{,}35 \cdot 3{,}67 = 4{,}90$ m entspricht, erhalten. Immerhin liegt dieser Wert schon beträchtlich über den in den Abschnitten I und II erzielten Werten, was darauf zurückzuführen ist, daß der Träger durch die direkte Einspannung in die Stütze bedeutend verdrehsteifer wird.

[4]) P. Boros, Verallgemeinerte Grundformeln der Eulerschen Knickfälle. Stahlbau 1934, S. 10.

IV. Der elastisch quergestützte und eingespannte, einseitig unverschieblich eingespannte Druckstab.

Eine nicht unwesentliche Aussteifung und damit verbundene Erhöhung der Knicklast werden wir erzielen, wenn wir der Vollständigkeit halber bei dem im vorigen Abschnitt behandelten Druckstab nun noch das untere gelenkige Lager fortfallen lassen und ihn statt dessen dort starr einspannen. Wir gelangen dann zu der in Bild 3c dargestellten Verformungsfigur, deren Kräftespiel uns wieder aus der vereinfachten Differentialgleichung der elastischen Linie unter Berücksichtigung der nunmehr zutreffenden Randbedingungen

$$f_1 = H\varepsilon \quad \text{und} \quad \psi = \frac{H\left(K\varepsilon - s - \frac{M}{H}\right)\varphi}{1 + K e_o\,\varphi}$$

für das obere Stabende und den bekannten Bedingungen, die die unverschiebliche starre Einspannung am unteren Stabende vorschreibt, die transzendente Gleichung der Knickbedingung

$$(8) \quad \left(\frac{K}{s} \cdot \varepsilon - s\right)\left[\frac{K s\,\varphi}{1 + K e_o\,\varphi} + z \cdot \operatorname{tg} z\right] + \frac{K s\,\varphi}{z(1 + K e_o\,\varphi)} \cdot \operatorname{tg} z = -2 \cdot \frac{1 - \cos z}{\cos z}$$

mit den Abkürzungen nach Gl. (5a) liefert. Die untere Grenzkraft stimmt wieder mit der im Abschnitt II durch $K = \frac{0{,}25\,E\,J_h\,\pi^2}{s^2}$ angegebenen überein, während der obere Grenzwert uns den 4. Eulerfall mit $K = \frac{4\,E\,J_h\,\pi^2}{s^2}$ einbringt, wenn wir die obere Lagerung ebenfalls starr eingespannt und unverschieblich werden lassen, was zur Voraussetzung hat, daß J_y und ebenfalls J_d unendlich werden.

Beispiel.

Unter Fortsetzung des bisher angewendeten Beispiels erhalten wir mit den gleichen geringfügigen Änderungen, die im Abschnitt III vorgenommen wurden, bei einer Knicklänge von $s_k = 1{,}046 \cdot 3{,}67 = 3{,}84$ m die Knickkraft $K = 214{,}0$ t, die somit, wie zu erwarten war, beträchtlich über den bisher ermittelten Werten liegt. Allerdings haftet ihr auch die Einschränkung an, daß sie sich im elastischen Bereich einstellen muß, was hier nicht mehr nachgewiesen werden soll.

Zusammenfassung.

Um zu einer Übersicht des für alle vier Lagerungsfälle behandelten Beispiels zu gelangen, sind die Ergebnisse einschließlich der allgemeinen Knicklasten der unteren und oberen Grenzen in der Tabelle 1 zusammengestellt worden.

Tabelle 1. Zusammenstellung der vier Lagerungsfälle.

Lagerung nach Bild		I 2b	II 2c	III 3b	IV 3c	Multiplikator
unterer Grenzwert	$K =$	0	0,25	0	0,25	$\frac{E\,J_h\,\pi^2}{s^2}$
oberer Grenzwert	$K =$	1	2,05	2,05	4	
im Beispiel	$K =$	22,4	64,3	128,4	214,0	(t)
im Beispiel	$s_k =$	—	2,00	1,35	1,046	s

Der Einfluß, den die gewählten Lagerungen des Systems auf dessen Stabilität nehmen, geht aus dieser Tabelle sehr klar hervor, so daß sich jede weitere Erläuterung erübrigt, zumal auf alle zu berücksichtigenden Gesichtspunkte und sich ergebenden Besonderheiten schon hinreichend in den verschiedenen Abschnitten hingewiesen worden ist.

Abschließend kann festgestellt werden, daß die Verdrehsteifigkeit der die elastischen Stützungen von Druckstäben übernehmenden Träger nicht schlechthin vernachlässigt werden darf, da deren Einfluß, wie gezeigt wurde, erheblich sein kann und außerdem die dargelegte Theorie, an bekannte Verdrehungswinkel anknüpfend, keine unüberwindlichen Aufgaben mehr stellt, jedenfalls dann nicht, wenn die Übung in der Auflösung transzendenter Gleichungen das nötige Geschick vermittelt hat, das zumindest für den heute bauschaffenden Ingenieur unerläßlich erscheint, nicht zuletzt, um die Möglichkeiten der Materialeinsparung richtig erkennen und ausnutzen zu können.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Organ des Arbeitskreises „Stahlbau" der Fachgruppe Bauwesen im NS.-Bund Deutscher Technik

Schriftwaltung: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 7 RM und Postgeld

15. Jahrgang | BERLIN, 5. Juni 1942 | Heft 12/13

Über die Verdrehung der zugbelasteten Litzen.

Von Gerhard Heinrich in Wien.

1. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit versucht auf Grund einer möglichst vollständigen Analyse der Beanspruchungen und Deformationen einer durch eine Zugkraft und ein Torsionsmoment belasteten Litze eine Theorie der Verdrehung der Litze zu entwickeln. Verschwindet das äußere Torsionsmoment, so erhält man den praktisch wichtigen Sonderfall der frei schwebenden Last.

F. Dreher[1]) war der erste, der eine eingehendere Theorie der Litzenverdrehung zu geben versuchte und auch genaue Messungen durchführte, während J. Gröbl vor ihm nur eine grobe Näherungstheorie entwickelte[2]). Im Gegensatz zu Dreher wird in der vorliegenden Arbeit von einer Kräftezerlegung ausgegangen, die aus den Gleichgewichtsbedingungen für ein Drahtelement hervorgeht. Es wird ferner die bei Dreher unberücksichtigt gelassene Querkontraktion der Drähte in Rechnung gestellt, da sie von derselben Größenordnung ist wie die Dehnung. Das im Litzenquerschnitt wirkende Moment wird schließlich nicht, wie bei Dreher, aus dem Arbeitssatz ermittelt (bei dessen Anwendung auch die Arbeit der Zugkraft berücksichtigt werden müßte), sondern direkt aus den in jedem Drahtquerschnitt wirkenden Kräften und Momenten.

2. Voraussetzungen.

Im nachfolgenden soll eine geschlossene Theorie erster Ordnung im Sinne der Elastizitätslehre zu geben versucht werden. Folgende Voraussetzungen liegen der Berechnung zugrunde:

1. Alle Drähte haben kreisförmigen Querschnitt und sind in symmetrischen Lagen um einen geraden Kerndraht angeordnet, ihre Achsen bilden Schraubenlinien um die Achse des Kerndrahtes.
2. Die Litze wird durch zwei, an den Enden angreifende, entgegengesetzt gleiche Kraftschrauben auf Zug und Torsion beansprucht, deren Zentralachsen mit der Achse des Kerndrahtes (Litzenachse) zusammenfallen.
3. Das Eigengewicht der Litze wird vernachlässigt.
4. Die Drahtquerschnitte sollen durch entsprechende Vorbehandlung im unbelasteten Zustand keine Spannungen aufweisen.
5. Die durch die Belastung erzeugten Spannungen liegen innerhalb der Proportionalitätsgrenze.
6. Die Kraftübertragung an den Litzenenden ist so beschaffen, daß bei der Deformation alle Querschnitte eben bleiben und sich nur als Ganzes verdrehen können.
7. Die durch Reibung zwischen den Drähten der Litze bedingten zusätzlichen Kräfte werden nicht berücksichtigt.

3. Die wichtigsten Bezeichnungen.

n Zahl der um den Kerndraht verseilten Drahtlagen,

z_i Zahl der Drähte der i^{ten} Lage,

α_i Steigungswinkel der Schraubenlinie der Achse eines Drahtes der i^{ten} Lage (für rechtsgängig verseilte Lagen: $0 < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$, für linksgängig verseilte Lagen: $\frac{\pi}{2} < \alpha_i < \pi$),

l_i Länge eines Drahtes der i^{ten} Lage,

l Länge der Litze,

r_i Abstand der Achse eines Drahtes der i^{ten} Lage von der Litzenachse,

ϱ_i, ϱ_0 Radius eines Drahtes der i^{ten} Lage bzw. des Kerndrahtes,

$\frac{f_i}{z_i}$, f_0 Querschnitt eines Drahtes der i^{ten} Lage bzw. des Kerndrahtes,

$\frac{J_i}{z_i}$ Trägheitsmoment der Querschnittsfläche eines Drahtes in bezug auf einen Durchmesser,

$\frac{J_{p_i}}{z_i}$ polares Trägheitsmoment eines Drahtquerschnitts der i^{ten} Lage,

$\frac{M_{b_i}}{z_i}$, $\frac{M_{t_i}}{z_i}$ im Querschnitt eines Drahtes der i^{ten} Lage wirkendes Biegungs- bzw. Torsionsmoment,

$\frac{Q_{b_i}}{z_i}$ Scherkraft im Querschnitt eines Drahtes der i^{ten} Lage,

σ_i, σ_0 mittlere Normalspannung im Querschnitt eines Drahtes der i^{ten} Lage bzw. des Kerndrahtes,

φ_i Winkel, mit dem ein Draht der i^{ten} Lage den Kerndraht umschlingt,

E_i, E_0 Elastizitätsmodul eines Drahtes der i^{ten} Lage bzw. des Kerndrahtes,

G_i, G_0 Gleitmodul eines Drahtes der i^{ten} Lage bzw. des Kerndrahtes,

m_i, m_0 Poissonsche Konstante eines Drahtes der i^{ten} Lage bzw. des Kerndrahtes,

P, M Zugkraft und Drehmoment der beanspruchenden Kraftschraube (M in Richtung von P positiv gezählt),

P_i, M_i durch die i^{te} Drahtlage aufgenommener Anteil der Zugkraft bzw. des Drehmoments.

4. Ableitung der Formel für den Verdrehungswinkel der Litze.

Wird das eine Litzenende an der Verdrehung gehindert, so verdreht sich das andere Litzenende bei Belastung durch die Kraftschraube um den Winkel $\Delta\varphi$, dessen Betrag gesucht werden soll. Hierbei wird von Formeln ausgegangen, die sich aus den Gleichgewichtsbedingungen für ein auf Zug, Torsion und Biegung beanspruchtes, längs einer Schraubenlinie verseiltes Drahtelement ergeben, die vom Verfasser in einer früheren Arbeit entwickelt wurden[3]). Dort wird gezeigt: Wirkt in einem Drahtquerschnitt (etwa der i^{ten} Lage) außer der Zugspannung ein Biegungsmoment $\frac{M_{b_i}}{z_i}$ (Vektor in Richtung der Binormalen der Schraubenlinie) und ein Torsionsmoment $\frac{M_{t_i}}{z_i}$, so entsteht aus Gleichgewichtsgründen eine Scherkraft $\frac{Q_{b_i}}{z_i}$ (in Richtung der Binormalen) vom Betrage

$$\frac{Q_{b_i}}{z_i} = \frac{\cos\alpha_i}{r_i}\left(\frac{M_{b_i}}{z_i}\cdot\sin\alpha_i - \frac{M_{t_i}}{z_i}\cdot\cos\alpha_i\right). \tag{1}$$

Ferner ergibt sich für die Zugkraft und das Drehmoment der i^{ten} Lage in Richtung der Litzenachse

$$P_i = f_i\,\sigma_i\cdot\sin\alpha_i - Q_{b_i}\cdot\cos\alpha_i \tag{2}$$

$$M_i = f_i\,\sigma_i\,r_i\cdot\cos\alpha_i + Q_{b_i}\,r_i\cdot\sin\alpha_i + M_{t_i}\cdot\sin\alpha_i + M_{b_i}\cdot\cos\alpha_i. \tag{3}$$

Aus (2), (3) und (1) folgt

$$P_i = f_i\,\sigma_i\cdot\sin\alpha_i - \frac{\cos^2\alpha_i}{r_i}\left(M_{b_i}\cdot\sin\alpha_i - M_{t_i}\cdot\cos\alpha_i\right) \tag{2a}$$

$$M_i = f_i\,\sigma_i\,r_i\cdot\cos\alpha_i + M_{b_i}\cdot\cos\alpha_i\left(1+\sin^2\alpha_i\right) + M_{t_i}\cdot\sin^3\alpha_i \tag{3a}$$

und daraus

$$P = \sum_{i=0}^{n} P_i = \sum_{i=0}^{n}\left[f_i\,\sigma_i\cdot\sin\alpha_i - \frac{\cos^2\alpha_i}{r_i}\left(M_{b_i}\cdot\sin\alpha_i - M_{t_i}\cdot\cos\alpha_i\right)\right] \tag{4}$$

$$M = \sum_{i=0}^{n} M_i = \sum_{i=0}^{n}\left[f_i\,\sigma_i\,r_i\cdot\cos\alpha_i + M_{b_i}\cdot\cos\alpha_i\left(1+\sin^2\alpha_i\right) + M_{t_i}\cdot\sin^3\alpha_i\right]. \tag{5}$$

---

[1]) F. Dreher, Ein Beitrag zur Theorie der Drehung und Spannungsverteilung bei zugbelasteten Litzen. Die Wasserwirtschaft 1934, S. 57.

[2]) J. Gröbl, Die Drehungsarbeit an Seilen. Elektrotechnische Zeitschrift 1930, S. 1669 u. 1713.

[3]) Siehe G. Heinrich, Zur Statik des Drahtseiles. Wasserwirtschaft und Technik 1937, S. 267.

Bedeuten $\frac{M'_{b_i}}{z_i}$ und $\frac{M'_{t_i}}{z_i}$ das Biegungs- und das Torsionsmoment eines Drahtquerschnitts der i^{ten} Lage, wie sie sich ausbilden würden, wenn man den Draht durch elastische Deformation aus der Geraden in die betreffende Schraubenlinie brächte, so gilt $\frac{M'_{b_i}}{z_i} = \frac{E_i J_i \cdot \cos^2 \alpha_i}{r_i z_i}$ und $\frac{M'_{t_i}}{z_i} = \frac{G_i J_{p_i} \cdot \sin 2\alpha_i}{2 r_i z_i}$, wobei $\frac{\cos^2 \alpha_i}{r_i}$ und $\frac{\sin 2\alpha_i}{2 r_i}$ die Flexion und Torsion der Schraubenlinie darstellen. Bedeutet Δ den Zuwachs einer Größe zufolge der auftretenden elastischen Deformation, so erhält man also M_{b_i} und M_{t_i} nach Punkt 4 der Voraussetzungen, entsprechend einer Theorie erster Ordnung, zu

$$(6) \qquad M_{b_i} = -\frac{E_i J_i \cdot \sin 2\alpha_i}{r_i} \cdot \Delta\alpha_i - \frac{E_i J_i \cdot \cos^2 \alpha_i}{r_i^2} \cdot \Delta r_i$$

$$(7) \qquad M_{t_i} = \frac{\varkappa_i E_i J_i \cdot \cos 2\alpha_i}{r_i} \cdot \Delta\alpha_i - \frac{\varkappa_i E_i J_i \cdot \sin 2\alpha_i}{2 r_i^2} \cdot \Delta r_i .$$

Hierbei ist

$$(8) \qquad \varkappa_i = \frac{J_{p_i} G_i}{J_i E_i} = \frac{2 G_i}{E_i} .$$

Die Verteilung der Zugspannungen sowie der Biegungs- und Torsionsmomente in den einzelnen Lagen stellt ein statisch unbestimmtes Problem dar[4]).

Es gelten die geometrischen Beziehungen

$$(9) \qquad l = l_i \cdot \sin \alpha_i$$

$$(10) \qquad r_i \varphi_i = l_i \cdot \cos \alpha_i .$$

Daraus folgt

$$(9\text{a}) \qquad \Delta l = \sin \alpha_i \, \Delta l_i + l_i \cdot \cos \alpha_i \, \Delta \alpha_i \quad \text{und}$$

$$(10\text{a}) \qquad \Delta \varphi_i = \frac{\cos \alpha_i}{r_i} \cdot \Delta l_i - \frac{l_i \cdot \sin \alpha_i}{r_i} \cdot \Delta \alpha_i - \frac{l_i \cdot \cos \alpha_i}{r_i^2} \cdot \Delta r_i .$$

Ferner folgt aus dem Hookeschen Gesetz

$$(11) \qquad \frac{\Delta l_i}{l_i} = \frac{\sigma_i}{E_i} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma_0}{E_0} .$$

Nach Punkt 6 der Voraussetzungen gilt

$$(10\text{b}) \qquad \Delta \varphi_i = \Delta \varphi ,$$

wenn $\Delta\varphi$ den gemeinsamen Verdrehungswinkel des Litzenquerschnitts im Abstand l vom Fixpunkt bedeutet.

Aus (9), (9a), (10a), (10b) und (11) folgt

$$(12) \qquad \frac{\sigma_i}{E_i} = \frac{\sigma_0}{E_0} - \operatorname{ctg} \alpha_i \, \Delta \alpha_i$$

$$(13) \qquad \frac{\Delta \varphi}{l} = \frac{\sigma_0}{E_0} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \alpha_i}{r_i} - \frac{\Delta \alpha_i}{r_i \cdot \sin^2 \alpha_i} - \frac{\operatorname{ctg} \alpha_i}{r_i^2} \cdot \Delta r_i .$$

Es gilt ferner die geometrische Beziehung

$$(14) \qquad r_i = \sum_{k=0}^{i} 2 \varrho_k - (\varrho_0 + \varrho_i) .$$

Daraus

$$(14\text{a}) \qquad \Delta r_i = 2 \sum_{k=0}^{i} \Delta \varrho_k - (\Delta \varrho_0 + \Delta \varrho_i) .$$

Ferner folgt für die Querkontraktion der Drähte

$$(15) \qquad \frac{\Delta \varrho_i}{\varrho_i} = -\frac{\sigma_i}{m_i E_i} .$$

Aus (14a) und (15) folgt

$$(16) \qquad \Delta r_i = -2 \sum_{k=0}^{i} \frac{\sigma_k \varrho_k}{m_k E_k} + \frac{\sigma_0 \varrho_0}{m_0 E_0} + \frac{\sigma_i \varrho_i}{m_i E_i} .$$

Aus (13) und (16) wird nach einfacher Umformung

$$2 \sum_{k=0}^{i} \frac{\sigma_k \varrho_k}{m_k E_k} = -\frac{\sigma_0}{E_0} \left(r_i - \frac{\varrho_0}{m_0} - \frac{\varrho_i}{m_i} \right) + r_i^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_i \cdot \frac{\Delta \varphi}{l} + \left[r_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i + \left(r_i - \frac{\varrho_i}{m_i} \right) \operatorname{ctg} \alpha_i \right] \Delta \alpha_i .$$

Subtrahiert man hiervon die Gleichung, die man durch die Substitution $i \to i-1$ erhält, so ergibt sich

$$2 \cdot \frac{\varrho_i \sigma_i}{m_i E_i} = -\frac{\sigma_0}{E_0} \left[(r_i - r_{i-1}) - \left(\frac{\varrho_i}{m_i} - \frac{\varrho_{i-1}}{m_{i-1}} \right) \right] + \left[r_i^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_i - r_{i-1}^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i-1} \right] \frac{\Delta \varphi}{l} + \left[r_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i + \left(r_i - \frac{\varrho_i}{m_i} \right) \operatorname{ctg} \alpha_i \right] \Delta \alpha_i - \left[r_{i-1} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i-1} + \left(r_{i-1} - \frac{\varrho_{i-1}}{m_{i-1}} \right) \operatorname{ctg} \alpha_{i-1} \right] \Delta \alpha_{i-1}$$

und daraus bei Verwendung von (12) und (14) nach einiger Umformung

$$(17) \qquad \Delta \alpha_i = \frac{\sigma_0}{E_0} \cdot \frac{(\varrho_i + \varrho_{i-1} + \varrho'_i + \varrho'_{i-1}) \sin 2\alpha_i}{2 (r_i + \varrho'_i \cdot \cos^2 \alpha_i)} - \frac{(r_i^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_i - r_{i-1}^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i-1}) \sin 2\alpha_i}{2 (r_i + \varrho'_i \cdot \cos^2 \alpha_i)} \cdot \frac{\Delta \varphi}{l} + \frac{(r_{i-1} + \varrho'_{i-1} \cdot \cos^2 \alpha_{i-1}) \sin 2\alpha_i}{(r_i + \varrho'_i \cdot \cos^2 \alpha_i) \sin 2\alpha_{i-1}} \cdot \Delta \alpha_{i-1}$$

mit der Abkürzung

$$(17\text{a}) \qquad \frac{\varrho_i}{m_i} = \varrho'_i .$$

Gl. (17) ist eine Rekursion für die Größe $\Delta\alpha_i$ und kann geschrieben werden

$$(18) \qquad \Delta \alpha_i = A_i \cdot \frac{\sigma_0}{E_0} - B_i \cdot \frac{\Delta \varphi}{l} + C_i \Delta \alpha_{i-1} \ldots (i = 2, 3, \ldots n)$$

mit

$$(18\text{a}) \qquad \begin{cases} A_i = \dfrac{(\varrho_i + \varrho_{i-1} + \varrho'_i + \varrho'_{i-1}) \sin 2\alpha_i}{2 (r_i + \varrho'_i \cdot \cos^2 \alpha_i)} \\ B_i = \dfrac{(r_i^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_i - r_{i-1}^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{i-1}) \sin 2\alpha_i}{2 (r_i + \varrho'_i \cdot \cos^2 \alpha_i)} \\ C_i = \dfrac{(r_{i-1} + \varrho'_{i-1} \cdot \cos^2 \alpha_{i-1}) \sin 2\alpha_i}{(r_i + \varrho'_i \cdot \cos^2 \alpha_i) \sin 2\alpha_{i-1}} . \end{cases}$$

Da $\Delta\alpha_0 = 0$, so lautet die erste Gleichung von (18)

$$(18\text{b}) \qquad \Delta \alpha_1 = A_1 \cdot \frac{\sigma_0}{E_0} - B_1 \cdot \frac{\Delta \varphi}{l} ,$$

und die Lösung von (18) ergibt sich durch wiederholtes Einsetzen zu

$$\Delta \alpha_i = A_i \cdot \frac{\sigma_0}{E_0} - B_i \cdot \frac{\Delta \varphi}{l} + C_i \left(A_{i-1} \cdot \frac{\sigma_0}{E_0} - B_{i-1} \cdot \frac{\Delta \varphi}{l} \right) + C_{i-1} \left(\ldots + C_2 \left(A_1 \cdot \frac{\sigma_0}{E_0} - B_1 \cdot \frac{\Delta \varphi}{l} \right) \ldots \right).$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(18\text{c}) \qquad \Gamma_{ik} = \prod_{j=i}^{i-k} C_j ,$$

so läßt sich die Formel für $\Delta\alpha_i$ folgendermaßen schreiben:

$$\Delta \alpha_i = \left(A_i + \sum_{k=0}^{i-2} \Gamma_{ik} A_{i-k-1} \right) \frac{\sigma_0}{E_0} - \left(B_i + \sum_{k=0}^{i-2} \Gamma_{ik} B_{i-k-1} \right) \frac{\Delta \varphi}{l}$$

oder

$$(19) \qquad \Delta \alpha_i = \beta_i \cdot \frac{\sigma_0}{E_0} - \gamma_i \cdot \frac{\Delta \varphi}{l}$$

mit

$$(19\text{a}) \qquad \begin{cases} \beta_i = A_i + \sum\limits_{k=0}^{i-2} \Gamma_{ik} A_{i-k-1} \\ \gamma_i = B_i + \sum\limits_{k=0}^{i-2} \Gamma_{ik} B_{i-k-1} . \end{cases}$$

Ferner folgt aus (13) und (19)

$$(20) \qquad \frac{\Delta r_i}{r_i} = -\lambda_i \cdot \frac{\sigma_0}{E_0} - \mu_i \cdot \frac{\Delta \varphi}{l}$$

mit den Abkürzungen

$$(20\text{a}) \qquad \begin{cases} \lambda_i = \dfrac{2 \beta_i}{\sin 2\alpha_i} - 1 \\ \mu_i = r_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i - \dfrac{2 \gamma_i}{\sin 2\alpha_i} . \end{cases}$$

Schließlich folgt aus (12) und (19)

$$(21) \qquad \frac{\sigma_i}{E_i} = \frac{\sigma_0}{E_0} (1 - \beta_i \cdot \operatorname{ctg} \alpha_i) + \gamma_i \cdot \operatorname{ctg} \alpha_i \cdot \frac{\Delta \varphi}{l} .$$

Durch Einsetzen von (19) und (20) in (6) und (7) erhält man auch Darstellungen für das Biegungs- und Torsionsmoment der i^{ten} Lage:

$$(22) \qquad M_{b_i} = -\frac{E_i J_i}{r_i} (\beta_i \cdot \sin 2\alpha_i - \lambda_i \cdot \cos^2 \alpha_i) \frac{\sigma_0}{E_0} + \frac{E_i J_i}{r_i} (\gamma_i \cdot \sin 2\alpha_i + \mu_i \cdot \cos^2 \alpha_i) \frac{\Delta \varphi}{l}$$

$$(23) \qquad M_{t_i} = \frac{\varkappa_i E_i J_i}{r_i} \left(\beta_i \cdot \cos 2\alpha_i + \frac{\lambda_i}{2} \cdot \sin 2\alpha_i \right) \frac{\sigma_0}{E_0} + \frac{\varkappa_i E_i J_i}{r_i} \left(\mu_i \cdot \frac{\sin 2\alpha_i}{2} - \gamma_i \cdot \cos 2\alpha_i \right) \frac{\Delta \varphi}{l} .$$

Ferner ergibt sich aus den Formeln für das Trägheitsmoment des Kreisquerschnitts:

$$(24) \qquad J_i = \frac{\varrho_i^2}{4} \cdot f_i .$$

---

[4]) Siehe hierzu S. Hudler, Der Elastizitätsmodul des Drahtseiles. Wasserwirtschaft und Technik 1937, S. 271. Hier wird die Spannungsverteilung für unverdrehte Litzen ohne Berücksichtigung der Biegungs- und Torsionsmomente in den Drähten ermittelt.

Setzt man (22) und (23) unter Benutzung von (24) in (4) und (5) ein, so ergeben sich nach einigen Umformungen die Beziehungen:

$$P = K_1 \cdot \frac{\sigma_0}{E_0} + K_2 \cdot \frac{\Delta\varphi}{l} \tag{25}$$

$$M = K_3 \cdot \frac{\sigma_0}{E_0} + K_4 \cdot \frac{\Delta\varphi}{l} \tag{26}$$

mit den Abkürzungen

$$K_1 = \sum_{i=0}^{n} E_i f_i \left\{ (\sin\alpha_i - \beta_i \cdot \cos\alpha_i) + \frac{\varrho_i^2 \cdot \cos^3\alpha_i}{4 r_i^2} \left[\beta_i (2 \cdot \sin^2\alpha_i + \varkappa_i \cdot \cos 2\alpha_i) - \frac{\lambda_i}{2} \cdot \sin 2\alpha_i (1 - \varkappa_i) \right] \right\} \tag{25a}$$

$$K_2 = \sum_{i=0}^{n} E_i f_i \cdot \cos\alpha_i \left\{ \gamma_i - \frac{\varrho_i^2 \cdot \cos^2\alpha_i}{4 r_i^2} \left[\gamma_i (2 \cdot \sin^2\alpha_i + \varkappa_i \cdot \cos 2\alpha_i) + \frac{\mu_i \cdot \sin 2\alpha_i}{2} (1 - \varkappa_i) \right] \right\} \tag{25b}$$

$$K_3 = \sum_{i=0}^{n} E_i f_i \Big[r_i \cdot \cos\alpha_i (1 - \beta_i \cdot \operatorname{ctg}\alpha_i) - \frac{\varrho_i^2}{4 r_i} \Big\{ \beta_i \cdot \sin\alpha_i \left[2 \cdot \cos^2\alpha_i (1 + \sin^2\alpha_i) - \varkappa_i \cdot \cos 2\alpha_i \cdot \sin^2\alpha_i \right] - \lambda_i \cdot \cos\alpha_i \left[\cos^2\alpha_i (1 + \sin^2\alpha_i) + \varkappa_i \cdot \sin^4\alpha_i \right] \Big\} \Big] \tag{26a}$$

$$K_4 = \sum_{i=0}^{n} E_i f_i \Big[r_i \gamma_i \cdot \cos\alpha_i \cdot \operatorname{ctg}\alpha_i + \frac{\varrho_i^2}{4 r_i} \Big\{ \gamma_i \cdot \sin\alpha_i \left[2 \cdot \cos^2\alpha_i (1 + \sin^2\alpha_i) - \varkappa_i \cdot \sin^2\alpha_i \cdot \cos 2\alpha_i \right] + \mu_i \cdot \cos\alpha_i \left[\cos^2\alpha_i (1 + \sin^2\alpha_i) + \varkappa_i \cdot \sin^4\alpha_i \right] \Big\} \Big]. \tag{26b}$$

Aus (25) und (26) folgt schließlich der gesuchte Verdrehungswinkel

$$\Delta\varphi = -l \cdot \frac{K_3 P - K_1 M}{K_1 K_4 - K_2 K_3} \tag{27}$$

mit den Abkürzungen (25a), (25b), (26a), (26b), (20a), (19a), (18c), (8) und (18a). Bei frei hängender Last ist das verdrehungsfreie Seil durch $K_3 = 0$ charakterisiert.

Es lassen sich nun auch die Normalspannungen in den einzelnen Lagen als Funktionen von P und M darstellen.

Aus (21), (25) und (26) ergibt sich

$$\frac{\sigma_i}{E_i} = \frac{\left[K_4 (1 - \beta_i \cdot \operatorname{ctg}\alpha_i) - K_3 \gamma_i \cdot \operatorname{ctg}\alpha_i \right] P - \left[K_2 (1 - \beta_i \cdot \operatorname{ctg}\alpha_i) - K_1 \gamma_i \cdot \operatorname{ctg}\alpha_i \right] M}{K_1 K_4 - K_2 K_3} \tag{28}$$

und

$$\frac{\sigma_0}{E_0} = \frac{K_4 P - K_2 M}{K_1 K_4 - K_2 K_3}. \tag{28a}$$

5. Ableitung einer Näherungsformel für den praktischen Gebrauch.

Die praktische Ausrechnung des Verdrehungswinkels nach den entwickelten Formeln ist ziemlich langwierig, es soll daher eine Näherungsformel abgeleitet werden, die in dem praktisch in Frage kommenden Bereich nur wenig von der genauen Formel abweicht.

Die praktisch vorkommenden Steigungswinkel der Schraubenlinien sind nicht allzu weit von 90° entfernt, $\cos^2\alpha_i$ ist also ziemlich klein. Demgemäß kann man die im Nenner der Größen (18a) vorkommenden Ausdrücke $\varrho_i' \cdot \cos^2\alpha_i$ gegen r_i vernachlässigen. Ferner kann man annehmen, daß die Poissonschen Konstanten für die Drähte aller Lagen gleich sind (bei geringen Verschiedenheiten kann man mit einem mittleren Wert rechnen) und erhält dann aus (18a) bei Benutzung von (14):

$$\left\{ \begin{aligned} A_i &= \frac{(m+1)(r_i - r_{i-1}) \sin 2\alpha_i}{2 m r_i} \\ B_i &= \frac{(r_i^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_i - r_{i-1}^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_{i-1}) \sin 2\alpha_i}{2 r_i} \\ C_i &= \frac{r_{i-1} \cdot \sin 2\alpha_i}{r_i \cdot \sin 2\alpha_{i-1}}. \end{aligned} \right. \tag{29}$$

Aus (18c) folgt

$$\Gamma_{ik} = \prod_{j=i}^{i-k} \cdot \frac{r_{j-1} \cdot \sin 2\alpha_j}{r_j \cdot \sin 2\alpha_{j-1}} = \frac{r_{i-k-1} \cdot \sin 2\alpha_i}{r_i \cdot \sin 2\alpha_{i-k-1}}. \tag{30}$$

Aus (19a) und (29) ergibt sich

$$\beta_i = \frac{(m+1)(r_i - r_{i-1}) \sin 2\alpha_i}{2 m r_i} + \sum_{k=0}^{i-2} \frac{(m+1)(r_{i-k-1} - r_{i-k-2}) \sin 2\alpha_i}{2 m r_i}$$

oder

$$\beta_i = \frac{\sin 2\alpha_i}{2\varkappa} \tag{31}$$

mit

$$\varkappa = \frac{m}{m+1} = \frac{2G}{E}. \tag{31a}$$

Für γ_i erhält man aus (19a) und (29)

$$\gamma_i = \frac{(r_i^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_i - r_{i-1}^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_{i-1}) \sin 2\alpha_i}{2 r_i} + \sum_{k=0}^{i-2} \frac{\sin 2\alpha_i (r_{i-k-1}^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_{i-k-1} - r_{i-k-2}^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_{i-k-2})}{2 r_i}$$

oder

$$\gamma_i = r_i \cdot \sin^2\alpha_i. \tag{32}$$

Aus (20a), (31), (31a) und (32) ergibt sich schließlich

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_i &= 1 - \frac{1}{\varkappa} \\ \mu_i &= 0. \end{aligned} \right. \tag{33}$$

Aus (21) wird nun

$$\frac{\sigma_i}{E_i} = \frac{\sigma_0}{E_0} \left(1 - \frac{\cos^2\alpha_i}{\varkappa} \right) + \frac{r_i}{2} \cdot \sin 2\alpha_i \cdot \frac{\Delta\varphi}{l}. \tag{34}$$

Schließlich kann man in (25a) und (25b) die Glieder mit dem Faktor $\cos^3\alpha_i$ wegen des kleinen Wertes von $\cos\alpha_i$ praktisch vernachlässigen. Man erhält also durch Einsetzen von (31), (32) und (33) in (25a), (25b), (26a) und (26b):

$$K_1 = \sum_{i=0}^{n} E_i f_i \cdot \sin\alpha_i \left(1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \cos^2\alpha_i \right) \tag{35}$$

$$K_2 = \sum_{i=0}^{n} E_i f_i \cdot \sin^2\alpha_i \cdot \cos\alpha_i \tag{36}$$

$$K_3 = \sum_{i=0}^{n} E_i f_i \cdot \cos\alpha_i \left\{ r_i \left(1 - \frac{\cos^2\alpha_i}{\varkappa} \right) - \frac{\varrho_i^2}{4 r_i} \left[\frac{\cos^2\alpha_i}{\varkappa} (1 + \sin^2\alpha_i)(1 + 2 \cdot \sin^2\alpha_i) + \sin^4\alpha_i (2 \cdot \sin^2\alpha_i - \varkappa) \right] \right\} \tag{37}$$

$$K_4 = \sum_{i=0}^{n} E_i f_i \cdot \sin\alpha_i \left\{ r_i^2 \cdot \cos^2\alpha_i + \frac{\varrho_i^2}{4} \cdot \sin^2\alpha_i \left[2 \cdot \cos^2\alpha_i (1 + \sin^2\alpha_i) - \varkappa \cdot \sin^2\alpha_i \cdot \cos 2\alpha_i \right] \right\}. \tag{38}$$

Auf dieselbe Weise wird aus (28):

$$\frac{\sigma_i}{E_i} = \frac{\left[K_4 \left(1 - \frac{\cos^2\alpha_i}{\varkappa} \right) - \frac{1}{2} \cdot K_3 r_i \cdot \sin 2\alpha_i \right] P - \left[K_2 \left(1 - \frac{\cos^2\alpha_i}{\varkappa} \right) - \frac{1}{2} \cdot K_1 r_i \cdot \sin 2\alpha_i \right] M}{K_1 K_4 - K_2 K_3}. \tag{39}$$

6. Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen.

Als Vergleich seien die Ergebnisse von F. Dreher[1]) herangezogen. Den Versuchen lagen zwei vierlagige Litzen mit 61 Drähten zugrunde. Bei beiden stimmten die Drahtdurchmesser, Windungsradien und Schlaglängen überein. Sie unterschieden sich nur dadurch, daß bei der ersten Litze die Lagen abwechselnd nach Rechts- und Linksschrauben verseilt waren (wofür Dreher das Symbol 0 — + — + einführt), während bei der zweiten Litze alle Lagen nach Rechtsschrauben verseilt waren (0 + + + +). Durch Entfernen der einzelnen Lagen konnten hieraus noch sechs weitere Litzen gebildet werden.

Die folgende Tabelle 1 stellt die den Litzenaufbau festlegenden charakteristischen Zahlenwerte zusammen.

Tabelle 1.

0 — + — + und 0 + + + +		0 — + — +	0 + + + +
$Z_0 = 1$	$\varrho_0 = 0{,}575$ mm	$\alpha_0 = 90°$	$\alpha_0 = 90°$
$Z_1 = 6$	$\varrho_1 = 0{,}5$ mm	$\alpha_1 = 106° 43'$	$\alpha_1 = 73° 17'$
$Z_2 = 12$	$\varrho_2 = 0{,}5$ „	$\alpha_2 = 73° 50'$	$\alpha_2 = 73° 50'$
$Z_3 = 18$	$\varrho_3 = 0{,}5$ „	$\alpha_3 = 105° 58'$	$\alpha_3 = 74° 02'$
$Z_4 = 24$	$\varrho_4 = 0{,}5$ „	$\alpha_4 = 74° 07'$	$\alpha_4 = 74° 07'$

Ferner waren einheitlich für alle Drähte die Werte: $E = 19000$ kg/mm², $G = 7320$ kg/mm², $m = 3{,}35$.

Es wurde der Verdrehungswinkel zwischen zwei Querschnitten im Abstand $l = 1000$ mm gemessen bei Belastung der Litze durch eine frei schwebende Last. Um die Wirkung der an sich geringen Reibung auszuschalten, wurde ein bestimmter Lastpunkt das eine Mal durch sukzessive Vermehrung, das andere Mal durch sukzessive Verminderung der Last eingestellt und das arithmetische Mittel der zugehörigen Werte des Verdrehungswinkels gebildet. Da die Reibungskräfte in diesen Fällen

entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen, muß ihre Wirkung — wenn sie genügend klein ist — durch die geschilderte Mittelwertsbildung eliminiert werden können.

Die folgende Tabelle 2 stellt die gemessenen und die nach den genauen sowie nach den Näherungsformeln gerechneten Verdrehungswinkel zusammen. Der Berechnung der prozentualen Fehler liegen die nach den genauen Formeln ermittelten Verdrehungswinkel zugrunde. Sind $|\varDelta \varphi_{\text{ber}}|$ und $|\varDelta \varphi_{\text{vers}}|$ die Absolutwerte des Verdrehungswinkels gemäß der Rechnung und gemäß dem Versuch, so wird der prozentuale Fehler definiert durch $\frac{|\varDelta \varphi_{\text{ber}}| - |\varDelta \varphi_{\text{vers}}|}{|\varDelta \varphi_{\text{vers}}|} \cdot 100.$

Tabelle 2.

Laufende Nr.	Schlagart der Litze	Belastung kg	$\lvert\varDelta\varphi\rvert$ nach genauer Formel Grad	$\lvert\varDelta\varphi\rvert$ nach Näherungsformel Grad	$\lvert\varDelta\varphi\rvert$ nach Versuch Grad	Fehler %
1	0 — + — +	481,4	11,9	11,65	10,65	+ 11,7
2	0 — + —	293,0	19,55	19,53	18,7	+ 4,54
3	0 — +	151,7	38,7	37,8	37,3	+ 3,75
4	0 —	57,5	103,2	96,3	98,3	+ 4,98
5	0 + + + +	481,4	192,6	151,0	209,3	— 8,0
6	0 + + +	293,0	185,5	168,0	177,0	+ 4,8
7	0 + +	151,7	165,0	184,7	152,0	+ 8,55
8	0 +	57,5	103,2	95,5	97,7	+ 5,63

Es fällt zunächst auf, daß bei wechselnder Schlagart die Werte der genauen Formel ziemlich gut mit denen der Näherungsformel übereinstimmen, während die Unterschiede bei gleichbleibender Schlagart größer sind. Ferner sind die prozentualen Fehler, die sich in erträglichen Grenzen halten, mit Ausnahme von Nr. 5 durchweg positiv. Der Grund, warum Nr. 5 aus der Reihe fällt, ist darin zu erblicken, daß hier die Spannung σ_4 nach Gl. (28) negativ wird. Es ergibt sich $\sigma_4 = -5{,}87$ kg/mm², mithin eine Druckspannung. Die äußerste Lage wird sich in diesem Fall also aufblähen und nicht mehr die vorausgesetzte Spannung übertragen.

Im folgenden soll gezeigt werden, wieso das Auftreten eines positiven Fehlers durchaus erwartet werden muß.

7. Fehler, die durch kleine Ungenauigkeiten des Verseilens der Drähte entstehen.

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die Achsen der verseilten Drähte geometrisch genau auf Schraubenlinien liegen. Praktisch wird es jedoch nicht möglich sein, die Drähte vollkommen genau nach Schraubenlinien zu verseilen. Es läßt sich nun zeigen, daß selbst sehr kleine Abweichungen bereits einen merklichen Einfluß auf die Größe des Verdrehungswinkels besitzen.

Um diesen Einfluß rechnerisch zu erfassen, denke man sich etwa die i^{te} Lage in unbelastetem Zustand auf eine Ebene abgerollt. Bildeten die Drähte exakte Schraubenlinien, so müßten sie nach dem Abrollen vollkommen gerade sein. Kleine Abweichungen von der Schraubenlinie entsprächen kleinen Abweichungen von der Geraden. Denkt man sich nun zwei Punkte der Drahtachse, die — längs der Achse des abgewickelten Drahtes gemessen — um die Längeneinheit auseinander liegen, durch eine Gerade verbunden, so sei die Entfernung der Punkte längs der Geraden $1 - \varepsilon_i$. Es gilt $\varepsilon_i \geqq 0$ und $\varepsilon_i \ll 1$. Hierbei ist ε_i als ein mittlerer Wert zu betrachten, der die Wicklungsfehler der i^{ten} Drahtlage charakterisiert. Da man den Kerndraht als gerade voraussetzen darf, ist $\varepsilon_0 = 0$.

Es tritt also in den Formeln (9) und (10) an Stelle von l_i die Größe $l_i(1 - \varepsilon_i)$. Dadurch erhält man:

$$l = l_i (1 - \varepsilon_i) \sin \alpha_i \tag{40}$$

$$r_i \varphi_i = l_i (1 - \varepsilon_i) \cos \alpha_i. \tag{41}$$

Wird nun weiter angenommen, daß die Belastung groß genug ist, um die Drähte wieder längs geodätischer Linien (Schraubenlinien) zu spannen, so folgt daraus, wenn man unter $\varDelta \varepsilon_i$ die durch die Belastung entstehende Änderung von ε_i versteht:

$$\varDelta \varepsilon_i = -\varepsilon_i. \tag{42}$$

Aus (40), (41) und (42) folgt, wenn man nur Größen erster Kleinheitsordnung berücksichtigt,

$$\varDelta l = \sin \alpha_i \varDelta l_i + l_i \cdot \cos \alpha_i \varDelta \alpha_i + \varepsilon_i l \tag{43}$$

$$\varDelta \varphi_i = \varDelta \varphi = \frac{\operatorname{ctg} \alpha_i}{r_i} \cdot \varDelta l - \frac{l}{r_i \cdot \sin^2 \alpha_i} \cdot \varDelta \alpha_i - \frac{l \cdot \operatorname{ctg} \alpha_i}{r_i^2} \cdot \varDelta r_i. \tag{44}$$

Dies gibt in Verbindung mit (11) und (40)

$$\frac{\sigma_i}{E_i} = \frac{\sigma_0}{E_0} - \operatorname{ctg} \alpha_i \varDelta \alpha_i - \varepsilon_i \tag{45}$$

$$\frac{\varDelta \varphi}{l} = \frac{\sigma_0}{E_0} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \alpha_i}{r_i} - \frac{\varDelta \alpha_i}{r_i \cdot \sin^2 \alpha_i} - \frac{\operatorname{ctg} \alpha_i}{r_i^2} \cdot \varDelta r_i. \tag{46}$$

Gl. (45) unterscheidet sich von der analogen Gl. (11) nur durch das Hinzutreten des Gliedes $-\varepsilon_i$, während Gl. (46) mit der analogen Gl. (13) vollkommen übereinstimmt.

Um nun die durch das Hinzutreten der ε_i bedingte Änderung von $\varDelta \varphi$ zu ermitteln, genügt es, da es sich um eine kleine Korrekturgröße handelt, von der Näherungsformel (34) für die σ_i auszugehen, wobei man das Glied $\frac{\cos^2 \alpha_i}{\varkappa}$ gegen eins unterdrücken kann. Man erhält also aus (34) in Verbindung mit (45)

$$\frac{\sigma_i}{E_i} = \frac{\sigma_0}{E_0} + \frac{r_i}{2} \cdot \sin 2\alpha_i \cdot \frac{\varDelta \varphi}{l} - \varepsilon_i. \tag{47}$$

Denkt man sich unter Aufwendung eines kleinen äußeren Moments, aber bei gleichbleibender Zugbelastung denselben Verdrehungswinkel $\varDelta \varphi$ eingestellt wie im Falle verschwindender Wicklungsfehler und bezeichnet man mit δ die Änderung einer Größe gegenüber ihrem Wert bei verschwindendem Wicklungsfehler, so ergibt sich aus (47):

$$\frac{\delta \sigma_i}{E_i} = \frac{\delta \sigma_0}{E_0} - \varepsilon_i. \tag{47a}$$

Ferner folgt aus (4), wenn man das Glied mit M_{b_i} und M_{t_i} wegen des Faktors $\cos^2 \alpha_i$ vernachlässigt,

$$\delta P = 0 = f_0 \delta \sigma_0 + \sum_{i=1}^{n} f_i \delta \sigma_i \cdot \sin \alpha_i. \tag{48}$$

Aus (47a) und (48) ergibt sich

$$\frac{\delta \sigma_0}{E_0} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} E_k \varepsilon_k f_k \cdot \sin \alpha_k}{E_0 f_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} E_k f_k \cdot \sin \alpha_k} \tag{49}$$

$$\frac{\delta \sigma_i}{E_i} = -\left[\varepsilon_i - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} E_k \varepsilon_k f_k \cdot \sin \alpha_k}{E_0 f_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} E_k f_k \cdot \sin \alpha_k}\right]. \tag{49a}$$

Wenn man voraussetzt, daß die ε_i keine zu großen Schwankungen aufweisen, kann man zur Abschätzung des Vorzeichens von (49a) mit einem mittleren Wert der ε_i rechnen und erhält dann aus (49) und (49a) $\delta \sigma_0 > 0$, $\delta \sigma_i < 0$, woraus man ersieht, daß die Drahtspannungen in den einzelnen Lagen durch kleine Wicklungsfehler auf Kosten der Spannung im Kerndraht entlastet werden. Durch Verringerung der Spannungen in den Drahtlagen wird aber das im Litzenquerschnitt wirkende Moment verringert, so daß das äußere Moment, das erforderlich ist, um den ursprünglichen Wert des Verdrehungswinkels wieder herzustellen, dasselbe Vorzeichen haben muß wie der Verdrehungswinkel. Hört also das äußere Moment zu wirken auf, so verringert sich dadurch der absolute Betrag des Verdrehungswinkels. Es muß daher erwartet werden, daß die Rechnung zu hohe Werte des Verdrehungswinkels liefert, was auch tatsächlich der Fall ist[5]).

Um die Größenordnung der Wirkung auf den Verdrehungswinkel abzuschätzen, wird der geringe Einfluß, den die Wicklungsfehler auf die Größen von M_{b_i} und M_{t_i} ausüben, unberücksichtigt gelassen und nur die Wirkung der Änderung von σ_i in Rechnung gestellt. Man erhält dann aus (5)

$$\delta M = \sum_{i=1}^{n} \delta \sigma_i f_i r_i \cdot \cos \alpha_i. \tag{50}$$

Aus (49a) und (50) folgt schließlich:

$$\delta M = -\left\{\sum_{i=1}^{n} E_i \varepsilon_i f_i r_i \cdot \cos \alpha_i - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} E_k \varepsilon_k f_k \cdot \sin \alpha_k}{E_0 f_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} E_k f_k \cdot \sin \alpha_k} \sum_{i=1}^{n} E_i f_i r_i \cdot \cos \alpha_i\right\}. \tag{51}$$

Aus (25) und (26) wird nach den gemachten Voraussetzungen

$$P = K_1' \cdot \frac{\sigma_0 + \delta \sigma_0}{E_0} + K_2' \cdot \frac{\varDelta \varphi}{l}$$

$$\delta M = K_3' \cdot \frac{\sigma_0 + \delta \sigma_0}{E_0} + K_4' \cdot \frac{\varDelta \varphi}{l},$$

wobei K_1', K_2', K_3' und K_4' die durch die Wicklungsfehler modifizierten Werte bedeuten, die sich von K_1, K_2, K_3 und K_4 nur durch Größen erster Kleinheitsordnung unterscheiden.

[5]) Die von Dreher abgeleitete Formel liefert in Widerspruch dazu zu niedrige Werte.

Durch Elimination von $\sigma_0 + \delta\sigma_0$ entsteht hieraus

$$\Delta\varphi = l \cdot \frac{P K_3' - \delta M K_1'}{K_1' K_4' - K_2' K_3'}. \tag{52}$$

Hört das äußere Moment δM zu wirken auf, so stellt sich der neue Verdrehungswinkel $\Delta\varphi + \delta\Delta\varphi$ ein, der sich aus (52) zu

$$\Delta\varphi + \delta\Delta\varphi = -l \cdot \frac{P K_3'}{K_1' K_4' - K_2' K_3'} \tag{53}$$

ergibt. Aus (52) und (53) folgt: $\delta\Delta\varphi = -\frac{\delta M K_1'}{K_1' K_4' - K_2' K_3'}$ oder, bei Vernachlässigung der Größen höherer Kleinheitsordnung,

$$\delta\Delta\varphi = -\frac{\delta M K_1}{K_1 K_4 - K_2 K_3}. \tag{54}$$

Man kann nun fragen, welchen Wert die Größen ε_i annehmen müssen, damit die prozentualen Fehler etwa für die erste Litze (Nr. 1 bis 4 der Tabelle 2) verschwinden. Aus Gl. (54) u. (51) lassen sich durch Verwendung der aus den Nummern 1 bis 4, Tabelle 2, zu berechnenden Werte von $\delta\Delta\varphi$ die erforderlichen Größen der ε_i berechnen. Es ergibt sich:

$\varepsilon_1 = 1{,}29 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_2 = 1{,}42 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_3 = 1{,}615 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_4 = 2{,}03 \cdot 10^{-4}$.

Man sieht, die sich ergebenden Wicklungsfehler wachsen nach außen etwas an und sind von einer Größenordnung, die praktisch durchaus möglich erscheint.

8. Zusammenfassung.

Es werden Formeln abgeleitet, die es gestatten, den Verdrehungswinkel einer auf Zug und Torsion beanspruchten Litze zu berechnen. Der Vergleich der berechneten Werte mit den von F. Dreher versuchsmäßig ermittelten zeigt, daß die entwickelten Formeln etwas zu hohe Werte liefern. Als Ursache hierfür werden kleine Ungenauigkeiten in der Verseilung der Drähte verantwortlich gemacht, und es wird der Nachweis geführt, daß ganz kleine Wicklungsfehler, wie sie praktisch immer zu erwarten sind, vollkommen hinreichen, um die Diskrepanzen zwischen Rechnung und Versuch sowohl dem Vorzeichen wie der Größe nach aufzuklären.

Knickuntersuchung von Rahmenstielen.

Von Dr.-Ing. Georg Schmidt, Berlin.

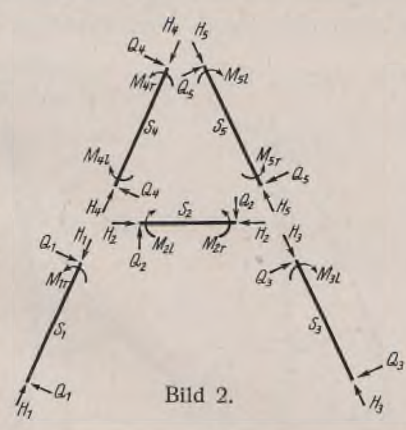
Das Streben nach Baustoffersparnis hat in den letzten Jahren das Fachwerk wieder in den Vordergrund gerückt und den Rahmen, den unser Schönheitsempfinden seiner ruhigen Formen wegen immer mehr bevorzugte, besonders bei größeren Bauten stark verdrängt. Wo es sich jedoch mit dieser Sparsamkeit vereinbaren läßt, ist die Rahmenkonstruktion auch heute noch die angestrebte Bauform und wird gern bei reinen Industrieanlagen verwendet, um dem durch Rohrleitungen und Apparate verwirrten Bild mehr Klarheit zu geben.

Ein hierfür zutreffendes Beispiel ist die in Bild 1 dargestellte einfache Bockstütze. Nach Fortfall der in den Trapezfeldern (1a und 1b) sonst üblichen Fachwerkkreuze werden sämtliche Stabanschlüsse an den Knoten steif ausgebildet, so daß ein Rahmen entsteht. Nun tritt die Frage auf, welche Knicklänge für die schrägen Stiele bei Knicken in der Rahmenebene einzusetzen ist, wieweit also eine Entlastung der Stiele durch die Riegel eintritt, die sich in der Verringerung der Knicklänge (Euler-Länge) ausdrückt. Dabei ist von besonderem Interesse, in welchem Maße die Entlastung anwächst, wenn die Druckkraft in dem einen Stiel gegenüber der in dem anderen kleiner wird oder gar in Zug überwechselt.

Bild 1a bis c.

Da die Lösung dieser Aufgabe eine beträchtliche Rechenarbeit erfordert, zu deren Bewältigung bei Auftreten gleicher Fälle meist nicht die erforderliche Zeit zur Verfügung steht, sei das Ergebnis im folgenden mitgeteilt. Es umfaßt die Knicklängen der Stütze ohne Riegel und der mit einem Riegel für das um je 0,2 veränderte Verhältnis der Stielstabkräfte von + 1,0 bis — 1,0.

Die Knickbedingung wird für die Stütze mit einem Riegel aufgestellt, aus der ohne Schwierigkeit diejenige für die Stütze ohne Riegel abgelesen werden kann. Für den Riegel sei das gleiche Profil verwendet wie für die Stiele, so daß alle Stäbe das gleiche Trägheitsmoment aufweisen. Von dieser Erleichterung wollen wir Gebrauch machen, da sie eine Vereinfachung der Gleichungen mit sich bringt. Die im Knickzustand an den einzelnen Stäben auftretenden Kräfte und Momente sind in Bild 2 eingetragen. Die Normalkräfte aus der äußeren Belastung seien mit S bezeichnet.


Bild 2.

Wieweit die Neigung der Stiele einen Einfluß auf das Ergebnis besitzt, sei vorläufig dahingestellt und wird noch weiter unten besprochen. Zunächst sei ein Verhältnis der Fußbreite zur Höhe der Stütze von 2,0 zu 5,4 angenommen, was einem $\cos\gamma = 0{,}186$ entspricht.

An Gleichungen zur Aufstellung der Knickbedingung stehen zur Verfügung:

Die Viermomentengleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} M_{1r} c_1 + M_{2l} c_2 + M_{2r} s - EJ(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 0 \\ M_{2l} c_2 + M_{2r} s_2 - M_{4l} c_4 - M_{4r} s_4 + EJ(\vartheta_2 - \vartheta_4) = 0 \\ M_{4l} s_4 + M_{4r} c_4 + M_{5l} c_5 + M_{5r} s_5 - EJ(\vartheta_4 - \vartheta_5) = 0 \\ M_{2l} s_2 + M_{2r} c_2 - M_{5r} c_5 - M_{5l} s_5 + EJ(\vartheta_5 - \vartheta_2) = 0 \\ M_{2l} s_2 + M_{2r} c_2 + M_{3l} c_3 - EJ(\vartheta_2 - \vartheta_3) = 0. \end{cases}$$

Hierin bedeutet

$$c_n = \frac{l_n}{\varphi_n^2}\left(1 - \frac{\varphi_n}{\operatorname{tg}\varphi_n}\right) \qquad s_n = \frac{l_n}{\varphi_n^2}\left(\frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n} - 1\right) \qquad \varphi_n = \sqrt{\frac{S_n l_n^2}{EJ}};$$

ϑ_n den Drehwinkel und l_n die Länge des einzelnen Stabes.

Die Gleichgewichtsbedingungen an den einzelnen Stäben (Bild 3):

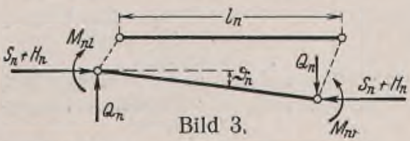
$$(2)\quad \begin{cases} M_{1r} = S_1 l_1 \vartheta_1 + Q_1 l_1 \\ M_{4r} = M_{4l} + S_4 l_4 \vartheta_4 + Q_4 l_4 \\ M_{2r} = M_{2l} + S_2 l_2 \vartheta_2 + Q_2 l_2 \\ M_{5r} = M_{5l} + S_5 l_5 \vartheta_5 + Q_5 l_5 \\ M_{3l} = -S_3 l_3 \vartheta_3 - Q_3 l_3, \end{cases}$$

in denen die Glieder $H_n l_n \vartheta_n$ unterdrückt wurden, weil sie Größen zweiter Ordnung sind, da H_n genau so wie ϑ_n sehr klein ist.

Die Winkelgleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} \vartheta_1 l_1 \cdot \sin\gamma - \vartheta_3 l_3 \cdot \sin\gamma = 0 \\ \vartheta_1 l_1 \cdot \cos\gamma + \vartheta_2 l_2 + \vartheta_3 l_3 \cdot \cos\gamma = 0 \\ \vartheta_4 l_4 \cdot \sin\gamma - \vartheta_5 l_5 \cdot \sin\gamma = 0 \\ \vartheta_4 l_4 \cdot \cos\gamma - \vartheta_2 l_2 + \vartheta_5 l_5 \cdot \cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Sie stellen die Beziehungen zwischen den Drehwinkeln einer kinematischen Kette dar, welche entsteht, wenn sämtliche steifen Anschlüsse der Stäbe an den Knoten aufgehoben werden. Die Beiträge aus den Stablängenänderungen infolge der Normalkräfte sind, wie bei der Formänderung von Rahmen zulässig, außer Ansatz geblieben.


Bild 3.

Die Knotenpunktgleichungen:

Summe der Momente und der waagerechten und lotrechten Kräfte an jedem Knoten gleich Null. Von ihnen werden nur benötigt

$$(4\text{a})\quad M_{1r} = M_{2l} + M_{4l} \qquad M_{4r} = M_{5l} = M \qquad M_{3l} = M_{2r} + M_{5r}.$$

$$(4\text{b})\quad \begin{cases} Q_1 = Q_4 + Q_2 \cdot \cos\gamma - H_2 \cdot \sin\gamma \\ Q_3 = Q_5 + Q_2 \cdot \cos\gamma + H_2 \cdot \sin\gamma. \end{cases}$$

Mit diesen Gleichungen ist die Formänderung der Stütze im Knickzustand eindeutig beschrieben.

Die geometrische Form der Stütze sowie die Art der Belastung — beliebig gerichtete Einzellast am obersten Knotenpunkt — bringen weitere Vereinfachungen, die bei der Verknüpfung vorstehender Gleichungssysteme benutzt werden sollen.

Liegt der Riegel waagerecht in halber Stützenhöhe, so ist

$$l_1 = l_3 = l_4 = l_5 = l \quad \text{und} \quad l_2 = 2\,l \cdot \cos\gamma.$$

Hierdurch werden die Gl. (3)

$$\vartheta_1 = \vartheta_3 = -\vartheta_2 = -\vartheta_4 = -\vartheta_5. \tag{5}$$

Die Stabkräfte aus der äußeren Belastung sind:

$$(6)\quad S_1 = S_4 = S_1' \qquad S_3 = S_5 = S_2' \qquad S_2 = 0.$$

Nunmehr ergeben die Gl. (2), (3), (4a) und (4b)

$$\vartheta_1 = \frac{1}{(S_1' + S_2')\,l}\,(M_{2l} - M_{2r} + M_{4l} - M_{5r}) \tag{7}$$

und damit auch alle anderen Drehwinkel.

Infolge Gl. (6) ist ferner

$$c_1 = c_4 = \frac{l}{2} \cdot \alpha_1,$$

wobei $\alpha_1 = \frac{2}{\varphi_1^2}\left(1 - \frac{\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_1}\right)$ und $\varphi_1 = \sqrt{\frac{S_1' l^2}{EJ}}$,

$$s_4 = \frac{l}{2} \cdot \beta_1, \quad \text{wobei} \quad \beta_1 = \frac{2}{\varphi_1^2}\left(\frac{\varphi_1}{\sin\varphi_1} - 1\right),$$

entsprechend

$$c_3 = c_5 = \frac{l}{2} \cdot \alpha_2 \qquad s_5 = \frac{l}{2} \cdot \beta_2$$

$$c_2 = \frac{2}{3} \cdot l \cdot \cos\gamma \qquad s_2 = \frac{1}{3} \cdot l \cdot \cos\gamma,$$

da für $\varphi_n = 0 \quad c_n = \frac{l_n}{3}$ und $s_n = \frac{l_n}{6}$.

Werden die umgewandelten Werte c_n und s_n sowie Gl. (7) in Gl. (1) eingeführt, dann erhalten diese — noch mit $\frac{2}{l}$ multipliziert — die Form:

$$M_{1r}\,\alpha_1 + M_{2l} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cos\gamma + M_{2r} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cos\gamma - \frac{4\,EJ}{(S_1' + S_2')\,l^2}\,(M_{2l} - M_{2r} + M_{4l} - M_{5r}) = 0$$

$$M_{2l} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cos\gamma + M_{2r} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cos\gamma - M_{4l} \cdot \alpha_1 - M_{4r}\,\beta_1 = 0$$

$$M_{4l}\,\beta_1 + M_{4r}\,\alpha_1 + M_{5l}\,\alpha_2 + M_{5r}\,\beta_2 = 0$$

$$M_{2l} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cos\gamma + M_{2r} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cos\gamma - M_{5r}\,\alpha_2 - M_{5l}\,\beta_2 = 0$$

$$M_{2l} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cos\gamma + M_{2r} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cos\gamma + M_{3l}\,\alpha_2 + \frac{4\,EJ}{(S_1' + S_2')\,l^2}\,(M_{2l} - M_{2r} + M_{4l} - M_{5r}) = 0.$$

Der Faktor

$$\frac{4\,EJ}{(S_1' + S_2')\,l^2} = \frac{4}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2} = 2 \cdot \frac{\varrho_1\,\varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2} = 2\,\omega,$$

wenn $\varrho_n = \frac{2}{\varphi_n^2}$ ist.

Mit Berücksichtigung der Gl. (4a) lautet nun die Bestimmungsdeterminante für die Knicklast:

M_{2l}	M_{4l}	M	M_{5r}	M_{2r}
$+\alpha_1 + \frac{4}{3} \cdot \cos\gamma - 2\,\omega$	$+\alpha_1 - 2\,\omega$		$+2\,\omega$	$+\frac{2}{3} \cdot \cos\gamma + 2\,\omega$
$+\frac{4}{3} \cdot \cos\gamma$	$-\alpha_1$	$-\beta_1$		$+\frac{2}{3} \cdot \cos\gamma$
	$+\beta_1$	$+\alpha_1 + \alpha_2$	$+\beta_2$	
$+\frac{2}{3} \cdot \cos\gamma$		$-\beta_2$	$-\alpha_2$	$+\frac{4}{3} \cdot \cos\gamma$
$+\frac{2}{3} \cdot \cos\gamma + 2\,\omega$	$+2\,\omega$		$+\alpha_2 - 2\,\omega$	$+\alpha_2 + \frac{4}{3} \cdot \cos\gamma - 2\,\omega$

Die Koeffizienten der Momente wurden auf α, β und ϱ zurückgeführt, weil diese im Stahlbau-Kalender angegeben sind, allerdings in Abhängigkeit von $x\,w_n = x\sqrt{\frac{S_n}{S_c}}$, welches gleich $\varphi_n = \sqrt{\frac{S_n\,l^2}{EJ}}$ gesetzt ist[1]). S_c ist eine Vergleichsstabkraft. Dadurch ist in der ganzen Knickbedingung nur die eine Unbekannte x enthalten. Für $S_c = S_1'$ wird in vorliegendem Falle $w_1 = 1$ und $w_2 = \sqrt{\frac{S_2'}{S_1'}}$.

Ist S_2' eine Zugkraft, dann wird

$$\alpha_n = \frac{2}{\varphi_n^2}\left(\frac{\varphi_n}{\mathfrak{Tg}\,\varphi_n} - 1\right) \qquad \beta_n = \frac{2}{\varphi_n^2}\left(1 - \frac{\varphi_n}{\mathfrak{Sin}\,\varphi_n}\right)$$

und $\varrho_n = -\frac{2}{\varphi_n^2}$, die ebenfalls im Stahlbau-Kalender angegeben sind[1]). Der Vorzeichenwechsel ist also bereits in ihnen enthalten, in w_2 sind die absoluten Stabkräfte einzusetzen, und die Werte $x\,w_n$ müssen nur dem Teil der Tabelle entnommen werden, der dem Vorzeichen der Stabkraft S_n entspricht.

Der Wert x, für den die Determinante gleich Null wird, liefert die Knicklast

$$S'_{1k} = \frac{x^2\,EJ}{l^2} \quad \text{oder die Euler-Länge} \quad l_E = \frac{\pi}{x} \cdot l.$$

Die Stütze ohne Riegel kann als oberer Teil der Stütze mit einem Riegel aufgefaßt werden, so daß für sie die mittlere Zeile der Determinante die Knickbedingung darstellt. Infolge der Fußgelenke sind hierbei die Momente M_{4l} und M_{5r} gleich Null zu setzen, und damit entfallen die Werte β_1 und β_2. Die endgültige Knickbedingung lautet also

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

In der folgenden Tafel sind die Werte x und l_E für vorstehende Gleichung und für die obige Determinante in Abhängigkeit von $\frac{S_2'}{S_1'}$ angegeben.

[1]) Stahlbau-Kalender 1941, S. 102.

$\frac{S_2'}{S_1'}$	Stütze ohne Riegel x	Stütze ohne Riegel l_E	Stütze mit einem Riegel x	Stütze mit einem Riegel l_E
+ 1,0	3,141	1,000 l	1,96	1,60 l
+ 0,8	3,296	0,953 l	2,06	1,52 l
+ 0,6	3,439	0,914 l	2,18	1,44 l
+ 0,4	3,558	0,883 l	2,32	1,35 l
+ 0,2	3,653	0,860 l	2,49	1,26 l
0	3,726	0,843 l	2,68	1,17 l
— 0,2	3,784	0,830 l	2,90	1,08 l
— 0,4	3,830	0,820 l	3,12	1,01 l
— 0,6	3,868	0,812 l	3,34	0,94 l
— 0,8	3,900	0,806 l	3,52	0,89 l
— 1,0	3,927	0,800 l	3,64	0,86 l

Zur besseren Veranschaulichung sind die Ergebnisse in Bild 4 in einem Koordinatensystem aufgetragen.

Während bei dem Rahmen ohne Riegel die beiden Werte α genau errechnet wurden, sind sie bei dem Rahmen mit einem Riegel — wie auch β und ϱ — dem Stahlbau-Kalender unter Anwendung geradliniger Interpolation entnommen[1]). Infolgedessen war bei diesem Rahmen eine genauere Berechnung von x und l_E als bis zur zweiten Dezimale sinnwidrig. Für $\frac{S_2'}{S_1'} = -0,4$ wurde der Wert x graphisch aus allen übrigen Werten ermittelt, da er ganz nahe an π liegt und damit die Auflösung der Determinante sehr erschwert.

Die Bilder 5 u. 6 zeigen die Knickform des Rahmens mit einem Riegel für $\frac{S_2'}{S_1'} = +1,0$ und $-1,0$. In beiden Fällen wurde für das Moment M_{2r} der Wert 1 angenommen, wodurch sämtliche übrigen Momente sowie die Normal- und Querkräfte bestimmt sind, aus denen sich die Drehwinkel ϑ und die Durchbiegung der Stäbe gegenüber der Stabsehne leicht errechnen lassen. Bei der Betrachtung der beiden Knickformen darf allerdings nur die Art der Deformation der Stäbe verglichen werden, nicht jedoch deren Größe, da $M_{2r} = 1$ bei $\frac{S_2'}{S_1'} = +1,0$ nicht dem gleichen Knickzustand bei $\frac{S_2'}{S_1'} = -1,0$ zu entsprechen braucht.

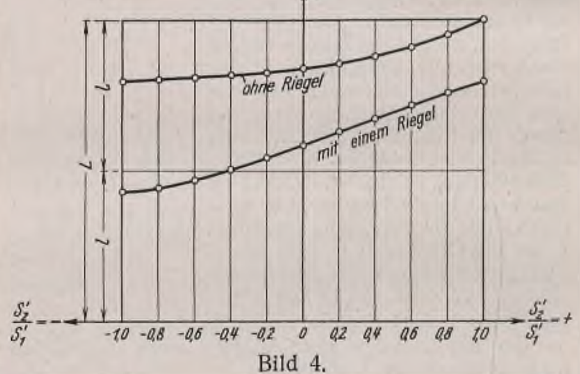


Bild 4.

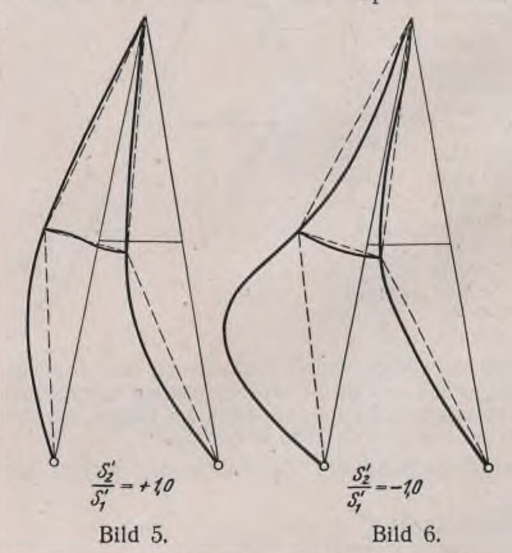


Bild 5. Bild 6.

Der Einfluß von $\cos\gamma$ auf die Knicklast kann allein schon aus der Betrachtung der Determinante als gering vermutet werden, da $\cos\gamma$ nur in acht Elementen erscheint. Zur Bestätigung dieser Annahme wurde die Determinante für $\frac{S_2'}{S_1'} = 0$ nochmals mit $\cos\gamma = 0,225$ und $\cos\gamma = 0,138$ aufgelöst. Diese Werte entsprechen ungefähr den Verhältnissen des Fußabstandes zur Höhe von $\frac{2,5}{5,4}$ und $\frac{1,5}{5,4}$, die wohl als Grenzen für die Formgebung einer solchen Stütze angesehen werden können. Das Ergebnis zeigt die nebenstehende kleine Tafel.

$\cos\gamma$	x	l_E
0,225	2,66	1,18 l
0,186	2,68	1,17 l
0,138	2,70	1,16 l

Der Wert x erfährt also eine kaum merkbare Veränderung, und die Größe von $\cos\gamma$ ist für die Knicklast praktisch ohne Bedeutung.

$+\alpha_1+\frac{8}{3}\cdot\cos\gamma-\frac{9}{4}\cdot\omega$	$+\alpha_1-\frac{9}{4}\cdot\omega$						$+\frac{9}{4}\cdot\omega$	$+\frac{4}{3}\cdot\cos\gamma+\frac{9}{4}\cdot\omega$
$+\frac{8}{3}\cdot\cos\gamma-\frac{3}{4}\cdot\omega$	$-\alpha_1-\frac{1}{4}\cdot\omega$	$-\beta_1-\omega$	$-\beta_1-\omega$		$+\omega$	$+\omega$	$+\frac{1}{4}\cdot\omega$	$+\frac{4}{3}\cdot\cos\gamma+\frac{3}{4}\cdot\omega$
	$+\beta_1+\omega$	$+\alpha_1+\frac{4}{3}\cdot\cos\gamma-2\,\omega$	$+\alpha_1-2\,\omega$		$+2\,\omega$	$+\frac{2}{3}\cdot\cos\gamma+2\,\omega$	$-\omega$	
		$+\frac{4}{3}\cdot\cos\gamma$	$-\alpha_1$	$-\beta_1$		$+\frac{2}{3}\cdot\cos\gamma$		
			$+\beta_1$	$+\alpha_1+\alpha_2$	$+\beta_2$			
		$+\frac{2}{3}\cdot\cos\gamma$		$-\beta_2$	$-\alpha_2$	$+\frac{4}{3}\cdot\cos\gamma$		
	$-\omega$	$+\frac{2}{3}\cdot\cos\gamma+2\,\omega$	$+2\,\omega$		$+\alpha_2-2\,\omega$	$+\alpha_2+\frac{4}{3}\cdot\cos\gamma-2\,\omega$	$+\beta_2+\omega$	
$+\frac{4}{3}\cdot\cos\gamma+\frac{3}{4}\cdot\omega$	$+\frac{1}{4}\cdot\omega$	$+\omega$	$+\omega$		$-\beta_2-\omega$	$-\beta_2-\omega$	$-\alpha_2-\frac{1}{4}\cdot\omega$	$+\frac{8}{3}\cdot\cos\gamma-\frac{3}{4}\cdot\omega$
$+\frac{4}{3}\cdot\cos\gamma+\frac{9}{4}\cdot\omega$	$+\frac{9}{4}\cdot\omega$						$+\alpha_2-\frac{9}{4}\cdot\omega$	$+\alpha_2+\frac{8}{3}\cdot\cos\gamma-\frac{9}{4}\cdot\omega$

Für die Stütze mit zwei Riegeln wird die Knicklast aus der obenstehenden neunreihigen Determinante erhalten. — Von ihrer Auflösung wurde jedoch Abstand genommen, da die hierzu erforderliche Rechenarbeit gegenüber der fünfreihigen Determinante nicht im Verhältnis der Reihenanzahl, sondern bedeutend stärker ansteigt und auch kein wesentlich anderes Ergebnis als für den Rahmen mit einem Riegel zu erwarten ist.

Ermittlung der Stegblechdicke mit Rücksicht auf die Beulsicherheit.

Von Dipl.-Ing. **Marko Radojković**, Hindenburg (O.-S.).

Für die Stegblechdicke von Vollwandträgern ist neben konstruktiven Anforderungen die Beulsicherheit maßgebend. Da das Gewicht des Stegblechs einen wesentlichen Teil des Trägergewichts ausmacht, ist es aus wirtschaftlichen Gründen erwünscht, die Stegbleche nicht dicker zu machen, als die Beulsicherheit und die Konstruktion es erfordern. In der Praxis wird im allgemeinen die Stegblechdicke angenommen und dann die Beulsicherheit nachgewiesen. Dabei zeigt es sich oft, daß die Stegblechdicke im ersten Rechnungsgang entweder zu groß oder zu klein angenommen ist, und es ergibt sich das Bedürfnis, die Stegblechdicke unmittelbar zu bestimmen.

Im folgenden soll ein Weg gezeigt werden, der die unmittelbare Ermittlung der Stegblechdicke bei gegebenen Feldabmessungen und Spannungen gestattet. Die Ermittlung erfolgt graphisch. Zugrunde gelegt sind die neuen Knick- und Beulvorschriften für Stahlbau, DIN E 4114. (Der Unterschied zwischen den neuen und den bisherigen Vorschriften liegt in den zulässigen Sicherheiten und in dem Verlauf der kritischen Vergleichsspannung zwischen $\lambda=60$ und $\lambda=100$.) Die Ableitungen beziehen sich auf den am häufigsten vorkommenden Fall der gleichzeitigen Wirkung von Schub und reiner Biegung.

Ableitung.

a) Plastischer Bereich.

$$\nu=\frac{\sigma_F}{\sqrt{\sigma_1^2+3\,\tau^2}}\,;\ \text{mit}\ \tau_0=\tau t=\frac{Q}{h}\ \text{ist}\ \nu=\frac{\sigma_F}{\sqrt{\sigma_1^2+3\cdot\frac{\tau_0^2}{t^2}}},\ \text{daraus}$$

$$\text{folgt}\ t=\frac{\tau_0}{\sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{\sigma_F}{\nu}\right)^2-\sigma_1^2\right]}}=\frac{\tau_0}{z}=\operatorname{cotg}\alpha,\ \text{wo}\ z=f(\sigma_F,\ \nu,\ \sigma_1).$$

Für konstante σ_F und ν ist $z=\Phi_{(\sigma_1)}$.

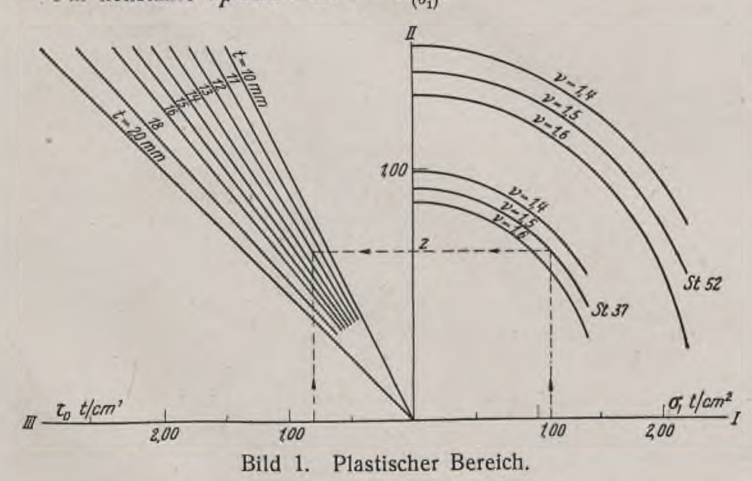


Bild 1. Plastischer Bereich.

In Bild 1 sind im Quadranten I—II die Kurven $z=\Phi_{(\sigma_1)}$ für $\sigma_F=2{,}4$ bzw. 3,6 t/cm² und $\nu=1{,}4$ bzw. 1,5 und 1,6 eingetragen, im Quadranten II—III dagegen sind die Geraden $t=\frac{\tau_0}{z}$ für Stegblechdicken von $t=10$ bis $t=20$ mm dargestellt. Aus den errechneten Spannungen σ_1 und τ_0 kann mit Hilfe der Kurven sehr leicht die erforderliche Stegblechdicke gefunden werden, indem man, wie die Pfeile angeben, den Kreuzungspunkt der Waagerechten z mit der Senkrechten τ_0 bestimmt. Aus der Lage des Kreuzungspunktes zu den t-Linien kann man die erforderliche Stegblechdicke ablesen.

b) Elastischer Bereich.

$$\nu=\frac{\sigma_{v\,k}}{\sqrt{\sigma_1^2+3\,\tau^2}}=\frac{\sqrt{\sigma_1^2+3\,\tau^2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_k}\right)^2+\left(\frac{\tau}{\tau_k}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+3\,\tau^2}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_k}\right)^2+\left(\frac{\tau}{\tau_k}\right)^2}}\,;$$

dadurch ergibt sich folgende Grundgleichung:

$$\left(\frac{\nu\,\sigma_1}{\sigma_k}\right)^2+\left(\frac{\nu\,\tau}{\tau_k}\right)^2=1.$$

Die kritische Druckspannung σ_k beträgt

$$\text{bei}\ \alpha>\frac{2}{3}:\ \sigma_k=k\,\sigma_e=23{,}9\cdot 0{,}1898\left(\frac{100\,t}{b}\right)^2=45\,360\cdot\frac{t^2}{b^2}\ \text{in t/cm}^2,$$

$$\text{bei}\ \alpha<\frac{2}{3}:\ \sigma_k=k\,\sigma_e=\left[23{,}9+45\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)^2+400\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)^4\right]0{,}1898\left(\frac{100\,t}{b}\right)^2,$$

$$\sigma_k=\mu\cdot 45\,360\cdot\frac{t^2}{b^2},\ \text{wobei}\ \mu=1+1{,}88\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)^2+16{,}7\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)^4.$$

Da bei den meisten Konstruktionen $\alpha<\frac{2}{3}$ sehr selten vorkommt und dort, wo dies auch der Fall ist, μ selten viel größer ist als 1,0, wird μ in den weiteren Ausführungen vernachlässigt. Will man aber μ doch berücksichtigen, so ist statt b der Wert $\frac{b}{\sqrt{\mu}}$ einzuführen.

Damit gilt für alle Fälle $\sigma_k=45360\cdot\frac{t^2}{b^2}=\sigma_k^0\,t^2$, wo $\sigma_k^0=45360\cdot\frac{1}{b^2}$; das ist die kritische Druckspannung für eine Blechdicke $t=1{,}0$ cm.

Die kritische Schubspannung beträgt

für $\alpha>1$:

$$\tau_k=\left(5{,}34+\frac{4{,}00\,b^2}{a^2}\right)0{,}1898\left(\frac{100\,t}{b}\right)^2=\left(\frac{10\,135}{b^2}+\frac{7592}{a^2}\right)t^2\ \text{in t/cm}^2,$$

$$\tau_k=\tau_k^0\,t^2,\quad \text{wo}\ \tau_k^0=\frac{10\,135}{b^2}+\frac{7592}{a^2}\,;$$

das ist die kritische Schubspannung für eine Blechdicke $t=1{,}0$ cm.

Für $\alpha < 1{,}0$ ist

$$\tau_k^0 = \frac{10\,135}{a^2} + \frac{7592}{b^2} \text{ in t/cm}^2.$$

In beiden Fällen ist die Zahl 10135 mit dem Quadrat der kleineren Feldseite, die Zahl 7592 mit dem Quadrat der größeren Feldseite zu dividieren.

Mit $\tau_0 = \tau t = \frac{Q}{h}$ lautet nun die Grundgleichung:

$$\left(\frac{\nu\,\sigma_1}{\sigma_k^0}\right)^2 \cdot \frac{1}{t^4} + \left(\frac{\nu\,\tau_0}{\tau_k^0}\right)^2 \cdot \frac{1}{t^6} = 1.$$

Bei konstantem t ist das die Gleichung einer Ellipse:

$$\frac{\xi^2}{P} + \frac{\eta^2}{Q} = 1.$$

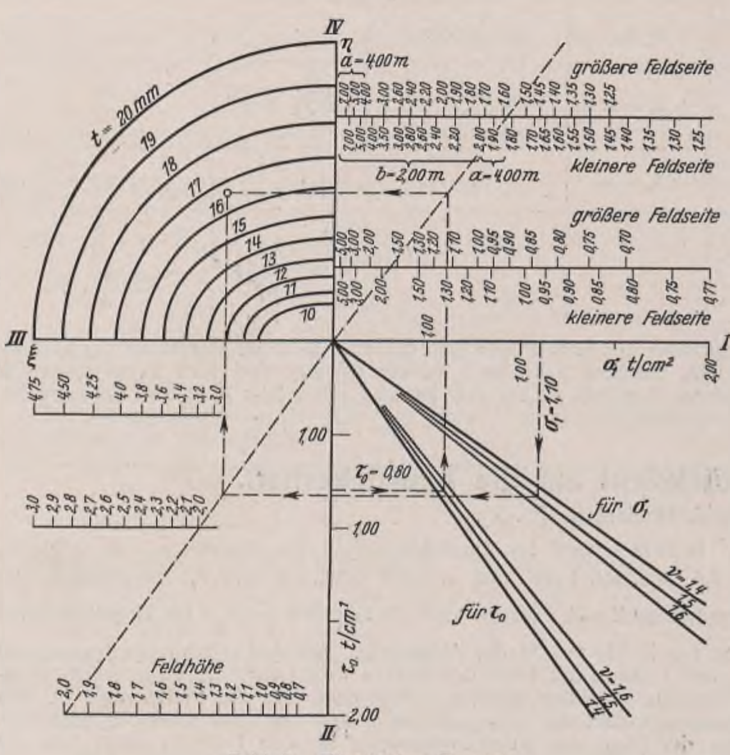


Bild 2. Elastischer Bereich.

In Bild 2 sind diese Ellipsen für Blechdicken von 10 bis 20 mm eingetragen, und zwar im Quadranten III—IV. Es gilt nun die veränderlichen Größen ξ und η zu bestimmen:

$$\xi = \frac{\nu\,\sigma_1}{\sigma_k^0}.$$

Die σ_1 sind auf der Achse I aufgetragen. Man geht von dem errechneten Wert σ_1 aus und multipliziert ihn graphisch mit Hilfe der im Quadranten I—II dargestellten Geraden mit ν. Diese Geraden haben alle die jeweilige Neigung ν. Auf der Achse II ergibt sich der Wert $\nu\,\sigma_1$, der nun noch mit $\frac{1}{\sigma_k^0}$ zu multiplizieren ist. Dies erfolgt in ähnlicher Weise im Quadranten II—III mittels einer Hilfsgeraden, deren Neigung $\frac{1}{\sigma_k^0}$ beträgt. Um aus der gegebenen Stegblechhöhe b, entsprechend dem Ausdruck $\sigma_k^0 = \frac{45\,360}{b^2}$, die Hilfsgerade $\frac{1}{\sigma_k^0}$ zu ermitteln, ist eine Leiter angetragen, deren Teilung die Abschnitte der Hilfsgeraden für verschiedene Stegblechhöhe darstellt. Die Verbindung des Leiterabschnitts mit dem Nullpunkt ergibt die gewünschte Hilfsgerade. Die Projektion des Schnittpunkts der Geraden $\nu\,\sigma_1$ mit der Hilfsgeraden auf die Achse III ergibt somit den Wert $\frac{\nu\,\sigma_1}{\sigma_k^0}$. Die Pfeile in Bild 2 geben die Richtung an, in der man, von σ_1 ausgehend, nacheinander die Werte $\nu\,\sigma_1$ und $\frac{\nu\,\sigma_1}{\sigma_k^0}$ erhält.

Nun ist nur noch die Größe $\eta = \frac{\nu\,\tau_0}{\tau_k^0}$ zu bestimmen. Die τ_0 sind auf der Achse II angetragen. Man erhält aus den errechneten τ_0 mittels der Hilfslinie im Quadranten I—II in ähnlicher Weise wie früher auf der Achse I den Wert $\nu\,\tau_0$. Dieser Wert ist nun noch mit $\frac{1}{\tau_k^0}$ zu multiplizieren:

$$\tau_k^0 = \frac{10\,135}{\text{Quadrat der kleineren Feldseite}} + \frac{7592}{\text{Quadrat der größeren Feldseite}}.$$

Um diese Multiplikation graphisch durchführen zu können, benötigen wir wieder eine Hilfsgerade, deren Neigung $\frac{1}{\tau_k^0}$ ist. Entsprechend dem zweigliedrigen Ausdruck für τ_k^0 ist zur Festlegung dieser Hilfsgeraden im Quadranten I—IV eine Doppelleiter eingetragen, die mit Rücksicht auf die beschränkten Platzverhältnisse in zwei parallele Abschnitte aufgeteilt ist. Die unteren Zahlen dieser Doppelleiter stellen die Werte $\frac{10\,135}{\text{Quadrat der kleineren Feldseite}}$ für Abmessungen von 0,71 m bis ∞ dar. Die oberen Zahlen sind die Werte $\frac{7592}{\text{Quadrat der größeren Feldseite}}$ für Abmessungen von 0,70 m bis ∞. Um die Hilfsgerade zeichnen zu können, braucht man nur die beiden oberen und unteren Abschnitte zu addieren und den Endpunkt mit dem Koordinatennullpunkt zu verbinden. Wir haben bereits auf der Achse I den Wert $\nu\,\tau_0$ erhalten. Geht man in der Pfeilrichtung über die Hilfsgerade $\frac{1}{\tau_k^0}$ weiter, so erhält man auf der Achse IV die Größen $\frac{\nu\,\tau_0}{\tau_k^0}$. Damit haben wir die beiden Werte ξ und η gefunden, ξ auf der Achse III, η auf der Achse IV. Diese Werte bestimmen im Quadranten III—IV einen Punkt der Ellipse $\frac{\xi^2}{P} + \frac{\eta^2}{Q} = 1$. Aus der Lage dieses Punktes zu den gezeichneten Ellipsen kann ohne weiteres die erforderliche Stegblechdicke abgelesen werden.

Zusammenfassung.

Für die Ermittlung der Stegblechdicke nach vorstehenden Ausführungen sind also folgende Werte erforderlich: a, b, σ_1, τ_0, σ_F und ν. a und b sind die gegebenen Feldabmessungen. Aus den Diagrammen ist der Einfluß der Feldlänge leicht zu ersehen. Insbesondere kann sehr schnell geprüft werden, ob die Anordnung von Zwischenaussteifungen zweckmäßig ist oder nicht. σ_1 ist die Randspannung des betrachteten Feldes. Sie ist bekannt, da die Abmessungen des Trägers wenigstens überschläglich festgelegt sind. Der Unterschied, der durch die Änderung der Stegblechdicke eintritt, ist gering und hat bei der Ermittlung der Dicke keine Bedeutung. τ_0 ist von der Querkraft und von der Stegblechhöhe abhängig, also von Größen, die ebenfalls festliegen. σ_F und ν sind in den Vorschriften festgelegt. Untersucht wird sowohl der plastische als auch der elastische Bereich; maßgebend ist die größere sich ergebende Stegblechdicke.

Beispiel.

Für den geschweißten Hauptträger aus St 37 einer Straßenbrücke ist die erforderliche Stegblechdicke zu bestimmen. Die Abmessungen sind aus Bild 3 zu ersehen. Die Randspannung beträgt $\sigma_1 = 1{,}10$ t/cm², die Querkraft $Q = 160$ t. $\tau_0 = \frac{Q}{h} = \frac{160}{200} = 0{,}80$ t/cm. Nach den Vorschriften ist $\sigma_F = 2{,}4$ t/cm² und $\nu = 1{,}5$. Im elastischen Bereich ergibt sich bei Verwendung der Linie für St 37 und $\nu = 1{,}5$, wie die punktierten Linien in Bild 1 zeigen, die erforderliche Dicke $t = 12$ mm.

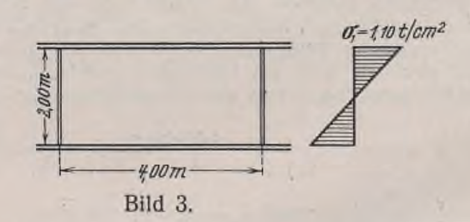


Bild 3.

Im elastischen Bereich werden mit den gegebenen Feldabmessungen zuerst die Hilfslinien eingezeichnet. Im Quadranten II—III ist die Hilfslinie nur von der Feldhöhe abhängig, im gegebenen Falle $b = 2{,}00$ m. Die Teilung 2,00 auf der Leiter wird mit dem Nullpunkt verbunden. Um die Hilfsgerade im Quadranten I—IV zu bestimmen, werden die Abschnitte $a = 4{,}00$ (an der oberen Teilung) und $b = 2{,}00$ an der unteren Teilung) addiert. Die Summe der beiden Abschnitte mit dem Nullpunkt verbunden ergibt die zweite Hilfslinie. Mit den angegebenen Spannungen und mit der Verwendung der zwei Hilfslinien sowie der Linien $\nu = 1{,}5$ ergibt sich im Quadranten I—IV die erforderliche Blechdicke von 17 mm. Die Untersuchung für den elastischen Bereich ergibt die größere Stegblechdicke. Diese Dicke ist auszuführen.

Aus dem Diagramm ist leicht zu ersehen, daß diese Blechdicke für eine Feldlänge von etwa 3,9 bis 5,5 m ausreicht. Bei einer Feldlänge $a = 2{,}00$ m ist $t = 16$ mm, bei $a = \infty$ ist $t = 18$ mm erforderlich. Da bei einem Träger die Feldlänge meist für alle Felder gleich ist, genügt es, für die Ermittlung der Dicke in verschiedenen Feldern nur einmal die Hilfslinien zu bestimmen.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Organ des Arbeitskreises „Stahlbau“ der Fachgruppe Bauwesen im NS.-Bund Deutscher Technik

Schriftwaltung: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 7 RM und Postgeld

15. Jahrgang | BERLIN, 3. Juli 1942 | Heft 14/16

Berechnung des durch Windseile abgespannten Mastes nach der genaueren Theorie.

Von Dr.-Ing. **Alfred Junge**, Baurat, Hamburg.

Übersicht: Der im Boden elastisch eingespannte, durch Windseile zusätzlich gehaltene Mast oder Turm konstanten Trägheitsmoments und gleichbleibender Windbelastung wird nach der genaueren Theorie einer statischen Untersuchung unterzogen, wobei die Knickbedingungen des Mastes zugleich mit aufgestellt und das nichtlineare Gesetz zwischen Windseilzug und Seildurchhang berücksichtigt wird.

Das vom Verfasser besonders betreute Gebiet der durch Windseile oder Kabel abgespannten Funktürme[1]) in Stahl- oder Holzkonstruktion, im besonderen die Ausbildung der durch Reichspatente[2]) geschützten zylinderförmigen hölzernen Maste mit metallenen oder auch hölzernen (z. B. auch Bambus) Windseilen als Abspannglieder, gaben Veranlassung, auch die statischen Verhältnisse dieser Bauwerke einer weiteren Klärung entgegenzuführen.

Das Gesetz zwischen Sehnenlängenänderung und Seilspannung der durchhängenden Seile[3]) wurde dabei, im Sinne des Hookeschen Gesetzes, innerhalb der Gebrauchsgrenzen des praktisch vorliegenden Falles näherungsweise durch ein lineares Gesetz[3]) ersetzt, auf den vorliegenden Fall angewendet.

Für die Aufgabenstellung sind noch die folgenden Annahmen gemacht:

a) Die Zusammendrückung des Mastes durch Axialkräfte bleibt unberücksichtigt;
b) die lotrechten Lasten werden im Seilanschlußpunkt als konzentriert angreifend betrachtet;
c) die Windlasten sind über die Höhe „h“ des Mastes (Bild 1) als konstant angenommen;
d) die Abspannseile sind symmetrisch zur Lotebene der Windrichtung und axial angreifend angeordnet;
e) das Trägheitsmoment des Mastes sei als Mittelwert als konstant angenommen;
f) die Durchbiegung „f“ im Windseilanschlußpunkt halte sich innerhalb relativ kleiner Größen (Bild 1);
g) in der Biegelinien-Differentialgleichung sei für die „Krümmung“ die erste Ableitung gegenüber der Einheit vernachlässigt;
h) die Untersuchungen bewegen sich im elastischen Bereich des Mastmaterials.

Unter den vorstehend gemachten Voraussetzungen ergibt sich:

I. Das Gesetz zwischen H, P und f.

Nach S. 46 der angeführten Dissertation[3]) kann als Gesetz zwischen der Sehnenlängenänderung μ, der Spannung σ, der Vorspannung σ_0, der spezifischen Belastung γ, der der Vorspannung σ_0 zugeordneten spezifischen Belastung γ_0, dem Windseilelastizitätsmaß E_k und der Temperaturänderung Δt der Windseile unter Beachtung der Bezeichnungen von Bild 1, 2a, 2b die Beziehung

$$(1) \qquad \mu = A_1\,\sigma + \frac{B_1}{\sigma^2} + C_1$$

benutzt werden, wenn

$$A_1 = \frac{r}{E_k} \qquad B_1 = -\frac{r^3 \cdot \cos^2\psi}{24} \cdot \gamma^2$$

$$C_1 = \frac{r^3 \cdot \cos^2\psi}{24}\left(\frac{\gamma_0}{\sigma_0}\right)^2 - \frac{\sigma_0\, r}{E_k} + \varepsilon\,\Delta t\, r \quad \text{ist.}$$

Ist der auf die Volumeneinheit des wirksamen Windseilquerschnitts verrechnete, senkrecht zur Windseilsehne gerichtete spezifische Winddruck γ_w, die gleichfalls normal zur Windseilsehne gerichtete Komponente $\gamma \cdot \cos\psi$ der lotrecht gerichteten spezifischen Belastung γ, wird ferner die Resultierende von $\gamma \cdot \cos\psi$ und γ_w mit γ_r bezeichnet, so ist der Wert B_1 der Gl. (1) in diesem Falle durch

$$B_1' = -\frac{r^3\,\gamma_r^2}{24}$$

zu ersetzen, während die der Vorspannung σ_0 zugeordnete spezifische Belastung γ_0 praktisch stets dem Zustande der Windstille gemäß einzusetzen wäre. Die Auflagerdrücke des Windseils, gleichgerichtet mit denen von γ bzw. γ_r, sind

$$R_a = R_b = \frac{\gamma\,F_k\,r}{2} \quad \text{bzw.} \quad = \frac{\gamma_r\,F_k\,r}{2}.$$

Nach S. 49 der Dissertation[3]) läßt sich innerhalb des Spannungsbereichs $\widehat{\sigma_1\,\sigma_2}$ der Gl. (1) unter Beachtung des Fehlerausgleichs nach der Methode der kleinsten Quadrate im Sinne des Minimums die nichtlineare Gl. (1) in die lineare Form

$$(2) \qquad \mu = \overline{A}\,\sigma + \overline{C}$$

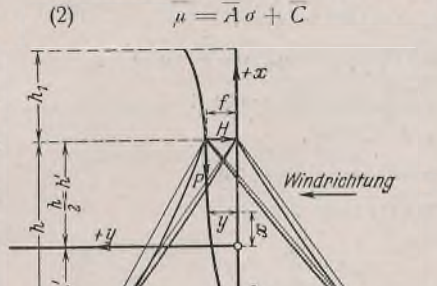


Bild 1. Biegelinien der Turm- und Windseilachsen.

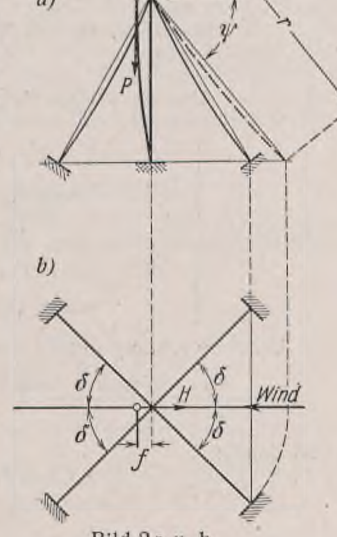


Bild 2a u. b. Windseilanordnung.

überführen, wenn

$$\overline{A} = A_1 + \frac{12\,B_1}{(\sigma_2 - \sigma_1)^3}\left[\ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) - \frac{(\sigma_2^2 - \sigma_1^2)}{2\,\sigma_2\,\sigma_1}\right]$$

$$\overline{C} = \frac{-B_1}{(\sigma_2 - \sigma_1)^3}\left[6\,(\sigma_2 + \sigma_1)\ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) - \frac{4\,(\sigma_2^3 - \sigma_1^3)}{\sigma_2\,\sigma_1}\right] + C_1$$

gesetzt werden.

Der mittlere Fehler, dessen Dimension eine Länge ist, zwischen den Verschiebungswerten (Sehnenlängenänderungen) der Gl. (1) u. (2) ist entsprechend:

$$(3) \qquad m = \frac{\pm B_1}{(\sigma_2 - \sigma_1)^2}\sqrt{\frac{(\sigma_2^3 - \sigma_1^3)\,[\sigma_2^3 - \sigma_1^3 - 15\,\sigma_2\,\sigma_1\,(\sigma_2 - \sigma_1)]}{3\,\sigma_2^3\,\sigma_1^3} + 12 \cdot \ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)\left[\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}{\sigma_2\,\sigma_1} - \ln\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)\right]}.$$

Für die Mehrzahl der praktisch vorliegenden Fälle genügt es vollständig, die Werte $\overline{A}$ und $\overline{C}$ der Gl. (2) zeichnerisch durch Auftragen der Kurve 1 zu bestimmen (s. Bild 3). Bild 3 zeigt die Spannungs-Sehnenlängenänderungs-Kurve für die durch Wind zusätzlich belasteten luvseitigen bzw. die durch Wind zusätzlich entlasteten leeseitigen Windseile. Durch eine Verschiebung des Koordinatensystems um $\sigma = \overline{\sigma}_{0h}$ bzw. $\overline{\sigma}_{0v}$ gemäß Bild 3, wobei sich die Vorspannung σ_0 nur relativ wenig von der Vorspannung σ_0 unterscheiden möge, läßt sich das Spannungs-Dehnungs-Gesetz für die luvseitigen Windseile zunächst ohne Berücksichtigung der Vorspannungen in der Form

$$(4) \qquad \mu_v = \overline{A}_v\,\sigma_v,$$

[1]) Junge, Studien über Konstruktion und Berechnung durch Windkabel versteifter Funktürme. Bauing. 1926, Heft 12 u. 13.

[2]) Junge, DRP. Nr. 665210 und 665262.

[3]) Junge, Berechnung durch Parallelträger versteifter Kettenbrücken mit Windseilen als Raumsysteme. Dissertation Hannover 1926.

das der leeseitigen gemäß

(5) $$\bar{\mu}_h = \bar{A}_h \, \sigma_h$$

darstellen.

Nach Bild 1 u. 2 ist (bei vier Seilabspannungen) die Sehnenlängenänderung der beiden luvseitig gelegenen Windseile:

(6) $$\bar{\mu}_v = f \cdot \cos \delta \cdot \cos \psi$$

bzw. die der leeseitigen:

(7) $$\bar{\mu}_h = -f \cdot \cos \delta \cdot \cos \psi .$$

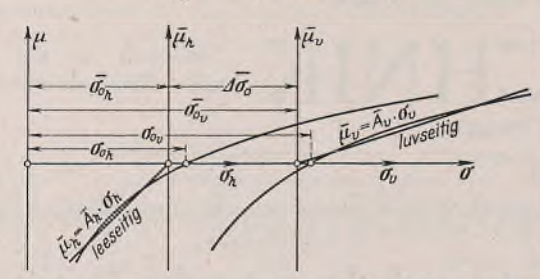


Bild 3. Spannungs-Sehnenlängenänderungs-Kurve der Windseile.

Ist der Windseilquerschnitt der vier Windseile $= F_k$, so folgt für die Horizontal- bzw. Vertikalkomponenten der Luv- bzw. der Lee-Windseile unter Berücksichtigung der Vorspannungen $\bar{\sigma}_{0v}$ bzw. $\bar{\sigma}_{0h}$:

$$H_v = 2 F_k \sigma_v \cdot \cos \psi \cdot \cos \delta + 2 F_k \bar{\sigma}_{0v} \cdot \cos \psi \cdot \cos \delta$$
$$V_v = 2 F_k \sigma_v \cdot \sin \psi + 2 F_k \bar{\sigma}_{0v} \cdot \sin \psi$$
$$H_h = 2 F_k \sigma_h \cdot \cos \psi \cdot \cos \delta + 2 F_k \bar{\sigma}_{0h} \cdot \cos \psi \cdot \cos \delta$$
$$V_h = 2 F_k \sigma_h \cdot \sin \psi + 2 F_k \bar{\sigma}_{0h} \cdot \sin \psi .$$

Damit wird die Horizontalkomponente bzw. die Vertikalkomponente:

$$H = H_v - H_h = 2 F_k \begin{pmatrix} \sigma_v - \sigma_h \\ + \bar{\sigma}_{0v} - \bar{\sigma}_0 \end{pmatrix} \cos \psi \cdot \cos \delta$$

$$V = V_v + V_h = 2 F_k \begin{pmatrix} \sigma_v + \sigma_h \\ + \bar{\sigma}_{0v} + \bar{\sigma}_{0h} \end{pmatrix} \sin \psi .$$

(7a) $$\begin{cases} H = H_0 + 2 F_k (\sigma_v - \sigma_h) \cos \psi \cdot \cos \delta, \\ \quad \text{wenn } H_0 = 2 F_k (\bar{\sigma}_{0v} - \bar{\sigma}_{0h}) \cos \psi \cdot \cos \delta \\ \quad H_0 = 2 F_k \varDelta \bar{\sigma}_0 \cdot \cos \psi \cdot \cos \delta ; \\ V = V_0 + 2 F_k (\sigma_v + \sigma_h) \sin \psi , \\ \quad \text{wenn } V_0 = 2 F_k (\bar{\sigma}_{0v} + \bar{\sigma}_{0h}) \sin \psi . \end{cases}$$

Unter Beachtung der Gl. (4) bis (7) folgt weiter:

$$\sigma_v = \frac{\bar{\mu}_v}{\bar{A}_v} = \frac{f \cdot \cos \delta \cdot \cos \psi}{\bar{A}_v} \qquad \sigma_h = \frac{\bar{\mu}_h}{\bar{A}_h} = -\frac{f \cdot \cos \delta \cdot \cos \psi}{\bar{A}_h}$$

und damit:

$$H = H_0 + 2 F_k \left[\frac{f \cdot \cos \delta \cdot \cos \psi}{\bar{A}_v} + \frac{f \cdot \cos \delta \cdot \cos \psi}{\bar{A}_h} \right] \cos \delta \cdot \cos \psi$$

(8) $$H = H_0 + 2 F_k \left[\frac{1}{\bar{A}_v} + \frac{1}{\bar{A}_h} \right] \cos^2 \delta \cdot \cos^2 \psi \, f = H_0 + \nu f$$

(8a) $$\nu = 2 F_k \left[\frac{1}{\bar{A}_v} + \frac{1}{\bar{A}_h} \right] \cos^2 \delta \cdot \cos^2 \psi$$

$$V = V_0 + 2 F_k \left[\frac{1}{\bar{A}_v} - \frac{1}{\bar{A}_h} \right] \cos \delta \cdot \cos \psi \cdot \sin \psi \, f$$

(9) $$V = V_0 + F_k \left[\frac{1}{\bar{A}_v} - \frac{1}{\bar{A}_h} \right] \cos \delta \cdot \sin (2 \psi) f = V_0 + \beta f$$

(9a) $$\beta = F_k \left[\frac{1}{\bar{A}_v} - \frac{1}{\bar{A}_h} \right] \cos \delta \cdot \sin (2 \psi).$$

Die aus den Vorspannungen $\bar{\sigma}_{0v}$ bzw. $\bar{\sigma}_{0h}$ der Windseile sich ergebende Vertikal- bzw. Horizontalkraft ist nach vorstehendem:

(10) $$V_0 = 2 F_k (\bar{\sigma}_{0v} + \bar{\sigma}_{0h}) \sin \psi , \qquad H_0 = 2 F_k \varDelta \bar{\sigma}_0 \cdot \cos \psi \cdot \cos \delta .$$

Ist das auf den Windseilanschlußpunkt entfallende Eigengewicht aus Mast mit Windseilen einschließlich der Windseillasten $= G$, so ist:

(11) $$P_0 = G + V_0 = G + 2 F_k (\bar{\sigma}_{0v} + \bar{\sigma}_{0h}) \sin \psi$$

und unter Beachtung der Gl. (9):

(12) $$P = P_0 + \beta f .$$

Ist der in Richtung und in dem Sinne von H entfallende Teilbetrag der Windseilwindlasten $= H_w$, so ist in Gl. (10) dieser Betrag zu addieren gemäß:

$$H_0' = H_0 + H_w .$$

Fallen je zwei Windseil-Lotebenen mit der Windrichtungsebene zusammen, während die beiden anderen Windseil-Lotebenen senkrecht zur Windrichtung stehen, so ist in Gl. (7a) bis (10) für die Kräfte H, H_0 und V der Wert $2 F_k$ durch F_k zu ersetzen, während $\delta = 0$ wird und mit Rücksicht auf die senkrecht zur Windrichtung mit $\delta = 90°$ angeordneten, mit der Vorspannung $\bar{\sigma}_{0m}$ versehenen Windseile der Wert V_0 der Gl. (7a) bzw. (10) die Form

(10a) $$V_{0m} = F_k (\bar{\sigma}_{0v} + 2 \bar{\sigma}_{0m} + \bar{\sigma}_{0h}) \sin \psi$$

annimmt.

Aus Gl. (8) bzw. (8a) ist noch ersichtlich, daß bei vierseiliger Abspannung der Wert ν für $\gamma =$ konst von gleicher Größe bleibt, gleichgültig, ob gemäß Bild 2 der Wind unter $\delta = 45°$ in der Diagonalrichtung oder aber in Richtung der Lotebene je zweier Windseile ($\delta = 0$) angreift. Die Beanspruchung der Windseile ist gemäß Gl. (4) bis (7) in beiden Fällen jedoch eine verschiedene.

Es sei noch bemerkt, daß bei zentralsymmetrischer drei- oder mehrseiliger Abspannung des Mastes die vorstehenden Gleichungen durch geringfügige Änderungen leicht den neuen Verhältnissen angepaßt werden können.

II. Die Aufstellung der Differentialgleichung.

Nach Bild 4 ergeben die Gleichgewichtsbedingungen am Bogenelement:

$$+ P \left(\frac{dy}{dx} \right) dx + M + Q \, dx - M - \left(\frac{dM}{dx} \right) dx - p \cdot \frac{dx \, dx}{2} = 0 .$$

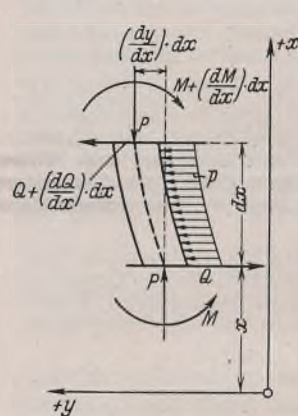


Bild 4. Mastelement.

Daraus:

(13) $$P \left(\frac{dy}{dx} \right) - \frac{dM}{dx} + Q = 0 .$$

Andererseits folgt:

$$Q + \left(\frac{dQ}{dx} \right) dx + p \, dx - Q = 0 .$$

Daraus: $\dfrac{dQ}{dx} = -p$ bzw.

(14) $$Q = -p x + C \nu ,$$

worin ν dem Wert der Gl. (8) u. (8a) entspricht und die Konstante C somit die Dimension einer Länge besitzt.

Aus Gl. (13) u. (14) folgt ferner:

$$\frac{dM}{dx} = P \cdot \frac{dy}{dx} + Q = P \cdot \frac{dy}{dx} - p x + C \nu .$$

Daraus folgt:

$$M = P y - \frac{p x^2}{2} + \nu C x + D_1 .$$

Mit $M = -EJ \cdot \dfrac{d^2 y}{d x^2}$ folgt daher:

$$-EJ \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} = P y - \frac{p x^2}{2} + \nu C x + D_1$$

oder:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{P y}{JE} + \frac{p x^2}{2 JE} - \frac{\nu C x}{JE} - \frac{D_1}{JE} .$$

Ihre Lösung lautet, wenn $\alpha^2 = \dfrac{P}{JE}$ gesetzt wird:

(15) $$y = A \cdot \sin \alpha x + B \cdot \cos \alpha x + \frac{p x^2}{2 P} - \frac{\nu C x}{P} + D ,$$

wenn $D = -\dfrac{D_1}{P} - \dfrac{p JE}{P^2}$ als neue Konstante eingeführt wird.

Für die vier Integrationskonstanten sowie für die Durchbiegung „f“ bestehen die folgenden Randbedingungen (s. Bild 1):

Für $x = -h'$ ist:

$$y_{-h'} = 0, \quad M_{-h'} = -k \vartheta = -k \left(\frac{d y_{-h'}}{dx} \right) = H h - P f - p \cdot \frac{(h + h_1)^2}{2} ;$$

für $x = +h'$ ist:

$$y_{+h'} = f, \quad Q_{+h'} = -p h' + C \nu = p h_1 - H .$$

Nach Gl. (15) ist:

(15a) $$\frac{dy}{dx} = \alpha A \cdot \cos \alpha x - \alpha B \cdot \sin \alpha x + \frac{p x}{P} - \frac{C \nu}{P}$$

(15b) $$\frac{d^2 y}{d x^2} = -\alpha^2 A \cdot \sin \alpha x - \alpha^2 B \cdot \cos \alpha x + \frac{p}{P} .$$

Mit $\alpha h' = \lambda'$ und Einführung der vorstehenden Randbedingungen in Gl. (15), (15a) u. (15b) folgt:

(16) $$0 = -A \cdot \sin \lambda' + B \cdot \cos \lambda' + \frac{p h'^2}{2 P} + \frac{\nu C h'}{P} + D$$

(17) $$+ \frac{P A}{k} \cdot \sin \lambda' - \frac{P B}{k} \cdot \cos \lambda' + \frac{p JE}{P k} = \alpha A \cdot \cos \lambda' + B \alpha \cdot \sin \lambda' - \frac{p h'}{P} - \frac{\nu C}{P}$$

$$(18)\quad f=\frac{\alpha^2 JE}{\nu h-P}\left[-A\cdot\sin\lambda'+B\cdot\cos\lambda'-\frac{p}{\alpha^2 P}\right]+\frac{p\,(h+h_1)^2-2H_0 h}{2\,(\nu h-P)}$$

$$(19)\quad f=A\cdot\sin\lambda'+B\cdot\cos\lambda'+\frac{p\,h'^2}{2P}-\frac{\nu C h'}{P}+D$$

$$(20)\quad f=p\cdot\frac{(h_1+h')}{\nu}-C-\frac{H_0}{\nu}.$$

Mit Gl. (20) = Gl. (18) = Gl. (19) gesetzt, folgt nach einiger Umformung aus Gl. (16) bis (20):

$$(21)\quad 0=-A\cdot\sin\lambda'+B\cdot\cos\lambda'+\frac{p\,h'^2}{2P}+\frac{\nu C h'}{P}+D$$

$$(22)\quad \frac{p\,h'}{P}+\frac{p\,JE}{P\,k}=A\left[\alpha\cdot\cos\lambda'-\frac{P}{k}\cdot\sin\lambda'\right]+B\left[\alpha\cdot\sin\lambda'+\frac{P}{k}\cdot\cos\lambda'\right]-\frac{\nu C}{P}$$

$$(23)\quad \frac{p\,(h_1+h')}{\nu}=\frac{\alpha^2 JE}{\nu h-P}\left[-A\cdot\sin\lambda'+B\cdot\cos\lambda'-\frac{p}{\alpha^2 P}\right]+\frac{p\,(h+h_1)^2}{2\,(\nu h-P)}+C+H_0\left[\frac{1}{\nu}-\frac{h}{(\nu h-P)}\right]$$

$$(24)\quad \frac{p\,(h_1+h')}{\nu}=A\cdot\sin\lambda'+B\cdot\cos\lambda'+\frac{p\,h'^2}{2P}+C\left[1-\frac{\nu h'}{P}\right]+D+\frac{H_0}{\nu}.$$

Addition bzw. Subtraktion der Gl. (21) u. (24) ergeben:

$$(25)\quad \frac{p\,(h_1+h')}{\nu}=2B\cdot\cos\lambda'+\frac{p\,h'^2}{P}+C+2D+\frac{H_0}{\nu}$$

$$(26)\quad \frac{p\,(h_1+h')}{\nu}=2A\cdot\sin\lambda'+C\left[1-\frac{2h'\nu}{P}\right]+\frac{H_0}{\nu}.$$

Gl. (22), (23), (26) u. (25) lauten nach einiger Umformung:

$$(22)\quad K_1=\frac{p\,h'}{P}+\frac{p\,JE}{P\,k}=A\left[\alpha\cdot\cos\lambda'-\frac{P}{k}\cdot\sin\lambda'\right]+B\left[\alpha\cdot\sin\lambda'+\frac{P}{k}\cdot\cos\lambda'\right]-\frac{\nu C}{P}$$

$$(23)\quad K_2=\frac{p\,(h_1+h')}{\nu}-\frac{p\,(h+h_1)^2}{2\,(\nu h-P)}+\frac{p\,JE}{(\nu h-P)\,P}+H_0\left[\frac{h}{\nu h-P}-\frac{1}{\nu}\right]=-\frac{A\,P\cdot\sin\lambda'}{(\nu h-P)}+\frac{B\,P\cdot\cos\lambda'}{(\nu h-P)}+C$$

$$(26)\quad K_3=\frac{p\,(h_1+h')-H_0}{\nu}=A\cdot 2\cdot\sin\lambda'+C\left[1-\frac{\nu h}{P}\right]$$

$$(25)\quad K_4=\frac{p\,(h_1+h')}{\nu}-\frac{p\,h'^2}{P}-\frac{H_0}{\nu}=2B\cdot\cos\lambda'+C+2D.$$

Aus den drei ersten Gleichungen (22), (23) u. (26) lassen sich die Beiwerte A, B, C bestimmen.

Die Nennerdeterminante lautet:

$$N=\left\{\begin{array}{c|c|c}\alpha\cdot\cos\lambda'-\frac{P}{k}\cdot\sin\lambda' & \alpha\cdot\sin\lambda'+\frac{P}{k}\cdot\cos\lambda' & -\frac{\nu}{P}\\ \frac{-P\cdot\sin\lambda'}{\nu h-P} & \frac{+P\cdot\cos\lambda'}{\nu h-P} & +1\\ 2\cdot\sin\lambda' & 0 & 1+\frac{\nu h}{P}\end{array}\right.$$

Nach Ausrechnung und Ordnung folgt:

$$(27)\quad N=-\alpha\cdot\cos(2\lambda')+\sin(2\lambda')\left[\frac{\nu}{\nu h-P}+\frac{P}{k}\right].$$

Ferner ergeben sich entsprechend:

$$(28)\quad N A=\frac{p}{P}\left\{(h_1+h')\,h-\frac{(h+h_1)^2}{2}+\frac{JE}{P}\right\}\alpha\cdot\sin\lambda'+\frac{p}{P}\left\{-h'+\frac{P}{k}(h_1+h')\,h-\frac{P}{2k}(h+h_1)^2+\frac{P\,(h_1+h')}{\nu h-P}-\frac{P\,H_0}{p\,(\nu h-P)}\right\}\cos\lambda'$$

$$(29)\quad N B=\frac{p}{P}\left\{(h_1+h')\left[\frac{P\,h}{k}+\frac{P}{\nu h-P}+2\right]+h'-(h+h_1)^2\left[\frac{P}{2k}+\frac{\nu}{\nu h-P}\right]+\frac{H_0\,(2h\nu-P)}{p\,(\nu h-P)}-\frac{2H_0}{p}+\frac{2JE}{k}+\frac{2JE\nu}{(\nu h-P)\,P}\right\}\sin\lambda'+\alpha\cdot\frac{p}{P}\cdot\cos\lambda'\left\{-h\,(h_1+h')+\frac{(h+h_1)^2}{2}-\frac{JE}{P}\right\}$$

$$(30)\quad N C=\frac{\alpha P\,[p\,(h_1+h')-H_0]}{\nu\,(\nu h-P)}+\frac{2p\alpha}{(\nu h-P)}\left\{\frac{(\nu h-P)(h_1+h')}{\nu}-\frac{(h+h_1)^2}{2}+\frac{JE}{P}+\frac{H_0}{p}\left[h-\frac{(\nu h-P)}{\nu}\right]\right\}\sin^2\lambda'+\frac{P\,p}{(\nu h-P)}\left\{\frac{(\nu h-P)(h_1+h')}{k\,\nu}-\frac{(h+h_1)^2}{2k}-\frac{h'}{P}+\frac{H_0}{k\,p}\left[h-\frac{(\nu h-P)}{\nu}\right]\right\}\sin(2\lambda').$$

Aus Gl. (25) folgt ferner:

$$(31)\quad D=\frac{p\,(h_1+h')-H_0}{2\nu}-\frac{p\,h'^2}{2P}-B\cdot\cos\lambda'-\frac{C}{2}.$$

Da der Wert P gemäß Gl. (12) den noch unbekannten Verschiebungswert „f" enthält, ist außer der Befriedigung der Gl. (27) bis (31) z. B. die Gleichung

$$(20)\quad f=\frac{p\,(h_1+h')-H_0}{\nu}-C$$

zu erfüllen.

Der Rechnungsgang gestaltet sich demnach zweckmäßigerweise wie folgt:

Zunächst ist nach Gl. (20) unter Vernachlässigung von C der Wert „f" und sodann nach Gl. (12) der Wert $P=P_0+\beta f$ näherungsweise zu bestimmen. Mit diesem Näherungswert ist sodann gemäß Gl. (27) bis (31) eine näherungsweise erste Ermittlung der Beiwerte A, B, C, D durchzuführen. Durch einen zweiten Rechnungsgang mit den verbesserten Werten f bzw. P, der sich jedoch durchweg infolge der geringeren Empfindlichkeit der Werte A, B, C, D gegenüber $P=P_0+\beta f$ erübrigt, lassen sich die Beiwerte A, B, C, D relativ schnell und genau ermitteln. Um einen ersten Anhalt für „f" zu gewinnen, kann dieser Wert zunächst bei voller Einspannung des Mastes ($k=\infty$), wie bereits oben angedeutet, gemäß

$$(32)\quad f_{k=\infty}\sim\frac{p\,(h_1+h')-H_0}{\nu},$$

bei gelenkiger Lagerung des Mastes ($k=0$) gemäß

$$(33)\quad f_{k=0}\sim\frac{p}{\nu}\left[h'+\frac{h_1\left(h+\frac{h_1}{2}\right)}{h}\right]-\frac{H_0}{\nu}$$

bestimmt werden. Zwischenwerte sind zu schätzen, wenn sie nicht, ebenfalls mit geringem Zeitaufwand, nach der einfachen Theorie bestimmt werden.

Gl. (27) bis (31) enthalten neben endlichen Werten von k auch die Sonderlösungen für volle Einspannung des Mastes im Boden ($k=\infty$) bzw. für gelenkige Lagerung ($k=0$). Im letzteren Falle sind Gl. (27) bis (31), bevor $k=0$ gesetzt wird, im Zähler und Nenner mit k zu multiplizieren, worauf dann $k=0$ gesetzt werden kann und die Beiwerte A, B, C, D berechnet werden können. Die Ermittlung von k kann unter Berücksichtigung der Grundwerkausbildung über die für den vorliegenden Fall zu schätzenden oder genauer zu bestimmenden Bodenkonstanten (Bodenziffer) erfolgen.

III. Die Ermittlung der Knicksicherheit.

Für die Bestimmung des kritischen Wertes von $P=P_0+\beta f=P_k$, der Knicklast, genügt die Bedingung aus dem Nullwert von N nach Gl. (27).

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\operatorname{tg}(2\lambda')=\frac{\alpha}{\frac{\nu}{\nu h-P}+\frac{P}{k}}.$$

Beachten wir, daß $\alpha=\sqrt{\frac{P}{JE}}$, $2\lambda'=2\alpha h'=\alpha h=\sqrt{\frac{P h^2}{JE}}$ ist, so folgt aus der vorstehenden Knickbedingung nach einiger Umformung:

$$(34)\quad \operatorname{tg}\sqrt{\frac{P h^2}{JE}}=\frac{\sqrt{\frac{P h^2}{JE}}}{\frac{\frac{\nu h^3}{JE}}{\frac{\nu h^3}{JE}-\frac{P h^2}{JE}}+\frac{\frac{P h^2}{JE}}{\frac{k h}{JE}}}.$$

Setzen wir $\sqrt{\frac{P h^2}{JE}}=z$, $\frac{\nu h^3}{JE}=\varphi^2$, $\frac{k h}{JE}=\tau^2$, so folgt:

$$(35)\quad \operatorname{tg} z=\frac{z}{\frac{1}{1-\left(\frac{z}{\varphi}\right)^2}+\left(\frac{z}{\tau}\right)^2}$$

oder:

$$\frac{\operatorname{tg} z}{z} = \frac{1}{\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{z}{\varphi}\right)^2} + \left(\dfrac{z}{\tau}\right)^2}. \tag{36}$$

Die vorstehende Knickbedingung (36) gestattet eine zeichnerische Darstellung in Form von Kurvenscharen, z. B. auf folgendem Wege:

Der Funktionswert $y_1 = \frac{\operatorname{tg} z}{z}$ läßt sich mit z als unabhängige Veränderliche als Kurve darstellen; dasselbe gilt für die Funktion $y_2 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{1-\left(\frac{z}{\varphi}\right)^2} + \left(\frac{z}{\tau}\right)^2}$ mit $\left(\frac{z}{\varphi}\right)^2$ als unabhängige Veränderliche und mit $\left(\frac{z}{\tau}\right)^2$ als Parameterwert, wobei die Rollen der bezeichneten Werte $\left(\frac{z}{\varphi}\right)^2$ bzw. $\left(\frac{z}{\tau}\right)^2$ auch gegeneinander vertauscht werden könnten. Trägt man nunmehr die Kurve y_1 mit der Abszisse z und die Kurvenschar y_2 mit der Abszisse $\left(\frac{z}{\varphi}\right)^2$ von derselben Abszissenachse aus auf, so schneiden Parallelgeraden zur Abszissenachse auf der Kurve „y_1" und auf den Kurvenscharen „y_2" Ordinaten $y_1 = y_2$ ab, die der Bedingung (36) genügen. Nach Schätzung eines Wertes y_1 bzw. z lassen sich leicht die zugeordneten Werte $\left(\frac{z}{\varphi}\right)^2$ bzw. $\left(\frac{z}{\tau}\right)^2$ [durch Rechenstab oder mittels besonderer Kurvendarstellung $z^2 = \varphi^2\left(\frac{z}{\varphi}\right)^2$ bzw. $z^2 = \tau^2\left(\frac{z}{\tau}\right)^2$] ermitteln, und es läßt sich dann an Hand des Diagramms schnell überprüfen, ob diese Werte der Bedingung (36) $y_1 = y_2$ genügen. Auf die Aufstellung eines wie vor erläuterten Diagramms kann hier jedoch verzichtet werden, da z. B. das von Mudrak[4]) aufgestellte, allgemeiner gültige Knickdiagramm auch auf den vorliegenden Fall angewendet werden kann.

Die Knickbedingung (35) bzw. (36) liefert für die Sonderfälle die Eulerknicklasten:

I. $k = \tau^2 = \infty$, $\nu = \beta = \varphi^2 = 0$ (Mast unten „starr" eingespannt, oben, ohne Seilverspannung, frei beweglich) ergibt $\operatorname{tg} z = +\infty$, $z = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{P h^2}{JE} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, den Eulerfall (I);

II. $k = \tau^2 = 0$, $\nu = \beta = \left\{\begin{matrix}\infty \\ \text{endlich} \\ \neq 0\end{matrix}\right\} = \varphi^2$ (Mast unten gelenkig gelagert, oben durch Seile gehalten) ergibt $\operatorname{tg} z = 0$, $z = \pi$ oder $\frac{P h^2}{JE} = \pi^2$, den Eulerfall (II);

III. $k = \infty = \tau^2$, $\nu = \infty = \varphi^2$ (Mast unten „starr" eingespannt, oben durch „starre" Seile unverschieblich gehalten) ergibt $\operatorname{tg} z = z$ $= 4{,}49$ oder $\frac{P h^2}{JE} = 2{,}05\,\pi^2$, den Eulerfall (III).

Für die Mehrzahl der praktisch vorliegenden Fälle hoher, schlanker Masten liegen die Knicklasten bei unterer elastischer Einspannung und elastischem Halten durch die Windseile in der Nähe des Eulerfalles (III).

Die auf den Eulerfall (II) zu beziehende Reduktionszahl für die Knicklänge ist noch: $\lambda = \frac{\pi}{z}$.

IV. Zahlenbeispiel.

Als Beispiel soll nach DRP. Nr. 665 210 ein hölzerner zylindrischer Hohlkörper als Mast mit durch Bitumen imprägnierten Windseilen aus Bambusstäben für Funkturmzwecke vorgeschlagen werden. Um radiotechnische Störungserscheinungen möglichst voll auszuschalten, sind als Verbindungsmittel für den Mast u. a. Hartholzbolzen verwendet worden, während auch die Windseile aus Holz, in diesem Falle aus hochzugfesten Bambusstäben, bestehen und metallene Verbindungsmittel nur in verschwindendem Maße, für den Anschluß des Mastes an das Grundwerk bzw. für den Anschluß der Windseile an den Mast, zur Anwendung vorgeschlagen werden. Der Winddruck auf die Windseile sei, im günstigen Sinne für die Beanspruchung des Mastes wirkend, hier zunächst fortgelassen, so daß damit nach Gl. (10) $\Delta \sigma_0 = H_0 = 0$ wird.

Die Abmessungen bzw. die Materialkonstanten ergeben sich aus folgender Aufstellung:

äußerer Mastdurchmesser = 2,605 m,
Wanddicke des Hohlkörpers = 13 cm,
mittlerer Mastdurchmesser = 2,48 m,
Windbelastung $p = 0{,}425$ t/m,
wirksames $J_w = 0{,}9\,J = 0{,}72$ m⁴,
Höhe $h = 100$ m, $h_1 = 40$ m, $h + h_1 = 140$ m,
$E = E_k = 10^6$ t/m²,
spezifische Belastung der bituminierten Windseile $\gamma = \gamma_0 = 1{,}5$ t/m³,
$\sigma_0 = 1000$ t/m²,

Querschnitt der vier Windseile $F_k = 300$ cm²,
$\psi = 51°\,20'$, $r = 128$ m, $\delta = 45°$,
vier symmetrisch angeordnete Windseile gemäß Bild 2,
$k = \infty$ (Mast unten „starr" eingespannt).

Mit den vorstehenden Werten folgt zunächst aus Gl. (1):

$$\mu = A_1\,\sigma + \frac{B_1}{\sigma^2} + C_1$$

$$A_1 = \frac{1\,r}{E_k} = \frac{128}{10^6}\ \text{m}^3/\text{t}$$

$$B_1 = -\frac{r^3 \cdot \cos^2\psi\,\gamma^2}{24} = -\frac{128^3}{24} \cdot 0{,}625^2 \cdot 1{,}5^2 = -77\,000\ \text{t}^2/\text{m}^3$$

$$C_1 = \frac{r^3 \cdot \cos^2\psi}{24}\left(\frac{\gamma_0}{\sigma_0}\right)^2 - \frac{\sigma_0\,r}{E_k} = \frac{77\,000}{1000^2} - \frac{1000 \cdot 128}{10^6} = -0{,}051\ \text{m}.$$

Demnach ist:

$$\mu = \frac{128}{10^6} \cdot \sigma - \frac{77\,000}{\sigma^2} - 0{,}051\ \text{m}.$$

Tabelle 1.

μ m	σ t/m²
— 0,863	300
— 0,480	400
— 0,297	500
— 0,118	700
0,000	1000
+ 0,109	1500
+ 0,185	2000
+ 0,257	2500
+ 0,325	3000
+ 0,399	3500

Tabelle 1 enthält die einander zugeordneten „Sehnenlängenänderungen" μ und „Spannungen" σ der vier Windseile, deren Bambusmaterialzugfestigkeit mit größer als 7500 t/m² angenommen werden darf.

Bild 5 zeigt das zeichnerische Ergebnis der Werte der Tabelle 1. Desgleichen sind in Bild 5 die linearen Ersatzfunktionen gemäß Gl. (4), (5) unter Beachtung der Verschiebung des Koordinatensystems gemäß Bild 3, nach Augenmaß ermittelt, eingezeichnet worden.

Nach Bild 5 ist demnach:

$$\bar{A}_v = \frac{160}{10^6}\ \text{m}^3/\text{t} \qquad \bar{A}_h = \frac{760}{10^6}\ \text{m}^3/\text{t}.$$

Nach Gl. (8a) ist gemäß Bild 2b, also $\delta = 45°$ und $2\,F_k$, oder für $\delta = 0$ und F_k:

$$\nu = 2 \cdot 0{,}03\left[\frac{10^6}{160} + \frac{10^6}{760}\right]\cos^2 45° \cdot \cos^2 51°\,20'$$

$$\underline{\nu = 88\ \text{t/m}.}$$

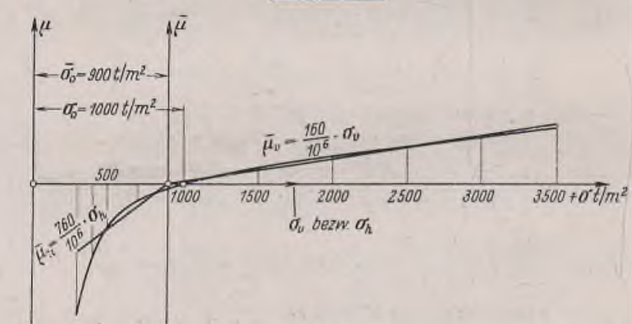


Bild 5.
Spannungs-Sehnenlängenänderungs-Kurve der Windseile.

Nach Gl. (7a) bzw. (9a) ist:

$$H_0 = 0 \qquad \beta = 0{,}03\left[\frac{10^6}{160} - \frac{10^6}{760}\right]\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin 102°\,40'$$

$$\underline{\beta = 102\ \text{t/m}.}$$

Ferner ist nach Gl. (10), (11), (12), da $\bar{\sigma}_{0v} = \bar{\sigma}_{0h} = \bar{\sigma}_0 = 900$ t/m²,

$$V_0 = 4 \cdot 0{,}03 \cdot 900 \cdot 0{,}78 = \underline{84\ \text{t}}$$

$$P_0 = G + V_0 = 90 \cdot 0{,}76 + \frac{4 \cdot 128}{2} \cdot 0{,}03 \cdot 1{,}5 + 84$$
$$= 70 + 11{,}5 + 84 = \underline{165{,}5\ \text{t}.}$$

Nach Gl. (32) ist angenähert mit $H_0 = 0$

$$f_{k=\infty} \sim \frac{0{,}425 \cdot 90}{88} = 0{,}435\ \text{m}.$$

Damit wird

$$\underline{P} = 165{,}5 + 102 \cdot 0{,}435 = 165{,}5 + 44{,}5 = \underline{210\ \text{t}.}$$

Nach Gl. (27) bis (31) folgt damit unter Beachtung der Gl. (14), (15), (15a) u. (15b) mit $M = -EJ \cdot \frac{dy^2}{dx^2}$:

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{JE}} = \sqrt{\frac{210}{0{,}72 \cdot 10^6}} = 0{,}017\,078\ \text{m}^{-1}$$

$$\underline{y = 0{,}393\,595 \cdot \sin\alpha x + 7{,}643\,64 \cdot \cos\alpha x + 0{,}001\,012\,x^2}$$
$$\underline{-\,0{,}001\,625\,x - 7{,}330\,698\,9\ \text{m}}$$

$$\underline{\frac{dy}{dx} = 0{,}006\,722 \cdot \cos\alpha x - 0{,}130\,54 \cdot \sin\alpha x + 0{,}002\,023\,8\,x - 0{,}001\,625}$$

$$\underline{M = 82{,}6552 \cdot \sin\alpha x + 1605{,}15 \cdot \cos\alpha x - 1457{,}15\ \text{m} \cdot \text{t}}$$

$$\underline{Q = -0{,}425\,x + 0{,}341\,25\ \text{t}.}$$

[4]) Mudrak, Die Knickbedingung für den geraden Stab von festem Querschnitt, der an beiden Enden elastisch eingespannt und elastisch gehalten ist. Bauing. 1941, Heft 17/18, S. 153.

Nach Gl. (20) ist: $f = \frac{0{,}425\,(50+40)}{88} - 0{,}003\,877\,9$ m

$$\underline{f = 0{,}4308 \text{ m},}$$

welcher Wert mit dem angenähert ermittelten 0,435 m genügend genau übereinstimmt.

$$\underline{H = \nu f = 88 \cdot 0{,}4308 = 37{,}91 \text{ t}.}$$

Tabelle 2.

x m	y m	Q t	M m · t	(M) m · t	$\frac{(M)-M}{M} \cdot 100$ %
+ 50	+ 0,4308	— 20,91	— 340,14	— 340,14	0,00
+ 25	+ 0,3817	— 10,28	+ 38,15	+ 30,15	— 20,80
0	+ 0,3129	+ 0,34	+ 148,00	+ 134,9	— 8,80
— 25	+ 0,1369	+ 10,96	— 30,31	— 25,95	— 14,30
— 50	+ 0,0000	+ 21,59	— 464,76	— 452,40	— 2,70

Tabelle 2 enthält die Durchbiegungen y, die Querkräfte Q, die Momente M, nach der genaueren Theorie berechnet. Als Vergleich sind die Momente (M) nach der elementaren Theorie daneben aufgeführt, ferner in der letzten Kolonne der Tabelle 2 die Fehler $\frac{(M)-M}{M} \cdot 100$ in Prozenten, bezogen auf den genauen Wert M, welcher, wie zu erwarten war, absolut genommen größer als der aus der elementaren Theorie berechnete Wert (M) ist.

Nach Gl. (35) ergibt sich mit $k = \tau^2 = \infty$ (starre untere Einspannung des Mastes):

$$\operatorname{tg} z = z\left[1 - \left(\frac{z}{\varphi}\right)^2\right].$$

Mit $\left(\frac{z}{\varphi}\right)^2 = \frac{z^2}{\frac{\nu\, h^3}{JE}}$, $\left(\frac{z}{\varphi}\right)^2 = \frac{z^2}{\frac{88 \cdot 100^3}{0{,}72 \cdot 10^6}} = \frac{z^2}{122}$, folgt:

$$\operatorname{tg} z = z\left[1 - \frac{z^2}{122}\right] = z - \frac{z^3}{122}.$$

Dieser Gleichung entspricht ein Wert $z \cong 4{,}44$, der nur wenig von dem Wert $z = 4{,}49$ [Eulerfall (III)] abweicht.

Die Knicklast ist also:

$$P_k = \frac{z^2 JE}{h^2} = \frac{4{,}44^2\, JE}{h^2} = 2{,}0 \cdot \frac{\pi^2 JE}{h^2}$$

$$\underline{P_k = \frac{4{,}44^2 \cdot 0{,}72 \cdot 10^6}{100^2} = 1420 \text{ t}.}$$

Sicherheitsgrad gegen Knicken $= \frac{1420}{210} = 6{,}8$.

Der dem Eulerfall (II) entsprechende, für den vorliegenden Fall zu ermittelnde Reduktionsfaktor für die Knicklänge (s. oben) folgt aus

$$\frac{\pi^2 JE}{(\lambda\, h)^2} = \frac{z^2 JE}{h^2} \quad \text{zu} \quad \lambda = \frac{\pi}{z} \qquad \lambda = \frac{\pi}{4{,}44} = 0{,}7;$$

folglich wäre in den Knickberechnungen nach den Vorschriften anstatt mit $h = 100$ m mit $h'' = 100 \cdot 0{,}7 = 70$ m zu rechnen.

Die Spannung der luvseitigen Windseile folgt aus:

$$\sigma_v' = \bar{\sigma}_0 + \sigma_v = \bar{\sigma}_0 + \frac{f \cdot \cos\delta \cdot \cos\psi}{\bar{A}_v}$$

$$\sigma_v' = 900 + \frac{0{,}4308 \cdot 0{,}707 \cdot 0{,}625 \cdot 10^6}{160}$$

$$\sigma_v' = 900 + 1200 = 2100 \text{ t/m}^2.$$

Der Größtwert der Windseilspannung ergibt sich für $\delta = 0$, da nach Gl. (8a) für diesen Fall der Wert ν unverändert bleibt und geringfügige Änderungen von V bzw. P nach Gl. (9), (9a) u. (12) nach obigen Ausführungen einen nur sehr geringen Einfluß auf die Zahlenwerte des vorberechneten Beispiels haben.

Dieser Größtwert darf also ohne Umrechnung der Aufgabe aus dem Fall $\delta = 0$, $F_k = 1$ praktisch genügend genau bestimmt werden:

$$\sigma_v'' = 900 + \frac{0{,}4308 \cdot 0{,}625 \cdot 10^6}{160}$$

$$\sigma_v'' = 900 + 1680 = 2580 \text{ t/m}^2.$$

Beitrag zur vereinfachten Berechnung schiefer Eisenbahnbrücken.

Von Reichsbahnamtmann **Josef Hailer**, Erfurt.

In neuerer Zeit werden häufig Verkehrswege spitzwinklig gekreuzt, um die gerade Linienführung dieser Wege zu ermöglichen. Die spitzwinkligen Kreuzungen der Verkehrswege bedingen die Herstellung schiefer Überbauten. Je kleiner der Kreuzungswinkel ist, um so schiefer ist der Überbau auszuführen; d. h. um so mehr sind die Auflagerpunkte der beiden Hauptträger gegeneinander verschoben (Bild 1). Bei einer derartigen Stellung der Hauptträger zueinander treten in den Anschlußpunkten der Querträger an die Hauptträger zum Teil recht erhebliche Nebenspannungen auf. Die Hauptträger dieser Überbauten selbst werden durch die senkrecht wirkende Belastung auf Biegung und außerdem auf Verdrehen beansprucht. Durch die starre Verbindung der Fahrbahn mit den Hauptträgern wird das Bauwerk innerlich mehrfach statisch unbestimmt. Die statische Untersuchung solcher Tragwerke erfordert die Lösung einer großen Zahl von Elastizitätsgleichungen und ist recht zeitraubend. Auch wird eine genauere Berechnung, die sämtliche auf die Hauptträger wirkenden Kräfte erfaßt, unter Berücksichtigung der Auflagerung, der schiefen Grundrißausbildung und der verwickelten Lasteinflüsse erhebliche Schwierigkeiten bereiten.

Nachstehend wird der Versuch unternommen, einfache Formeln zur Berechnung des Einflusses der Drehwirkung auf die Vollwandträger eines schiefen Überbaues zu entwickeln. Der Untersuchung wird eine eingleisige stählerne Eisenbahnbrücke mit zwei Vollwandträgern auf festen und beweglichen Auflagern ohne Durchführung der Bettung zugrunde gelegt. Die Fahrbahnabschlüsse über den Widerlagern sind rechtwinklig angenommen. Die Fahrbahn (Querträgerschwerachse) liege in halber Hauptträgerhöhe. Zur Anordnung des Windverbandes ist folgendes zu bemerken: Liegt der Windverband in der Höhe der Querträgerschwerachse, beeinflußt er die Verdrehung der Hauptträger überhaupt nicht oder nur unerheblich. Wird er dagegen in größerem Abstand von dieser Achse angeordnet, so ist zu beachten:

Bei Belastung der Brücke verdrehen sich die einander gegenüberliegenden Hauptträgerquerschnitte nach der gleichen Seite mit etwas unterschiedlichen Drehwinkeln. Der Windverband macht diese seitliche Bewegung mit. Die durch diese unterschiedliche Verdrehung erzeugten Zusatzkräfte sind unerheblich und können von dem an sich reichlich bemessenen Windverband unbedenklich aufgenommen werden. In nachstehender Abhandlung ist der sowieso kaum zu erfassende Einfluß des Windverbandes vernachlässigt worden. Ebenso ist der Einfluß der Auflagerung auf die Verdrehung der Hauptträger unberücksichtigt.

In den Hauptträgern schiefer Brücken treten außer den Biegemomenten auch Drehmomente auf, die Torsionsspannungen und Flanschbiegung hervorrufen. Bei Trägern mit I-förmigem Querschnitt, wie im vorliegenden Falle, können die auftretenden Torsionsspannungen wegen des geringen Einflusses auf das Ergebnis vernachlässigt werden[1]). Die von den Flanschmomenten in der waagerechten Ebene verursachten Biegespannungen sind dagegen erheblich und addieren sich algebraisch zu den aus den Biegemomenten in senkrechter Ebene errechneten. In den nachstehenden Formelentwicklungen werden nur die Flanschmomente in Betracht gezogen; sie erhalten ihren Größtwert bei vollbelasteter Brücke.

Die Bilder 1d u. 1f stellen die elastischen Linien oder Durchbiegelinien des rechten und linken Hauptträgers bei Vollbelastung (Eigengewicht + Verkehrslast) dar. Bei einer geraden Brücke decken sich die beiden Biegelinien; eine die Hauptträger verdrehende Wirkung tritt bei dieser Durchbiegungsweise nicht auf. Bei schiefen Brücken dagegen tritt eine unterschiedliche Durchbiegung der Hauptträger in den einzelnen Brückenquerschnitten auf, die die Hauptträger auf Verdrehen beansprucht. So wird der Trägerobergurt des Hauptträgers vom Querträger 0 : 5 nach innen, vom Querträger 4 : 13 nach außen gebogen. Im Untergurt treten die Ausbiegungen in umgekehrter Weise auf (Bild 1e).

Bei Belastung der Brücke berechnet sich die Durchbiegung der Hauptträger in der Trägermitte aus der bekannten Formel (Bild 1d u. 1f):

$$(1) \qquad \delta_m = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{5}{384} \cdot p\,(l_1 + l)^4,$$

wobei p/m die Belastung eines Hauptträgers, J das Trägheitsmoment (das mittlere J bei abgestuftem Querschnitt), E das Elastizitätsmaß ist.

Die elastische Linie ist eine Parabel mit der bekannten Gleichung

$$y = \frac{4\,h\,x}{l^2}\,(l - x),$$

und mit den Bezeichnungen von Bild 1d lautet diese Gleichung für den rechten Hauptträger

$$\delta_r = \frac{4\,x}{(l_1 + l)^2}\,(l + l_1 - x)\,\delta_m$$

und für den linken Hauptträger (Bild 1f)

$$\delta_l = \frac{4\,(x - l)}{(l_1 + l)^2}\,(2\,l + l_1 - x)\,\delta_m.$$

Die Differenz $\delta_l - \delta_r$ liefert die Gleichung der die Verdrehung erzeugenden elastischen Linie für den linken Hauptträger, δ-Werte genannt:

$$\delta = \delta_l - \delta_r$$

$$\delta = \frac{4}{(l_1 + l)^2}\,[(x - l)\,(2\,l + l_1 - x) - x\,(l + l_1 - x)]\,\delta_m$$

$$(2) \qquad \delta = \frac{4\,l}{(l_1 + l)^2}\,(2\,x - l_1 - 2\,l)\,\delta_m$$

und ist gültig für den Trägerteil l,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } x = l: & \delta = -\dfrac{4\,l\,l_1}{(l + l_1)^2} \cdot \delta_m \\ \text{für } x = l + l_1: & \delta = +\dfrac{4\,l\,l_1}{(l_1 + l)^2} \cdot \delta_m \end{array}\right\} \text{Grenzwerte.}$$

[1]) C. Weber, Die Lehre der Drehungsfestigkeit. VDI, Heft 66.

Für den Trägerteil „l“ des linken Hauptträgers lautet die Gleichung der δ-Werte:

$$\delta = \frac{4(x-l)}{(l_1+l)^2}(2l + l_1 - x)\,\delta_m \tag{2a}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } x = l: & \delta = +\dfrac{4\,l\,l_1}{(l_1+l)^2}\cdot\delta_m \\ \text{für } x = 2l + l_1: & \delta = 0 \end{array}\right\}\ \text{Grenzwerte.}$$

Die Lage des Nullpunktes der δ-Linie für den linken Hauptträger folgt aus Gl. (2) zu:

$$\delta = \frac{4\,l}{(l_1+l)^2}(2x - l_1 - 2l)\,\delta_m = 0$$

$$x = l + \frac{l_1}{2}. \tag{3}$$

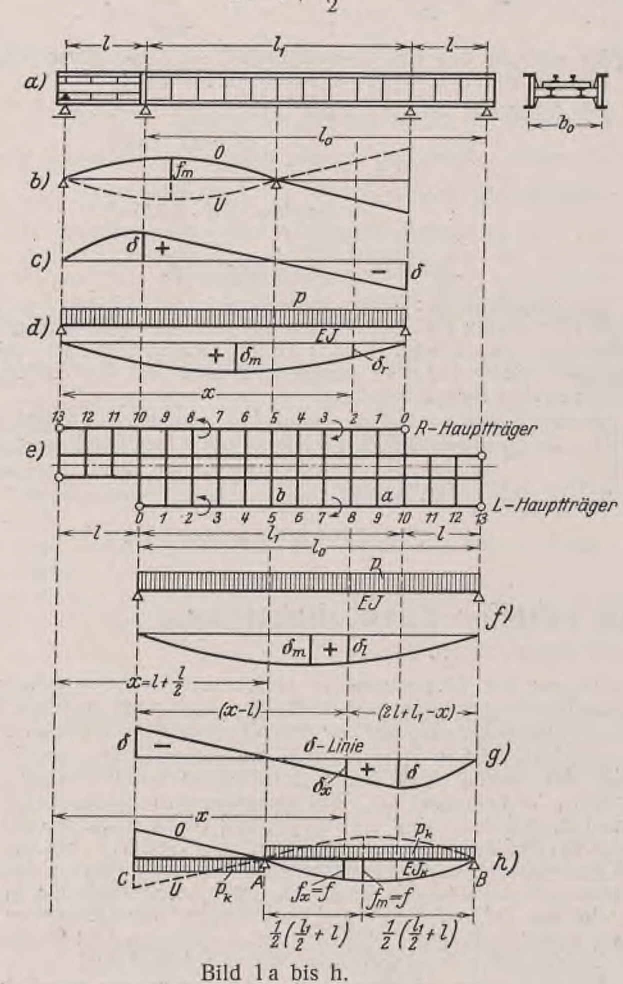


Bild 1a bis h.

Der Verlauf der δ-Linie ist in Bild 1g dargestellt. Die vorstehenden Gleichungen gelten sinngemäß auch für den rechten Hauptträger.

Die unterschiedliche Senkung (Durchbiegung) der Hauptträger in einem Brückenquerschnitt (Querträgeranschluß) stellt Bild 2 dar.

Bei starrer Verbindung der Fahrbahn mit den Hauptträgern unter Annahme unelastischer Querträger lassen sich die Beziehungen aufstellen:

$$\beta = \tau \qquad b_0\,\tau = \delta \qquad \tau = \frac{\delta}{b_0}$$

$$\frac{h}{2}\cdot\beta = f_x \qquad \beta = \frac{2 f_x}{h},$$

$$\text{somit} \qquad \frac{2 f_x}{h} = \frac{\delta}{b_0}$$

$$f_x = \frac{h}{2\,b_0}\cdot\delta, \tag{4}$$

Bild 2.

wobei f_x die Ausbiegung der oberen und unteren Kopfplatten in der waagerechten Ebene im Abstande x vom linken Auflager ist. Die Gurtungen werden als Kragträger auf 2 Stützpunkten aufgefaßt, die waagerecht durch eine gleichmäßig verteilte Last p_k belastet sind. A und B sind die Stützpunkte des Kragträgers. Der Verlauf der elastischen Linie des Obergurts für diesen Belastungsfall ist in Bild 1h dargestellt.

Die Ordinate f_x der elastischen Gleichung erhält man aus der bekannten Formel:

$$f_x = \frac{1}{EJ}\int M_x\,M'\,d_x.$$

In dieser Formel ist (Bild 3) von:

$$0 \div m;\ M_x = \frac{p_k\,l_0}{2}\cdot x - \frac{p_k\,x^2}{2} + M_s\left(\frac{x}{l_0} - 1\right);\ M' = 1\cdot\frac{n}{l_0}\cdot x$$

$$0 \div n;\ M_x = \frac{p_k\,l_0}{2}\cdot x - \frac{p_k\,x^2}{2} + M_s\cdot\frac{x}{l_0};\qquad M' = 1\cdot\frac{m}{l_0}\cdot x$$

und J das Trägheitsmoment (das mittlere J bei abgestuftem Querschnitt), E das Elastizitätsmaß.

Mit diesen Werten folgt aus obiger Gleichung:

$$f_x = \frac{1}{EJ_k}\left\{p\cdot\frac{m}{24}\left[l_0\,(l_0^2 - 2m^2) + m^3\right] + M_s\cdot\frac{m}{6\,l_0}\left[l_0\,(2\,l_0 - 3m) + m^2\right]\right\}$$

Für f_m in der Trägermitte ist zu setzen:

$$l_0 = \frac{l_1}{2} + l = \frac{1}{2}(l_1 + 2l);\quad m = \frac{l_0}{2} = \frac{1}{4}(l_1 + 2l);\quad M_s = p_k\cdot\frac{l_1^2}{8}$$

und es wird:

$$f_m = \frac{1}{EJ_k}\cdot\frac{1}{512}\cdot p_k\,(l_1 + 2l)^2\left[\frac{5}{12}(l_1 + 2l)^2 + l_1^2\right]. \tag{5}$$

Durch die starre Verbindung der Fahrbahn mit den Hauptträgern wird auch die δ-Linie zwangsläufig eine gekrümmte Form annehmen. Die δ-Linie sei eine Parabel; dann berechnet sich der Pfeil in der Trägermitte mit Bezug auf Bild 4 aus Gl. (2):

$$\delta_{x(m)} = \frac{4\,l}{(l_1+l)^2}(2x - l_1 - 2l)\,\delta_m$$

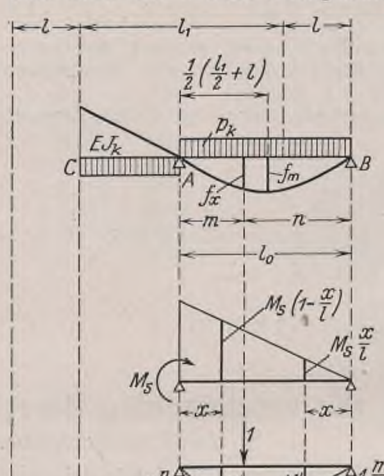


Bild 3.

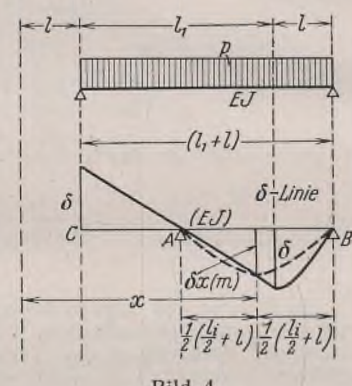


Bild 4.

und mit $x = l + \frac{l_1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{l_1}{2} + l\right) = \frac{3}{4}\cdot l_1 + \frac{3}{2}\cdot l$:

$$\delta_{x(m)} = \frac{4\,l}{(l_1 + l)}\cdot\delta_m.$$

Nach Gl. (1) ist

$$\delta_m = \frac{1}{EJ}\cdot\frac{5}{384}\cdot p\,(l_1 + l)^4,$$

wobei p/m die Belastung eines Hauptträgers ist; mit diesem Wert wird

$$\delta_{x(m)} = \frac{1}{EJ}\cdot\frac{5}{96}\cdot p\,l\,(l_1 + l)^3.$$

Es ist aber auch nach Gl. (4)

$$f_{x(m)} = \frac{h}{2\,b^0}\cdot\delta_{x(m)} = \frac{1}{EJ}\cdot\frac{5}{192}\cdot p\cdot\frac{h\,l}{b_0}(l_1 + l)^3. \tag{6}$$

Die waagerechte Belastung p_k der Trägergurte berechnet sich alsdann aus Gl. (5) u. (6):

$$\frac{1}{EJ_k}\cdot\frac{1}{512}\cdot p_k\,(l_1 + 2l)^2\left[\frac{5}{12}(l_1 + 2l)^2 + l_1^2\right] = \frac{1}{EJ}\cdot\frac{5}{192}\cdot p\cdot\frac{h\,l}{b_0}(l_1 + l)^3$$

$$p_k = \frac{J_k}{J}\cdot\frac{40}{3}\cdot p\cdot\frac{h\,l}{b_0}\cdot\frac{(l_1 + l)^3}{(l_1 + 2l)^2\left[\frac{5}{12}(l_1 + 2l)^2 + l_1^2\right]}. \tag{7}$$

Das Biegungsmoment in der Trägermitte (Träger AB) ist $M_m = p_k\cdot\frac{l_0^2}{8}$, und mit $l_0 = \frac{1}{2}(l_1 + 2l)$ wird

$$M_m = p_k\cdot\frac{(l_1 + 2l)^2}{32}; \tag{8}$$

für p_k den Wert der Gl. (7) eingesetzt:

$$M_m = \frac{J_k}{J}\cdot 5\,p\cdot\frac{h\,l}{b_0}\cdot\frac{(l_1 + l)^2}{5\,(l_1 + 2l)^2 + 12\,l_1^2}. \tag{9}$$

Die waagerechte Belastung p_k auf dem Obergurt läßt sich auch aus der Ausbiegung δ des Kragarmes ermitteln.

Für den Freiträger ist (Bild 5):

$$(10)\qquad f_x = \frac{1}{EJ}\cdot p \cdot \frac{l^4}{8} = \frac{1}{EJ}\cdot p_k \cdot \frac{l_1^4}{128},$$

weiter ist mit $x = l$ aus Gl. (2):

$$\delta_x = -\frac{4\,l\,l_1}{(l_1 + l)^2}\cdot \delta_m.$$

Das —-Zeichen bedeutet, daß der Kragarm sich nach oben biegt.

Nach Gl. (1) ist:

$$\delta_m = \frac{1}{EJ}\cdot \frac{5}{384}\cdot p\,(l_1 + l)^4,$$

Bild 5.

somit

$$\delta_x = \frac{1}{EJ}\cdot\frac{5}{96}\cdot p\,l\,l_1\,(l_1 + l)^2.$$

Nach Gl. (4) ist:

$$(11)\qquad f_x = \frac{h}{2\,b_0}\cdot\delta_x = \frac{1}{EJ}\cdot\frac{5}{192}\cdot p\cdot\frac{h\,l\,l_1}{b_0}\,(l_1 + l)^2.$$

Aus Gl. (10) u. (11) ergibt sich p_k zu:

$$\frac{1}{EJ_k}\cdot p_k\cdot\frac{l_1^4}{128} = \frac{1}{EJ}\cdot\frac{5}{192}\cdot p\cdot\frac{h\,l\,l_1}{b_0}\,(l_1 + l)^2$$

$$(12)\qquad p_k = \frac{J_k}{J}\cdot\frac{10}{3}\cdot p\cdot\frac{h\,l}{b_0\,l_1^3}\,(l_1 + l)^2.$$

Das Biegungsmoment am Auflager A (Freiträger) ist

$$M_s = p_k\cdot\frac{l_0^2}{2}$$

und mit $l_0 = \frac{l_1}{2}$:

$$(13)\qquad M_s = p_k\cdot\frac{l_1^2}{8};$$

für p den Wert der Gl. (12) gesetzt und es wird

$$(14)\qquad M_s = \frac{J_k}{J}\cdot\frac{5}{12}\cdot\frac{h\,l}{b_0\,l_1}\,(l_1 + l)^2.$$

Bei Eisenbahnbrücken sind die vorstehenden Formeln noch mit der Stoßzahl φ zu multiplizieren.

Sind, wie in vorliegendem Falle, sämtliche Querträger von gleichem Querschnitt gleich stark belastet, dann verdrehen sich die beiden Tragwände infolge der Durchbiegung der Querträger gleichmäßig nach innen. Bei einer derartigen Belastung treten in den Kopfplatten keine horizontalen Biegungsspannungen auf.

Beispiel.

Den Grundriß der Brücke stellt Bild 1f, den Querschnitt Bild 7 dar. Es ist:

$l = 3\cdot 3{,}2 = 9{,}6$ m; $l_1 = 10\cdot 3{,}2 = 32$ m; $h = 3{,}0$ m; $b_0 = 5{,}4$ m.

Hauptträger [Baustahl (St 52)]: $J = 21\,000\,000$ cm⁴; $J_k = 68\,000$ cm⁴;

$$\frac{J_k}{J} = \sim\frac{1}{310}.$$

Eigengewicht = 1,2 t/m } für einen
Verkehrslast nach der (BE)[2] (Lastenzug N) = 6,3 t/m } Hauptträger,
zusammen: p = 7,5 t/m.

Mit diesen Werten, berechnet aus Gl. (7):

$$p_k = \frac{1}{310}\cdot\frac{40}{3}\cdot 7{,}5\cdot\frac{3\cdot 9{,}6}{5{,}4}\cdot\frac{(32 + 9{,}6)^3}{(32 + 2\cdot 9{,}6)^2\left[\frac{5}{12}(32 + 2\cdot 9{,}6)^2 + 32^2\right]} = 0{,}023 \text{ t/m}.$$

Aus Gl. (12) berechnet sich p_k zu:

$$p_k = \frac{1}{310}\cdot\frac{10}{3}\cdot 7{,}5\cdot\frac{3\cdot 9{,}6}{5{,}4\cdot 32^3}\,(32 + 9{,}6)^2 = 0{,}022 \text{ tm}.$$

Diese Werte stimmen gut überein.

Das Biegungsmoment im Querschnitt „a" der Gurtung berechnet sich aus Gl. (8) zu (Bild 1e u. 5):

$$M_a = \varphi\,p_k\cdot\frac{(l_1 + 2\,l)^2}{32},$$

wobei φ die Stoßzahl bedeutet; nach der (BE)[2]) ist für $l_1 + l = 41{,}6$ m $\varphi = 1{,}4$ zu setzen.

$$M_a = 1{,}4\cdot 0{,}023\cdot\frac{(32 + 2\cdot 9{,}6)^2}{32} = \sim 2{,}64 \text{ tm}.$$

Das Widerstandsmoment der Gurtung an dieser Stelle berechnet sich nach Bild 6 zu:

$$W_y = \frac{7\cdot 48^2}{6} = 2690 \text{ cm}^3$$

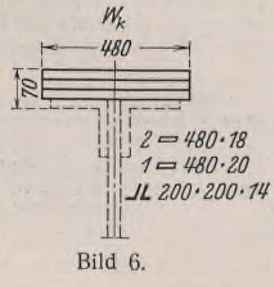


Bild 6.

[2]) (BE) Berechnungsgrundlagen für stählerne Eisenbahnbrücken der „Deutschen Reichsbahn".

und die Beanspruchung der Kopfplatten in waagerechter Richtung

$$\sigma_k = \frac{M_a}{W_y} = \frac{264\,000}{2690} = 98 \text{ kg/cm}^2.$$

Liegt die Fahrbahn unten, so berechnet sich σ_{ko} nach Bild 7 zu:

$$\sigma_{ko} = \frac{249{,}2}{155{,}6}\cdot\sigma_k \qquad \sigma_{ko} = \frac{249{,}2}{155{,}6}\cdot 98 = 157 \text{ kg/cm}^2.$$

An der zulässigen Beanspruchung von 2100 kg/cm² (St 52) gemessen, beträgt der Anteil der Drehwirkung:

$$D_w = \frac{100}{2100}\cdot 98 = 5\,\% \qquad D_{w(o)} = \frac{100}{2100}\cdot 157 = 7{,}5\,\%.$$

Das Biegungsmoment im Gurtungsquerschnitt „b" berechnet sich aus der Formel (13) zu:

$$M_s = \varphi\,p_k\cdot\frac{l_1^2}{8} = 1{,}4\cdot 0{,}023\cdot\frac{32^2}{8} = 4{,}13 \text{ tm}.$$

Das Widerstandsmoment an dieser Stelle ist (Bild 8):

$$W_y = \frac{8{,}8\cdot 48^2}{6} = 3380 \text{ cm}^3$$

und die Beanspruchung:

$$\sigma_k = \frac{413\,000}{3380} = 122 \text{ kg/cm}^2.$$

Bild 7. Bild 8.

Bei untenliegender Fahrbahn wird (Bild 7):

$$\sigma_{ko} = \frac{251}{157{,}4}\cdot 122 = 195 \text{ kg/cm}^2,$$

und es ist der Anteil der Drehwirkung

$$D_w = \frac{100}{2100}\cdot 122 = 6\,\% \text{ bzw. } D_{wo} = \frac{100}{2100}\cdot 195 = 9{,}5\,\%.$$

Nach Bleich[3]) werden beim Auftreten selbst kleinster Drehmomente die Gurtniete (Halsniete) äußerst stark beansprucht. Besonders ungünstig verhalten sich die Stabteile, die nur durch eine einzige Nietreihe miteinander verbunden sind. Bei der baulichen Durchbildung der Hauptträger stählerner Überbauten sind diese Erkenntnisse zu beachten.

Anschließend wird noch der gleiche Überbau mit rechteckiger Grundrißanordnung untersucht, um Aufschluß über den Einfluß der Drehwirkung auf die Hauptträger von derartigen Tragwerken zu erhalten.

Zur Erläuterung dient folgendes: Die sämtlichen Querträger von gleichem Querschnitt sind mit gleichgroßem A_p (Auflagerdruck der Längsträger) belastet, dann verdrehen sich die beiden Tragwände infolge der Durchbiegung der Querträger gleichmäßig um den Drehwinkel γ nach innen. Bei einer derartigen Belastung treten in den Kopfplatten keine horizontalen Biegungsspannungen auf. Sind dagegen die mittleren Querträger mit A_p und die Endquerträger, was in Wirklichkeit stets zutrifft, nur mit einem Teil von A_p belastet, dann wird — der Drehwinkel des Endquerträgers mit γ_0 bezeichnet — die Verdrehung der Tragwände an

[3]) F. Bleich, Theorie und Berechnung der eisernen Brücken, S. 295. Berlin 1924.

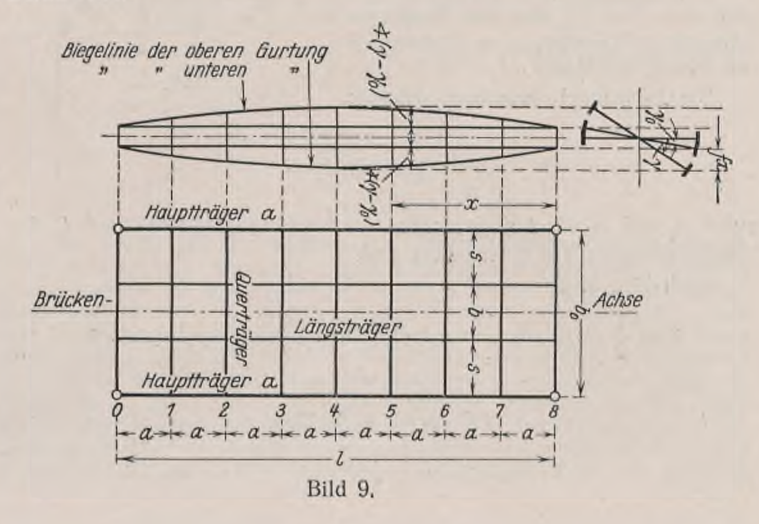


Bild 9.

den mittleren Querträgern ($\gamma - \gamma_0$). Diese unterschiedlichen Verdrehungen der Querträger verursachen in den Kopfplatten der Tragwände waagerechte Biegungsspannungen.

Im vorliegenden Falle wird folgendermaßen verfahren (Bild 9): Für einen Überbauquerschnitt, bestehend aus den beiden Hauptträgern und einem Querträger im Abstand x vom Auflager, läßt sich die Beziehung aufstellen: $\beta = \gamma - \gamma_0$, wo γ_0 den Drehwinkel des Endquerträgers bezeichnet.

Haben die Endquerträger den gleichen Querschnitt wie die mittleren Querträger, dann ist bei gleichen Feldweiten „a" und der Belastung $\frac{1}{2} \cdot A_p$ der Drehwinkel des Endquerträgers

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} \cdot \gamma \quad \text{und somit}$$

$$\beta = \gamma - \frac{1}{2} \cdot \gamma = \frac{1}{2} \cdot \gamma. \tag{15}$$

Hierbei ist angenommen, daß beide Hauptträger unter der Belastung sich gleichmäßig durchbiegen.

Die beiden Hauptträger haben die gleichen Abmessungen, und der Brückenquerschnitt liegt symmetrisch zur Brückenachse; dann ist mit Bezug auf Bild 10 der Drehwinkel β:

$$f_x = \frac{h}{2} \cdot \beta \qquad \beta = \frac{2 f_x}{h}, \tag{16}$$

wobei f_x die Ausbiegung der oberen und unteren Kopfplatte im Abstande x vom Auflager ist. Die Kopfplatte stellt einen Träger auf 2 Stützen dar, der waagerecht mit einer gleichmäßig verteilten Last p_k belastet ist.

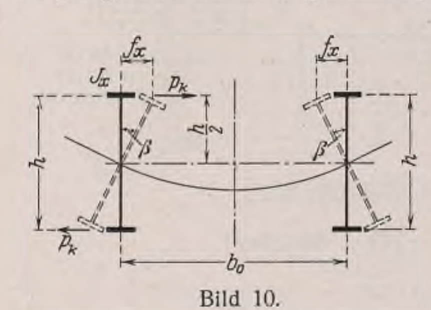


Bild 10.

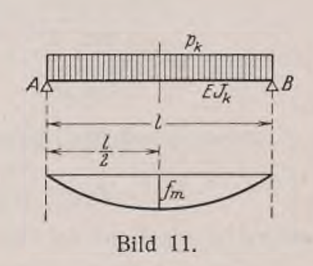


Bild 11.

Für diese Belastung berechnet sich die Ausbiegung in der Trägermitte aus der bekannten Formel (Bild 11):

$$f_m = \frac{1}{E J_k} \cdot \frac{5}{384} \cdot p_k l^4. \tag{17}$$

Darin ist: l die Stützweite der Brücke, E das Elastizitätsmaß, J das Trägheitsmoment der Kopfplatte.

In der Trägermitte wird:

$$\beta = \frac{2 f_m}{h} = \frac{1}{E J_k} \cdot \frac{5}{192} \cdot p_k \cdot \frac{l^4}{h}. \tag{18}$$

Ermittlung des γ-Wertes.

Mit Bezug auf Bild 12 ist: A_p der Auflagerdruck eines Schwellenträgerstranges auf den Querträger, b_0 Abstand der Hauptträger voneinander, s der beiderseitig gleiche Abstand der Schwellenträger von den Hauptträgern.

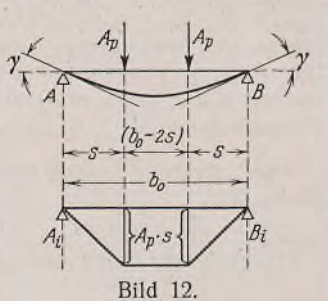


Bild 12.

Die Auflagerdrücke der Querträger sind $A = B = A_p$ und die Biegungsmomente im Querträger im Abstande s von den Hauptträgern $M_s = A_p\, s$.

Die Drehwinkel γ berechnen sich aus:

$$\gamma = \frac{A_i}{E J_q} = \frac{B_i}{E J_q},$$

worin A_i und B_i die Auflagerdrücke aus der Momentenfläche und J_q das Trägheitsmoment des Querträgers sind.

Nach Bild 12 ist

$$A_i = \frac{1}{2} \cdot A_p\, s\, s + \frac{1}{2} \cdot A_p\, s\, (b_0 - s) = \frac{1}{2} \cdot A_p\, s\, (b_0 - s) = B_i$$

$$\gamma = \frac{A_p}{E J_q} \cdot \frac{s}{2} (b_0 - s). \tag{19}$$

Nach Gl. (15) ist bei n Querträgern zu setzen:

$$\beta = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \gamma$$

$$\frac{1}{E J_k} \cdot \frac{5}{192} \cdot p_k \cdot \frac{l^4}{h} = \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{A_p}{E J_q} \cdot \frac{s}{2} (b_0 - s),$$

und hieraus folgt:

$$p_k = \frac{J_k}{J_q} \cdot \frac{48}{5} \cdot n\, A_p \cdot \frac{h\, s\, (b_0 - s)}{l^4}.$$

Nun ist: $\quad n\, A_p = p\, l,$

wo p/m die Belastung eines Schwellenträgerstranges ist; somit

$$p_k = \frac{J_k}{J_q} \cdot \frac{48}{5} \cdot p \cdot \frac{h\, s\, (b_0 - s)}{l^3}. \tag{20}$$

Das Biegungsmoment in Trägermitte (Kopfplattenmitte) ist

$$M_m = p_k \cdot \frac{l^2}{8}$$

und mit dem Wert der Gl. (20)

$$M_m = \frac{J_k}{J_q} \cdot \frac{6}{5} \cdot p \cdot \frac{h\, s\, (b_0 - s)}{l}. \tag{21}$$

Bei Eisenbahnbrücken sind Gl. (20) u. (21) mit der Stoßzahl φ zu multiplizieren.

Beispiel.

Die Abmessungen der zu untersuchenden Brücke sind (Bild 9):

$$l = 13 \cdot 3{,}2 = 41{,}6 \text{ m}; \quad b_0 = 5{,}4 \text{ m}; \quad h = 3{,}0 \text{ m}; \quad s = 1{,}8 \text{ m};$$
$$b_0 - s = 5{,}4 - 1{,}8 = 3{,}6 \text{ m}; \quad \varphi = 1{,}4.$$

Hauptträger Baustahl St 52, die Querträger St 37.

$$J_k = 68\,000 \text{ cm}^4; \quad J_q = 385\,000 \text{ cm}^4; \quad \frac{J_k}{J_q} = \frac{1}{5{,}66};$$

$$p_k = 7{,}5 \text{ t/m (Eigengewicht und Verkehrslast).}$$

Das Biegungsmoment in Kopfplatten (Punkt „a", Bild 9) berechnet sich aus Gl. (21) zu:

$$M_m = 1{,}4 \cdot \frac{6}{5} \cdot 7{,}5 \cdot \frac{3{,}0 \cdot 1{,}8\,(5{,}4 - 1{,}8)}{41{,}6} = 1{,}04 \text{ tm}.$$

Das Widerstandsmoment an dieser Stelle ist (Bild 8):

$$W_y = \frac{8{,}8 \cdot 48^2}{6} = 3380 \text{ cm}^3.$$

Somit die waagerechte Beanspruchung der Kopfplatten:

$$\sigma_k = \frac{M_m}{W_y} = \frac{104\,000}{3380} = 37 \text{ kg/cm}^2.$$

Bei untenliegender Fahrbahn wird (Bild 7):

$$\sigma_{ko} = \frac{251}{157{,}4} \cdot 37 = 59 \text{ kg/cm}^2$$

und der Anteil der Drehwirkung bei $\sigma_{zul} = 2100$ kg/cm² (St 52):

$$D_w = \frac{100}{2100} \cdot 37 = 1{,}8\,\% \qquad D_{wo} = \frac{100}{2100} \cdot 59 = 2{,}8\,\%.$$

Hiernach sind bei geraden Brücken die Beanspruchungen der Gurtungen durch die Drehmomente erheblich geringer als bei schiefen Brücken. Werden die Endquerträger unbelastet angenommen, so verdoppeln sich die vorstehend berechneten Beanspruchungen.

Folgerungen.

In vorstehender Ausarbeitung ist der Versuch gemacht worden, diese immerhin schwierige Aufgabe mit einer für die Praxis genügenden Genauigkeit lösbar zu machen. Dabei ist eine Anwendung der entwickelten Formeln auf die Berechnung der Hauptträger geschweißter Eisenbahnbrücken ohne weiteres möglich. Es werden bei schiefen Brücken unter den hier gemachten Voraussetzungen in den Kopfplatten der Hauptträgergurtungen erhebliche zusätzliche Biegungsspannungen nachgewiesen, die durch die Einwirkung von Drehmomenten auf die Hauptträger hervorgerufen werden und deren Auftreten bei vorgenommenen Belastungsproben bestätigt worden ist. Bei der Aufstellung der Entwürfe für schiefe Eisenbahnbrücken wäre diesen Erkenntnissen Rechnung zu tragen.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Organ des Arbeitskreises „Stahlbau“ der Fachgruppe Bauwesen im NS.-Bund Deutscher Technik

Schriftwaltung: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 7 RM und Postgeld

15. Jahrgang | BERLIN, 14. August 1942 | Heft 17/18

Traglasten gedrückter und zugleich querbelasteter Stäbe und Platten.

Von **Karl Girkmann**, Wien.

A. Ein Stabbeispiel.

Querbelastete Druckstäbe können je nach der Art ihrer Stützung und Belastung in verschiedener Weise die Grenze ihres Tragvermögens erreichen. Der Stab nach Bild 1a beispielsweise befindet sich bis zum Augenblick seines Versagens immer im stabilen Gleichgewicht, indem jedem Lastpaar S, p eine eindeutig bestimmte Gleichgewichtslage zugehört. Seine Biegelinie besitzt stets einen zur Feldmitte symmetrischen Verlauf. Der Stab nach Bild 1b hingegen, dessen Querbelastung bei vollkommener Symmetrie so angeordnet und abgestimmt ist, daß in der Biegelinie Zwischenwendepunkte auftreten, kann ein wesentlich anderes Verhalten aufweisen: es ist möglich, daß dieser Stab, ehe er in der symmetrischen Verformung sein Tragvermögen verliert, eine Verzweigungsstelle des Gleichgewichts erreicht und dann nach einer unsymmetrischen Knicklinie ausweicht. Welche Art des Versagens bei diesem Stabe nun tatsächlich eintritt, hängt von seinem Schlankheitsgrade und von der verhältnismäßigen Größe seiner Querbelastung ab.

Im folgenden wird das Verhalten des Stabes nach Bild 1b näher untersucht. Hierbei wollen wir die querwirkende Einzelkraft P so groß wählen, daß die Durchbiegung in Stabmitte verschwindet und der Stab wie ein auf unnachgiebigen Stützen gelagerter Durchlaufträger mit zwei gleichen Feldern wirkt. Den Werkstoff setzen wir als „idealplastisch“ voraus; wir nehmen also an, das Hookesche Elastizitätsgesetz bleibe bis zur Fließgrenze σ_F in Geltung. Der Querschnitt des Stabes (Fläche F, Trägheitsmoment J) sei unveränderlich, und die Wirkungsebene der Biegemomente schneide die Stabquerschnitte längs einer Trägheitshauptachse. Der Stab sei ferner in seitlicher Richtung derart gestützt, daß Kipperscheinungen nicht in Betracht kommen. Die Untersuchung bleibt auf das elastische Gebiet beschränkt.

Bild 1.

Um zu den „idealen Knicklasten“ S, p zu gelangen, müßten verschiedene idealisierte Voraussetzungen — wie genau mittiger Angriff der Gegenkräfte S, ideal gerade Stabachse, reibungsfrei drehbare bzw. verschiebbare Lager, homogener Werkstoff sowie auch vollkommene Symmetrie des Systems und seiner Belastung — getroffen werden. In Wirklichkeit liegen stets (kleine) Abweichungen von diesen strengen Annahmen vor; sie bewirken, daß die idealen Knicklasten nicht voll erreicht werden können. An deren Stelle treten die „Traglasten“, deren Ermittlung auf Grund der Lösung des Spannungsproblems möglich ist. Hierzu ist es notwendig, die Abweichungen von den strengen Voraussetzungen, soweit sie eben zahlenmäßig erfaßbar sind, abzuschätzen und der Berechnung zugrunde zu legen. Die Untersuchung zeigt, daß schon die kleinste Störung der Symmetrie das Verhalten des gedrückten und zugleich querbelasteten Stabes entscheidend beeinflussen kann.

Wir wollen im folgenden nur eine kleine Störung der Symmetrie der Belastung berücksichtigen. Um möglichst einfach rechnen zu können, denken wir uns dieselbe durch eine geringe Verschiedenheit der gleichmäßig verteilten Belastungen beider Stabfelder entstanden: die Querbelastung des Feldes 1 sei $p + \Delta p$, die des gleichlangen Feldes 2 aber $p - \Delta p$. Diese „Störbelastung“ Δp kann gegenüber p beliebig (endlich-) klein sein. Mit den Bezeichnungen des Bildes 2 erhalten wir für das Biegungsmoment im Schnitt x des Feldes 1

$$M_x = S y_1 + A_1 x - \frac{1}{2}(p + \Delta p)x^2. \tag{1}$$

Unter der Voraussetzung kleiner Ausbiegungen y darf die elastische Linie des Stabes näherungsweise aus der vereinfachten Differentialgleichung

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ} \tag{2}$$

ermittelt werden. Mit Gl. (1) entsteht aus Gl. (2)

$$y'' = -\frac{S y_1}{EJ} - \frac{A_1}{EJ} \cdot x + \frac{p + \Delta p}{2EJ} \cdot x^2.$$

Das Integral dieser Differentialgleichung lautet

$$y_1 = C_1 \cdot \sin \alpha x + C_2 \cdot \cos \alpha x - \frac{A_1}{S} \cdot x + \frac{p + \Delta p}{2S} \cdot x^2 - \frac{p + \Delta p}{\alpha^2 S}, \tag{3}$$

wobei

$$\alpha^2 = \frac{S}{EJ}. \tag{4}$$

Auf gleichem Wege erhalten wir für die Durchbiegungen y_2 des 2. Feldes (x von der rechten Endstütze weg gezählt)

$$y_2 = C_3 \cdot \sin \alpha x + C_4 \cdot \cos \alpha x - \frac{A_2}{S} \cdot x + \frac{p - \Delta p}{2S} \cdot x^2 - \frac{p - \Delta p}{\alpha^2 S}. \tag{5}$$

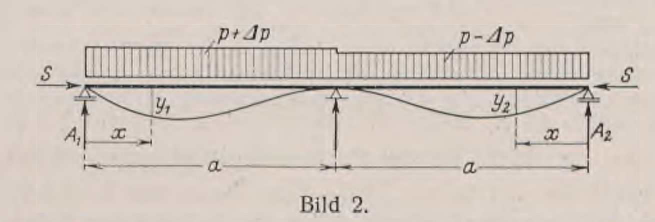


Bild 2.

Zur Bestimmung der vier Integrationskonstanten C_1 bis C_4 und der beiden Auflagerdrücke A_1 und A_2 sind zunächst fünf Randbedingungen verfügbar:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = 0 \text{ in } x = 0 \text{ und } x = a, \\ y_2 = 0 \text{ in } x = 0 \text{ und } x = a, \\ y_1' + y_2' = 0 \text{ in } x = a. \end{array}\right. \tag{6}$$

Außerdem sind die beiden Auflagerdrücke A_1 und A_2 durch die Gleichgewichtsbedingung

$$A_1 a - (p + \Delta p)\frac{a^2}{2} = A_2 a - (p - \Delta p)\frac{a^2}{2} \tag{7}$$

verknüpft. Die Auswertung der fünf Gl. (6) und der Gl. (7) führt mit Hilfe der Gl. (3), (4) u. (5) zu folgenden Ergebnissen:

$$\left\{\begin{array}{l} C_{1,3} = \dfrac{p}{\alpha^2 S} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{\alpha^2 a^2}{2} + 1\right) - \cos \alpha a - \alpha a \cdot \sin \alpha a}{\sin \alpha a - \alpha a \cdot \cos \alpha a} \pm \dfrac{\Delta p}{\alpha^2 S} \cdot \dfrac{1 - \cos \alpha a}{\sin \alpha a} \\ C_{2,4} = \dfrac{p \pm \Delta p}{\alpha^2 S} \\ A_{1,2} = \dfrac{p}{\alpha} \cdot \dfrac{\left(1 - \dfrac{\alpha^2 a^2}{2}\right) \cos \alpha a - 1 + \alpha a \cdot \sin \alpha a}{\sin \alpha a - \alpha a \cdot \cos \alpha a} \pm \dfrac{1}{2} \cdot \Delta p\, a. \end{array}\right. \tag{8}$$

Den Gl. (8) zufolge wachsen die Durchbiegungen unbegrenzt an, wenn $\sin \alpha a - \alpha a \cdot \cos \alpha a = 0$ oder $\sin \alpha a = 0$ wird. Dieses Ergebnis ist unvereinbar mit der endlichen Stablänge; unsere Beziehungen gelten eben nicht für große Ausbiegungen (sie besitzen strenge Gültigkeit, wenn die Ausbiegungen unendlich klein sind, und sie stellen brauchbare Näherungslösungen dar, wenn die Formänderungen wie im vorliegenden Falle zwar endlich, aber den Voraussetzungen entsprechend klein im Vergleich zu den Feldweiten sind). Trotzdem sind aber die den Nullstellen der Nenner entsprechenden Werte der Druckkraft S von Bedeutung. Auch bei kleinen Formänderungen, also noch innerhalb des Gültigkeitsbereichs der entwickelten Beziehungen, setzt ein plötzlich

rasches Anwachsen der Durchbiegungen ein, wenn sich die Druckkraft S einem dieser kritischen Werte nähert. Sofern der Stab nicht schon früher versagt hat, wird er jetzt sehr bald sein Tragvermögen verlieren. Seine „Traglast" S wird dann in der Nähe des kritischen Wertes liegen und demselben um so näher kommen, je kleiner die gleichzeitig wirkende Querbelastung ist.

Die kleinste, von Null verschiedene Wurzel von $\sin \alpha a - \alpha a \cdot \cos \alpha a = 0$ ist $\alpha a = 4{,}4934$, die von $\sin \alpha a = 0$ aber $\alpha a = \pi$. Praktische Bedeutung kommt nur der kleineren Wurzel π zu; sie liefert mit Gl. (4) die Eulerlast

$$S_E = \frac{\pi^2 E J}{a^2} \tag{9}$$

des gedrückten, querbelastungsfreien Durchlaufträgers. Das Auftreten des Nenners $\sin \alpha a$ ist hierbei nur durch die Störbelastung Δp bedingt!

Solange nun S wesentlich kleiner als S_E ist, kommt praktisch der Einfluß der kleinen Störbelastung nicht zur Geltung. Die Verformung des Stabes ist **fast symmetrisch**. Zumeist wird der Stab auch schon in dieser quasi-symmetrischen Verformung die Grenze seines Tragvermögens erreichen, und die zugehörige Traglast kann dann genügend genau auch unter der Annahme vollkommener Symmetrie ($\Delta p = 0$) ermittelt werden. Handelt es sich aber um einen schlanken Stab mit kleiner Querbelastung, dann kann es sein, daß dieser Stab sein Tragvermögen erst verliert, wenn die Druckkraft S bis in die Nähe von S_E angestiegen ist. In diesem Falle kommt der Einfluß der Störbelastung zur Geltung, und der Stab ist im Augenblick seines Versagens **wesentlich unsymmetrisch** verformt; die größten Werkstoffanstrengungen treten hierbei an einer Stelle des stärker belasteten Feldes auf, während unter der quasi-symmetrischen Verformung zunächst der Querschnitt über der Mittelstütze gefährdet ist.

Zahlenbeispiel: Der Querschnitt des Stabes bestehe aus 2 ⊏ 12 (Bild 3) mit $F = 2 \cdot 17 = 34$ cm², $J = 2 \cdot 364 = 728$ cm⁴, $i = 4{,}62$ cm, $W = 2 \cdot 60{,}7 = 121{,}4$ cm³. Die Feldweiten betragen $a = 600$ cm, die Querbelastung sei $p = 0{,}15$ t/m $= 0{,}0015$ t/cm. Fließgrenze des Werkstoffs $\sigma_F = 2{,}4$ t/cm², Dehnmaß $E = 2100$ t/cm².

Bild 3.

Es soll die Stabkraft S bestimmt werden, unter der der Stab bei der gegebenen Querbelastung versagt.

Das Beispiel ist so gewählt, daß der Verlust des Tragvermögens erst unter einer Stabkraft S erfolgt, die in der Nähe des Eulerwertes $S_E = \frac{\pi^2 \cdot 2100 \cdot 728}{600^2} = 41{,}912$ t gelegen ist. Wir können uns leicht überzeugen, daß der Stab nicht schon früher in der quasi-symmetrischen Verbiegung versagt; zu diesem Zwecke setzen wir $S = S_E$ und ermitteln für $p = 0{,}0015$ t/cm, $\Delta p = 0$ die rechnungsmäßigen Größtspannungen. Es ist dann $\alpha a = \pi$, $\sin \alpha a = 0$, $\cos \alpha a = -1$. Mit Gl. (3) u. (8) erhält man aus Gl. (2) für das Stützenmoment $M_{x=a} = -2 S \cdot \frac{p}{\alpha^2 S} = -109{,}28$ tcm und für das größte Feldmoment, das in $x = 219$ cm auftritt, $M_{\max} = 77{,}87$ tcm. Die größte Durchbiegung des Stabes entsteht in $x = 248$ cm und beträgt $y_{\max} = 1{,}34$ cm; den Voraussetzungen entsprechend ist sie klein gegenüber $a = 600$ cm. Die größte Randspannung ergibt sich zu $\sigma_{\max} = \frac{41{,}91}{34} + \frac{109{,}28}{121{,}4} = 1{,}233 + 0{,}900 = 2{,}133$ t/cm². Dieser Spannungswert ist noch kleiner als σ_F, und nach unserer, unter der Annahme vollkommener Symmetrie durchgeführten Rechnung wäre der Stab befähigt, die Axialkraft $S = 41{,}91$ t und zugleich die Querbelastung $p = 0{,}15$ t/m aufzunehmen; diese Lasten könnten sogar noch gesteigert werden. Tatsächlich aber ist das Tragvermögen des Stabes bereits erschöpft.

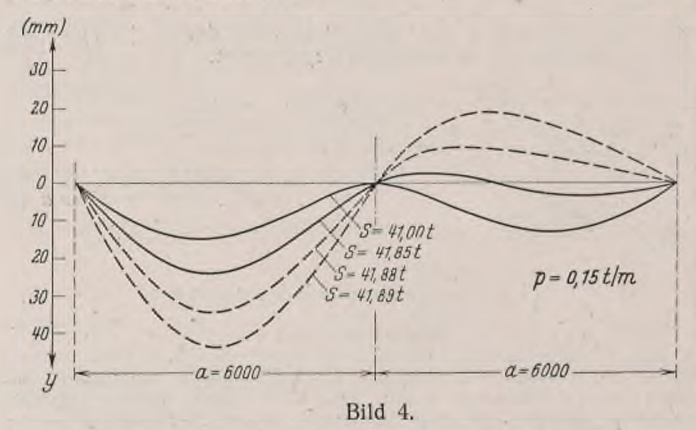


Bild 4.

In Bild 4 sind einige elastische Linien des Stabes aufgetragen; sie wurden für $p = 0{,}15$ t/m und für verschiedene Werte S, unter gleichzeitiger Zugrundelegung einer Störbelastung $\Delta p = \frac{1}{1000} \cdot p$, ermittelt. Während unter $S = 41$ t der Einfluß von Δp noch ganz bedeutungslos ist — die Biegelinie ist fast symmetrisch — kommt mit wachsender Kraft S die Störbelastung immer stärker zur Geltung, und die Biegelinie nähert sich der Knicklinie des querbelastungsfreien Durchlaufträgers. Unter $S = 41{,}86$ t wird bereits örtlich, im stärker belasteten Felde, der Fließzustand erreicht; die für $S = 41{,}88$ und $41{,}89$ t errechneten Biegelinien gelten daher nur für einen Stahl mit entsprechend höherer Fließgrenze. Für den gewählten Werkstoff aber stellt nach unserer Rechnung bereits die Stabkraft $S = 41{,}86$ t die **Traglast** dar, denn eine geringe Steigerung derselben hätte schon eine starke Ausbreitung des bestehenden Fließgebiets und die Ausbildung eines neuen Fließgebiets im zweiten Felde zur Folge. Die Größe der Traglast hängt von der Größe des gewählten Δp ab; je kleiner wir Δp annehmen, um so näher kommen wir (bei gleichbleibendem p) an $S_E = 41{,}91$ t heran. Im vorliegenden Falle fällt die errechnete Traglast praktisch mit S_E zusammen.

Natürlich bewirken auch andere, eine S-förmige Verbiegung des Stabes begünstigende Abweichungen von den strengen Voraussetzungen eine Minderung des Tragvermögens. Nach Abschätzung der möglichen Fehlerhebel, Pfeilhöhen primärer Stabkrümmungen usw. können auch diese Einflüsse in ähnlicher Weise rechnerisch erfaßt werden.

Bei der Bemessung des Stabes ist darauf Rücksicht zu nehmen, daß die Momente und daher auch die Randspannungen nicht verhältnisgleich mit der Druckkraft S, sondern rascher als diese anwachsen. Will man eine bestimmte ν-fache Sicherheit erzielen, dann ist die Bemessung unmittelbar für die ν-fachen Werte der Gebrauchslasten S und p durchzuführen.

Am zweckmäßigsten ist es, die Stababmessungen zunächst auf Grund einer Berechnung zu wählen, die unter der Annahme vollkommener Symmetrie durchgeführt wird. Sodann ist noch nachzuprüfen, ob diese Abmessungen auch ausreichen, wenn der Stab in einer wesentlich unsymmetrischen Verbiegung die Grenze seines Tragvermögens erreichen würde. Hierzu wäre es notwendig, auf Grund der gewählten Abmessungen und unter Berücksichtigung aller ungünstig wirkenden Abweichungen von den idealisierten Voraussetzungen die Traglasten S und p zu rechnen und sich zu überzeugen, daß dieselben die geforderten Traglasten νS und νp nicht unterschreiten; erforderlichenfalls wären die Abmessungen entsprechend zu berichtigen. Dieses Überprüfungsverfahren ist für praktische Anwendungen zu umständlich. Es kann aber durch eine viel einfachere Stabilitätsberechnung ersetzt werden. Da nämlich ein Versagen in wesentlich unsymmetrischer Verbiegung nur unter kleinen Querlasten zustande kommt und hierbei — wie auch aus dem Zahlenbeispiel zu erkennen ist — die zugehörige Traglast in der Nähe von S_E liegen und von der Größe der gleichzeitig wirkenden Querbelastung in geringem Maße abhängig sein wird, kann an Stelle des Vergleichs von errechneten und geforderten Traglasten einfach der **Nachweis der ausreichenden Knicksicherheit** treten, wobei der Träger als mittig gedrückter, **querbelastungsfreier** Stab (Druckkraft S, Knicklänge $s_K = a$) nach den einschlägigen Vorschriften zu behandeln ist.

Diese Art der Bemessung gegenüber Versagen in wesentlich unsymmetrischer Verformung wäre vollkommen richtig, wenn die ideale Knicklast S_K des gedrückten und zugleich querbelasteten Durchlaufträgers mit jener des querbelastungsfreien Stabes übereinstimmen würde. Eine mit einfachsten Mitteln und unter der Annahme rein elastischer Spanungszustände durchgeführte Untersuchung lieferte auch tatsächlich das Ergebnis $S_K = S_E$. Schärfere Untersuchungen ergaben, daß die Querbelastung **stabilisierend** wirkt[1]). Bei der verhältnismäßigen Kleinheit der in Betracht kommenden Querbelastungen bleibt dieser stabilisierende Einfluß allerdings praktisch bedeutungslos (für das obige Zahlenbeispiel würde sich unter $p = 0{,}15$ t/m die Knicklast rechnungsmäßig von $S_E = 41{,}912$ t auf $41{,}916$ t erhöhen). Es ist nicht ausgeschlossen, daß die vollkommen strenge Behandlung dieses Stabilitätsproblems unter einer bestimmten Annahme hinsichtlich des Verhaltens der Querlast während der Stabverformung zu dem Ergebnis führen könnte, die ideale Knicklast des betrachteten Durchlaufträgers sei unabhängig von der Größe der Querbelastung.

B. Ein Plattenbeispiel.

Eine allseits frei aufgestützte, ebene Rechteckplatte (Bild 5) mit den Seitenlängen a, b und der Dicke t sei parallel zum Seitenpaar a einem gleichförmigen Drucke σ_0 t/cm² unterworfen und habe gleichzeitig eine gleichförmig verteilte, senkrecht zur Mittelebene wirkende Belastung p t/cm² aufzunehmen, die wir als klein gegenüber σ_0 voraussetzen.

Bild 5.

Die Platte wird auf Druck und Biegung beansprucht. Die Durchbiegungen $w(x, y)$ derselben wachsen nicht verhältnisgleich mit der Belastung, sondern rascher als diese an. Daher dürfen die von den Gebrauchslasten σ_0, p hervorgerufenen Spannungen nicht mit zulässigen Spannungen verglichen werden. Will man eine bestimmte ν-fache Sicherheit erzielen, dann muß die Bemessung unmittelbar für die geforderten Traglasten $\bar{\sigma}_0 = \nu \sigma_0$, $\bar{p} = \nu p$ durchgeführt werden.

[1]) K. Girkmann, Gleichgewichtsverzweigung an einem querbelasteten Druckstab. Sitz.-Ber. d. Wiener Ak. d. Wiss., Abt. IIa, 150. Bd. (1941), Heft 9/10.

Um die Rechnung auf das elastische Gebiet beschränken zu können, setzen wir den Werkstoff als „ideal-plastisch" voraus; ferner betrachten wir (wie dies auch bei der Lösung verschiedener anderer Aufgaben im Falle mehrachsiger, nichthomogener Spannungszustände notgedrungen geschieht) bereits den örtlichen Fließbeginn als den gefährlichen Grenzzustand, der das Versagen der Platte unmittelbar einleitet.

Im Zusammenhang mit der Annahme, p sei klein gegenüber σ_0, wollen wir nun auch die elastischen Formänderungen der Platte als klein gegenüber der Plattendicke t voraussetzen. Wir dürfen dann zur Berechnung der inneren Kräfte der Platte die verallgemeinerte Plattengleichung

$$N \Delta\Delta w = p + n_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\, n_{xy} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} + n_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{1}$$

heranziehen, in der $N = \dfrac{E t^3}{12(1-\mu^2)}$ die Plattensteifigkeit, $\Delta\Delta$ das Symbol für die Operation $\dfrac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \cdot \dfrac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4}{\partial y^4}$, E das Dehnmaß und μ die Querdehnungszahl des Werkstoffes bedeuten. n_x, n_{xy} und n_y sind die Spannungsresultanten des von den Randkräften $\sigma_0 t$ hervorgerufenen ebenen Spannungszustandes der Platte. Im vorliegenden Falle ist $n_x = -\sigma_0 t$ (als Druck negativ), $n_{xy} = n_y = 0$. Damit vereinfacht sich Gl. (1) zu

$$N \Delta\Delta w = p - \sigma_0 t \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Die Querbelastung, die linear mit σ_0 ansteigen möge, drücken wir durch

$$p = \varkappa\, \sigma_0 \tag{3}$$

aus; $\varkappa$ bedeutet einen gegebenen Festwert.

Stellen wir diese gleichmäßig verteilte Querbelastung p mittels der Fourierschen Doppelreihe (Periode 2a, 2b)

$$p(x,y) = \frac{16 p}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{m n} \cdot \sin \frac{m \pi x}{a} \cdot \sin \frac{n \pi y}{b} \qquad (m = 1, 3, 5 \ldots,\ n = 1, 3, 5 \ldots) \tag{4}$$

als stetige Funktion der Koordinaten x, y dar, so können wir Gl. (2) mit dem Ansatze

$$w = \sum_m \sum_n C_{m,n} \cdot \sin \frac{m \pi x}{a} \cdot \sin \frac{n \pi y}{b} \qquad (m = 1, 3, 5 \ldots,\ n = 1, 3, 5 \ldots) \tag{5}$$

lösen. Dieser Ansatz erfüllt bereits die Auflagerbedingungen ($w = 0$ und Moment in Richtung senkrecht zum Rand gleich Null) der frei aufgestützten Platte, und zwar in Form der Navierschen Bedingungen $w = 0$ und $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$.

Aus Gl. (5) folgt noch

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\pi^2}{a^2} \sum \sum m^2 C_{m,n} \cdot \sin \frac{m \pi x}{a} \cdot \sin \frac{n \pi y}{b} \quad \text{und} \tag{6}$$

$$\Delta\Delta w = \pi^4 \sum \sum \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 C_{m,n} \cdot \sin \frac{m \pi x}{a} \cdot \sin \frac{n \pi y}{b}. \tag{7}$$

Zur Bestimmung der unbekannten Freiwerte $C_{m,n}$ haben wir nur die Ausdrücke Gl. (4), (6) u. (7) in Gl. (2) einzusetzen; wir erhalten so unter Berücksichtigung der Gl. (3)

$$\begin{aligned} N \pi^4 \sum \sum \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 C_{m,n} \cdot \sin \frac{m \pi x}{a} \cdot \sin \frac{n \pi y}{b} \\ = \frac{16 \varkappa \sigma_0}{\pi^2} \sum \sum \frac{1}{m n} \cdot \sin \frac{m \pi x}{a} \cdot \sin \frac{n \pi y}{b} \\ + \sigma_0 t \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \sum \sum C_{m,n} m^2 \cdot \sin \frac{m \pi x}{a} \cdot \sin \frac{n \pi y}{b}. \end{aligned} \tag{2a}$$

Diese Beziehung muß für jedes x gelten; die gliedweise Erfüllung für jedes Zahlenpaar m, n führt zu

$$N \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 C_{m,n} = \frac{16 \varkappa \sigma_0}{\pi^2} \cdot \frac{1}{m n} + \sigma_0 t \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \cdot C_{m,n} m^2$$

und weiterhin zu

$$C_{m,n} = \frac{\dfrac{16 a^2 \varkappa}{t \pi^4} \cdot \dfrac{1}{m n}}{\dfrac{N \pi_2}{a^2 \sigma_0 t} \left(m^2 + n^2 \cdot \dfrac{a^2}{b^2}\right)^2 - m^2}. \tag{8}$$

Aus Gl. (8) können alle Freiwerte des Ansatzes Gl. (5) berechnet werden.

Setzt man den Nenner des Ausdruckes Gl. (8) gleich Null, so erhält man die bekannte Beulbedingung für die gedrückte, querbelastungsfreie Platte. Der Kleinstwert der kritischen Spannung $\sigma_0 = \sigma_K$ ergibt sich für $n = 1$ und für ein bestimmtes, vom Seitenverhältnis $\dfrac{a}{b}$ abhängiges m. Mit Rücksicht auf Gl. (4) können aber hier die m in Gl. (8) nur ungerade Zahlen sein!

Mit der Berechnung der $C_{m,n}$ aus Gl. (8) ist die Biegefläche $w(x,y)$ der gedrückten und querbelasteten Platte bestimmt. Die Schnittmomente ergeben sich aus den bekannten Beziehungen

$$\left\{ \begin{aligned} m_x &= -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad m_y = -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ m_{xy} &= -N(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Das Widerstandsmoment der Platte je Einheit Schnittlänge ist $\dfrac{t^2}{6}$; die Randbiegespannungen erhält man demnach aus

$$\sigma_x = \pm 6 \cdot \frac{m_x}{t^2} \qquad \sigma_y = \pm 6 \cdot \frac{m_y}{t^2}. \tag{9a}$$

Die Anstrengung des Werkstoffes soll nach der Hypothese der unveränderlichen Gestaltänderungsenergie beurteilt werden; der bezügliche Ausdruck für die Vergleichsspannung lautet dann für Randpunkte im Schnitte $y = {}^1/_2\, b$ (in welchem aus Symmetriegründen die Schubspannungen Null sind):

$$\sigma_v = \sqrt{(\sigma_0 + \sigma_x)^2 + \sigma_y^2 - (\sigma_0 + \sigma_x)\,\sigma_y}\,. \tag{10}$$

Im Falle richtiger Bemessung muß

$$\sigma_v \leqq \sigma_F \tag{11}$$

sein. Gleichzeitig muß aber auch die Bedingung

$$\sigma_0 \leqq \sigma_K \tag{12}$$

erfüllt sein, wenn σ_K die Beulspannung der nur gedrückten Platte ($p = 0$) bedeutet. Man könnte glauben, es sei überflüssig, bei einer querbelasteten Platte die Bedingung (12) besonders vorzuschreiben, da dieser Beziehung bei Erfüllung der Gl. (11) bereits entsprochen werde. Wie später gezeigt wird, gibt es aber Fälle, in welchen tatsächlich die Bedingung Gl. (12) für die Bemessung maßgebend wird. Weitere Erkenntnisse werden uns die folgenden Zahlenbeispiele vermitteln:

Wir betrachten eine Platte aus Stahl mit $E = 2100$ t/cm², $\mu = 0{,}3$, $\sigma_F = 2{,}4$ t/cm². Abmessungen der Platte: $b = 100$ cm, $t = 1{,}4$ cm; für die Plattenlänge a werden verschiedene Werte in Rechnung gestellt. Belastung der Platte: Randdruck σ_0 t/cm², Querlast $p = \varkappa \sigma_0 = \dfrac{1}{25\,000} \cdot \sigma_0$ (t/cm²).

Die Plattensteifigkeit beträgt $N = \dfrac{E t^3}{12(1-\mu^2)} = 527{,}69$ tcm. Die Rechnung wird mit dem Reihensatz Gl. (4) durchgeführt; hierbei werden nur Glieder bis zu den Zeigern $m = 7$ und $n = 5$ (einschließlich) berücksichtigt.

1. Plattenlänge $a = 100$ cm (Seitenverhältnis $\dfrac{a}{b} = 1$).

Für die vorgegebenen Zahlenwerte ist nach Gl. (8)

$$C_{m,n} = \frac{0{,}046\,93 \cdot \dfrac{1}{m n}}{\dfrac{1}{\sigma_0} \cdot 0{,}372\,01\,(m^2 + n^2)^2 - m^2}.$$

Aus der Nullsetzung des Nenners dieses Ausdrucks erhält man die Beulspannung $\sigma_K = 1{,}488$ t/cm² zum Fall $p = 0$, und zwar entsteht dieser Kleinstwert der kritischen Spannung bei $m = 1$, $n = 1$; die querbelastungsfreie Platte beult somit in der Druckrichtung in einer Halbwelle aus. Die Biegefläche der gedrückten und querbelasteten Platte weist eine annähernd ähnliche Form wie die Beulfläche auf. Nach einigen versuchsweisen Annahmen wurde die Traglastspannung mit $\sigma_0 = 1{,}39$ t/cm² ermittelt. Für den Schnitt $y = {}^1/_2\, b$ der Platte erhält man die Ordinaten (cm)

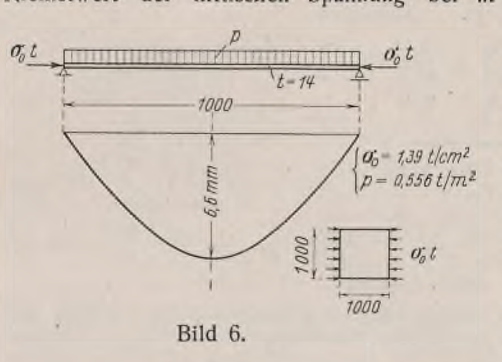


Bild 6.

$$(w)_{y={}^1/_2 b} = 0{,}664\,93 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} + 0{,}000\,82 \cdot \sin \frac{3 \pi x}{a} + 0{,}000\,05 \cdot \sin \frac{5 \pi x}{a} + \ldots$$

Wegen des überwiegenden Einflusses des 1. Gliedes stellt diese Schnittlinie praktisch eine Sinuslinie dar (Bild 6). Die größte Werkstoffanstrengung tritt in $x = {}^1/_2\, a$, $y = {}^1/_2\, b$ auf. Für den bezüglichen Randpunkt erhält man $m_x = 0{,}446\,38$ t cm/cm, $m_y = 0{,}508\,71$ t, $\sigma_x = \pm 1{,}366$ t/cm², $\sigma_y = \pm 1{,}536$ t/cm²; mit $\sigma_0 = 1{,}39$ t/cm² ergibt sich aus Gl. (10) die Vergleichsspannung $\sigma_v = 2{,}38$ t/cm² $\doteq \sigma_F$. Bei ν-facher Sicherheit darf also die Platte mit $\sigma_0 = \dfrac{1}{\nu} \cdot 1{,}39$ t/cm² und $p = \dfrac{1}{\nu} \cdot \dfrac{1{,}39}{25\,000}$ t/cm² $= \dfrac{1}{\nu} \cdot 0{,}556$ t/m² belastet werden.

2. Plattenlänge $a = 200$ cm (Seitenverhältnis $\frac{a}{b} = 2$).

Aus der Nullsetzung des Nenners des Ausdrucks Gl. (8) erhält man wieder $\sigma_0 = \sigma_K = 1{,}488$ t/cm². Dieser Kleinstwert der Beulspannung der querbelastungsfreien Platte entsteht jetzt unter $m = 2$ und $n = 1$. Die Platte würde also in der Längsrichtung in zwei Halbwellen ausbeulen, die Beulfläche wäre antimetrisch zu $x = {}^1/_2\, a$; die Biegefläche der gedrückten und querbelasteten Platte ist aber zu dieser Geraden symmetrisch geformt.

Für die Bemessung der Platte ist hier tatsächlich die Beulspannung maßgebend, denn die Berechnung auf Druck und Biegung führt unter den vorausgesetzten symmetrischen Anlage- und Lastverhältnissen zu wesentlich höheren Traglastspannungen, die in Wirklichkeit, wie später begründet wird, nicht erreicht werden können.

Zunächst wollen wir aber die Platte für $\sigma_0 = 1{,}488$ t/cm² $= \sigma_K$ und $p = \frac{1{,}488}{25\,000}$ t/cm² $= 0{,}595$ t/m² auf Druck und Biegung nachrechnen: für $y = {}^1/_2\, b$ ergeben sich die Durchbiegungen bzw. Biegerandspannungen

$$w = 0{,}333\,03 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} + 0{,}039\,88 \cdot \sin \frac{3\pi x}{a} + 0{,}001\,31 \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} + 0{,}000\,19 \cdot \sin \frac{7\pi x}{a},$$

$$\sigma_x = 0{,}2898 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} + 0{,}1616 \cdot \sin \frac{3\pi x}{a} + 0{,}0135 \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} + 0{,}0038 \cdot \sin \frac{7\pi x}{a},$$

$$\sigma_y = 0{,}5635 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} + 0{,}1049 \cdot \sin \frac{3\pi x}{a} + 0{,}0055 \cdot \sin \frac{5\pi x}{a} + 0{,}0013 \cdot \sin \frac{7\pi x}{a}.$$

Der Schnitt $y = {}^1/_2\, b$ der Biegefläche ist einsinnig gekrümmt, aber in der Mitte stark abgeflacht, und die größte Werkstoffanstrengung tritt nicht in $x = {}^1/_2\, a$, sondern in $x = 0{,}31\, a$ auf. Dort entstehen die Randspannungen $\sigma_x = \pm 0{,}307$ t/cm², $\sigma_y = \pm 0{,}378$ t/cm²; mit $\sigma_0 = 1{,}488$ t/cm² liefert dann Gl. (10) die größte Vergleichsspannung $\sigma_v = 1{,}635$ t/cm², die also noch bedeutend kleiner als σ_F ist.

Tatsächlich ist aber unter dieser Belastung das Tragvermögen der Platte bereits erschöpft, sofern auch nur die geringste Störung der Symmetrie hinsichtlich $x = {}^1/_2\, a$ vorliegt, durch die der Biegefläche eine der Beulfläche entsprechende Wellenfläche $\sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b}$ aufgezwungen wird. Eine solche kleinste Störung der Symmetrie müssen wir aber stets als vorhanden ansehen. Ihre Wirkung läßt sich sehr anschaulich zeigen, wenn man als Ursache der Störung eine Ungleichmäßigkeit der Querbelastung p annimmt; am einfachsten in der Weise, daß man hier der genau gleichmäßig verteilten Last p noch eine Störbelastung $\Delta p = \Delta p_0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b}$ überlagert, wobei Δp_0 gegenüber p beliebig (endlich-) klein gewählt werden kann. Um die Plattengleichung (2) lösen zu können, müssen wir dem früheren Ansatze für w nach Gl. (5) noch ein Glied $C_0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b}$ beigeben. Gl. (2) lautet dann:

$$(13)\quad N\pi^4 \sum \sum \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 C_{m,n} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} + N C_0 \pi^4 \left(\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b}$$
$$= \frac{16\,\varkappa\,\sigma_0}{\pi^2} \sum \sum \frac{1}{m\,n} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} + \Delta p_0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} + \sigma_0\, t \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \sum \sum m^2 C_{m,n}$$
$$\cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} + 4\,\sigma_0\, t \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \cdot C_0 \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b}$$
$$(m = 1, 3, 5 \ldots,\ n = 1, 3, 5 \ldots).$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn die Festwerte $C_{m,n}$ wieder nach Gl. (8) ermittelt werden und C_0 der Beziehung

$$N C_0 \pi^4 \left(\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 = \Delta p_0 + 4\,\sigma_0\, t \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \cdot C_0$$

genügt, aus der

$$(14)\qquad C_0 = \frac{\Delta p_0 \cdot \frac{a^2}{4\pi^2}}{N \cdot \frac{\pi^2}{4a^2}\left(4 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 - \sigma_0\, t}$$

erhalten wird.

Im Bild 7 ist der Biegeflächenschnitt $y = {}^1/_2\, b$ der betrachteten Platte für verschiedene Werte σ_0 und $p = \frac{\sigma_0}{25\,000}$ dargestellt; die Berechnung erfolgte für $\Delta p_0 = 0{,}001\, p$. Solange $\sigma_0 \ll \sigma_K$, kommt der Störbelastung Δp praktisch kein Einfluß zu, da C_0 sehr klein ist. Die Biegefläche ist dann fast symmetrisch zu $x = {}^1/_2\, a$. Unter $\sigma_0 = 1$ t/cm², $p = 0{,}400$ t/m² beispielsweise bewirkt die obige Störbelastung erst Durchbiegungsunterschiede von 0,1 %. Mit wachsendem σ_0 nimmt aber C_0 immer rascher zu, und wenn σ_0 gegen σ_K ansteigt, dann beeinflußt die Störbelastung entscheidend die Form der Biegefläche, die sich mehr und mehr der Beulfläche der nur gedrückten Platte nähert. Die Spannung σ_0 kann zwar bis zur vollen Höhe der Beulspannung σ_K nicht ansteigen, da die Platte schon etwas früher ihr Tragvermögen verliert, aber sie kommt der Spannung σ_K in allen Fällen, in welchen das Versagen der Platte in einer wesentlich unsymmetrischen Biegefläche eintritt, sehr nahe, so daß das Gleichheitszeichen in der Bemessungsformel Gl. (12) näherungsweise gelten darf. Die oben berechnete Platte beispielsweise erreicht rechnungsmäßig erst unter $\sigma_0 = 1{,}4878$ t/cm² und $p = 0{,}595$ t/m² den Fließzustand; diese Traglastspannung σ_0 fällt also praktisch mit der Beulspannung $\sigma_K = 1{,}488$ t/cm² zusammen.

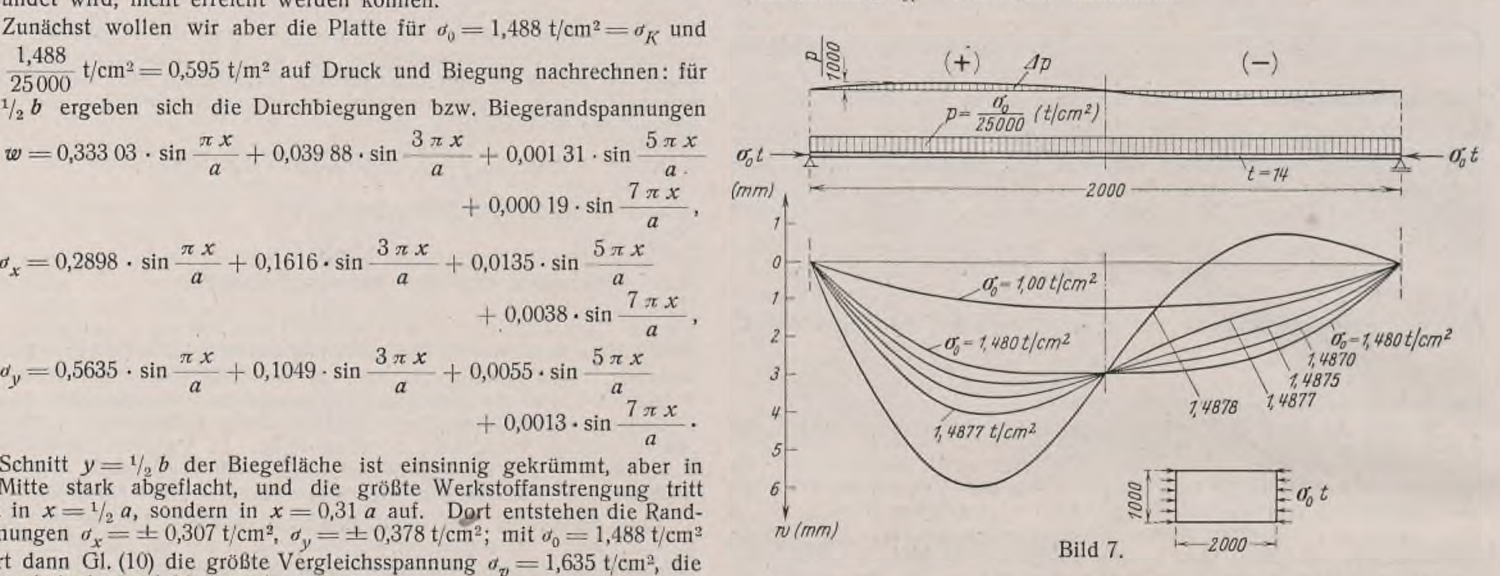


Bild 7.

Im Falle einer entsprechend größeren Querbelastung (größeres $\varkappa$) würde die betrachtete Platte schon in der quasi-symmetrischen Verbiegung die Grenze ihres Tragvermögens erreichen, und ihre Traglastspannung σ_0 könnte dann genügend genau auch unter der Annahme vollkommener Symmetrie ermittelt werden.

3. Plattenlänge $a = 300$ cm (Seitenverhältnis $\frac{a}{b} = 3$).

Die Nullsetzung des Nenners von $C_{m,n}$ nach Gl. (8) liefert wieder $\sigma_K = 1{,}488$ t/cm², und zwar entsteht dieser Kleinstwert der Beulspannung der querbelastungsfreien Platte jetzt unter $m = 3$, $n = 1$; die Platte beult also in der Längsrichtung in drei Halbwellen aus. Die Wellenfläche $\sin \frac{3\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b}$ ist in der Reihenentwicklung für p nach Gl. (4) und daher auch im Ansatze für w der gedrückten und querbelasteten Platte enthalten. Der zugehörige Beiwert $C_{3,1}$ wächst nach Gl. (8) über alle Grenzen an, wenn $\sigma_0 = \sigma_K$ wird. Nun verlieren zwar

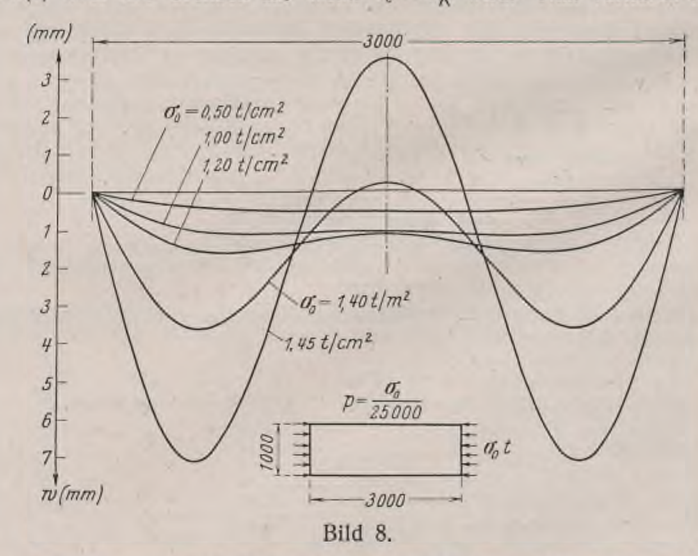


Bild 8.

die entwickelten Beziehungen im Falle großer Formänderungen ihre Gültigkeit. Ihre Auswertung läßt aber bereits innerhalb des Gültigkeitsbereichs erkennen, daß das Ansatzglied $C_{3,1} \cdot \sin \frac{3\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b}$ mit wachsendem σ_0 immer stärker hervortritt und schließlich die Form der Biegefläche entscheidend beeinflußt. Unter kleinem σ_0 hingegen überwiegt das Glied $C_{1,1} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b}$, so daß die Biegefläche auch in der Längsrichtung nur eine Halbwelle bildet. Im Bild 8 sind die

Schnitte $y = {}^1/_2\, b$ der den Randkräften $\sigma_0 = 0{,}5$, 1,0, 1,2, 1,4 und 1,45 t/cm² und der Querbelastung von je $p = \frac{\sigma_0}{25000}$ zugehörenden Biegeflächen dargestellt. Unter $\sigma_0 = 1{,}45$ t/cm² und $p = 0{,}580$ t/m² tritt die größte Werkstoffanstrengung in $x = 0{,}19\, a$, $y = {}^1/_2\, b$ auf; für die zugehörige Vergleichsspannung ergab die Rechnung $\sigma_v = 2{,}27$ t/cm². Der Fließzustand ist also noch nicht erreicht, aber die Lasten σ_0 und p könnten nur mehr wenig gesteigert werden, so daß wir sie bereits als die Traglasten ansehen dürfen.

Der vorstehenden Plattenuntersuchung ist zu entnehmen, daß sich gedrückte und zugleich querbelastete, frei aufgetützte Platten in der Druckrichtung nicht immer in einer Halbwelle ausbiegen. Die Form der Biegefläche ist vielmehr abhängig von der Größe der Randdruckkräfte σ_0 und vom Seitenverhältnis $\frac{a}{b}$; hingegen ist sie unabhängig von der Größe der gleichzeitig wirkenden Querbelastung p, die gemäß Gl. (8) nur die Größe der Durchbiegungen w beeinflußt. Quer zur Druckrichtung liegende Schnitte der Biegefläche weisen stets einsinnige Krümmung auf. Versagt die Platte erst dann, wenn die Randkräfte σ_0 gegen die Beulspannung der querbelastungsfreien Platte ansteigen, dann nähert sich die Gestalt der Biegefläche jener der Beulfläche. Bei Seitenverhältnissen, welchen symmetrische Beulflächen zugehören, erfolgt dieser Übergang auf die Halbwellenzahl der Beulfläche unmittelbar, bei Seitenverhältnissen hingegen, denen zu $x = {}^1/_2\, a$ antimetrische Beulflächen entsprechen, ist hierzu eine kleine Störung der Symmetrie notwendig, die immer als vorhanden gelten muß. Bei derartigen Seitenverhältnissen würde im Falle kleiner Plattendicken und kleiner Querlasten die unter der Annahme vollkommener Symmetrie durchgeführte Rechnung auf Druck und Biegung über der Beulgrenze liegende Traglastspannungen σ_0 ergeben, während tatsächlich das Tragvermögen schon unmittelbar vor Erreichen der Beulspannung erschöpft ist.

Die Kenntnis dieser Zusammenhänge ist für die Bemessung gedrückter und querbelasteter Platten von wesentlicher Bedeutung; insbesondere ist zu beachten, daß man sehr häufig den Ort der größten Werkstoffanstrengung gar nicht unmittelbar angeben kann, sondern erst rechnerich festlegen muß.

Zu gleichartigen Ergebnissen führt die Untersuchung auch dann, wenn die Randdruckkräfte σ_0 und die Querbelastung nicht gleichmäßig verteilt sind oder wenn die Platte anderen Lagerungsbedingungen unterworfen ist; Voraussetzung ist aber Symmetrie des Systems und der Belastung hinsichtlich der zur Druckrichtung senkrechten Plattenmittellinie $x = {}^1/_2\, a$.

Beitrag zur Berechnung von Stegblechen mit Sparlöchern.

Von Dr.-Ing. H. Hengst, Rheinhausen.

Im Leichtbau werden häufig Träger verwendet, die aus Gründen der Gewichtsersparnis gelochte Stegbleche besitzen. Die folgende Untersuchung soll zeigen, daß bei Anwendung derartiger Sparlöcher größte Vorsicht geboten ist, wenn nicht die Sicherheit des Bauwerks darunter leiden soll. Das hier angegebene Verfahren, dem ein Gedanke von E. Trefftz zugrunde liegt, wurde zuerst vom Verfasser auf eine Scheibe mit reiner Zugbelastung angewendet und in der Z. ang. Math. Bd. 18, Heft 1, veröffentlicht. Dem praktischen Bedürfnis folgend, wird es hier auch auf andere Belastungsfälle ausgedehnt. Im folgenden Teil I werden die allgemeinen theoretischen Grundlagen kurz mitgeteilt, wobei auf die einschlägige Literatur, wie z. B. Handbuch der Physik, Love-Timpe, Föppl u. a., verwiesen sei. Dann wird die Ableitung des Verfahrens zur Ermittlung der Spannungen in gelochten Scheiben gegeben. In Teil II werden die allgemeinen Ansätze auf die Berechnung einer Quadratscheibe mit mittigem, kreisförmigem Loch bei Belastung der Außenränder durch Schub, Zug und Biegung angewendet und bis zur zahlenmäßigen Lösung geführt. Dabei wird die Rechnung allgemeingültig durchgeführt und als einzige Veränderliche nur das Verhältnis von Lochdurchmesser zu Quadratseite gewählt. Nicht untersucht ist die sehr wichtige Frage der Beulsicherheit derartiger Scheiben, wie überhaupt die Abhandlung keinen Anspruch auf Vollständigkeit der Lösung des Problems erhebt, sondern nur ein Beitrag ist, um in Zukunft bei der Beurteilung des Spannungszustandes gelochter Scheiben nicht mehr auf das Gefühl oder auf fehlerhafte Näherungsrechnungen angewiesen zu sein.

Teil I. Ableitung des Verfahrens.

Wird eine ebene Scheibe in der x, y-Ebene, deren Dicke im folgenden mit 1 angenommen wird, nur durch Kräfte beansprucht, die in der Ebene der Scheibe wirken, so kann bekanntlich der Spannungszustand mittels der Airyschen Spannungsfunktion F folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$(1)\qquad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2};\qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2};\qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}.$$

Am differentialen Prisma lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$(2)\qquad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0;\qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

und die Spannungsdehnungsgleichungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{2G}\left(\sigma_x - \dfrac{s}{m+1}\right) \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{2G}\left(\sigma_y - \dfrac{s}{m+1}\right) \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{G}\cdot \tau_{xy}. \end{cases}$$

Es sind hierin u, v die Verschiebungen in der x, y-Richtung,

$$G = \frac{E\,m}{2\,(m+1)};\quad s = \sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$

m die Poissonsche Zahl. Setzt man in Gl. (3) die Werte für σ_x, σ_y, τ_{xy} der Gl. (1) ein, differentiiert die erste Gl. (3) zweimal partiell nach y, die zweite desgleichen nach x und die dritte nach x und y, so erhält man nach Addition der beiden ersten die Identität

$$(4)\qquad \frac{1}{2G}\left[\left(\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \frac{1}{m+1}\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\varDelta F)\right) + \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - \frac{1}{m+1}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varDelta F)\right)\right] = -\frac{1}{G}\cdot\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2}.$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\frac{1}{2G}\cdot\frac{m}{m+1}\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\cdot\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right) = \frac{1}{2G}\cdot\frac{m}{m+1}\cdot\varDelta\varDelta F = 0,$$

und da m nur zwischen den Grenzen 2 und ∞ veränderlich ist — bei Stahl ist $m = 10/3$ —, ergibt sich die allgemeine Differentialgleichung der Scheibe

$$(5)\qquad \varDelta\varDelta F = 0.$$

Außerdem muß die Funktion F am Rande der Scheibe bestimmte Werte annehmen, die von der Begrenzung und Belastung desselben abhängig sind. Diese Bedingungen werden an einem Randelement abgeleitet. Mit den Bezeichnungen von Bild 1, wobei Ξ, H die Belastung des Scheibenrandes ist, lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sigma_y\, dx - \tau\, dy = -H\, ds \qquad -\tau\, dx + \sigma_x\, dy = +\Xi\, ds.$$

In Verbindung mit Gl. (1) wird

$$\frac{\partial^2 F}{dx^2}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = -H$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = +\Xi.$$

Durch Integration ergibt sich

$$(6)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} = -\int H\, ds = -Q,\qquad \frac{\partial F}{\partial y} = +\int \Xi\, ds = +P$$

$$(7)\qquad F = \int\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot dy\right) = \int(-Q\, dx + P\, dy).$$

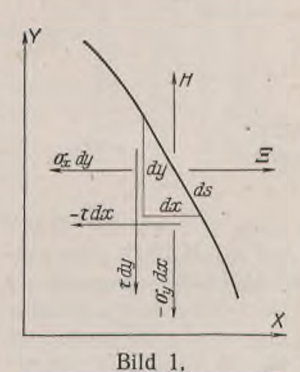


Bild 1.

Die Integration erstreckt sich von einem beliebigen Anfangspunkt A bis zu einem Bezugspunkt S. Die Funktion F kann mit dem Moment verglichen werden. Die Ableitung der Spannungsfunktion F nach der Randnormalen lautet mit $dx/dn = dy/ds$ und $dy/dn = -dx/ds$:

$$(8)\qquad \frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dn} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dn} = -\left(Q\cdot\frac{dy}{ds} + P\cdot\frac{dx}{ds}\right).$$

Es besteht also die Aufgabe darin, eine Funktion F zu finden, die der Differentialgleichung $\varDelta\varDelta F = 0$ genügt und am Rande der Scheibe die durch die Belastung und Begrenzung vorgeschriebenen Werte F und $\partial F/\partial n$ annimmt.

Wenden wir uns nunmehr dem speziellen Problem zu, den Spannungszustand am unbelasteten Innenrand einer gelochten Scheibe zu ermitteln, so genügt hierfür die Kenntnis von $\varDelta F$, da dies die Spannungsinvariante $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\vartheta$ und $\sigma_r = 0$ ist. Es gibt also $\varDelta F$ am Innenrand unmittelbar die gesuchte Lochrandspannung σ_ϑ an. Wir setzen $\varDelta F \equiv \Phi$ und bemerken, daß $\varDelta\Phi = \varDelta\varDelta F = 0$. Φ erfüllt also die Gleichung $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$ und ist damit eine Potentialfunktion. Für einige Sonderfälle ist es möglich, die Lösung in geschlossener Form zu erhalten. Für allgemeine Fälle führt folgender Weg zum Ziel. Es wird approximiert:

$$(9)\qquad \Phi = \sum c_\nu\, \varphi_\nu(x, y).$$

Im Gegensatz zu dem bekannten Variationsverfahren von Ritz, das für φ_ν Funktionen wählt, die die Randbedingungen erfüllen, wählen wir für φ_ν Potentialfunktionen, die die Differentialgleichung $\varDelta\Phi = 0$ erfüllen. Die Koeffizienten c_ν werden so bestimmt, daß der durch die Näherungsfunktionen entstehende Fehler im Sinne der Fehlerrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate ein Minimum wird. Bei hinreichender

Anzahl von Gliedern $c_\nu \varphi_\nu$ kann jede gewünschte Genauigkeit erreicht werden. Es zeigt sich jedoch, daß schon bei wenigen Gliedern rechnerisch brauchbare Ergebnisse erhalten werden. Der Minimumansatz lautet:

$$\text{(10)} \qquad \text{Min} = \iint \left(\Delta F - \sum_1^n c_\nu \varphi_\nu \right)^2 dx\, dy.$$

Es folgt daraus durch Differentiation nach dem Koeffizienten c_μ

$$\text{(11)} \qquad \frac{\partial\, \text{Min}}{\partial c_\mu} = \iint \left(\Delta F \varphi_\mu - \sum_1^n c_\nu \varphi_\nu \varphi_\mu \right) dx\, dy = 0.$$

Die linke Seite dieses Integrals wird durch den Greenschen Satz von einem Gebietsintegral in ein Randintegral überführt:

$$\iint \left(\Delta F \varphi_\mu - \Delta \varphi_\mu F \right) dx\, dy = \oint \left(\varphi_\mu \cdot \frac{\partial F}{\partial n} - F \cdot \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial n} \right) ds$$

Nun ist, da φ eine Potentialfunktion, $\Delta \varphi = 0$, und Gl. (11) geht über in

$$\text{(12)} \qquad \sum_1^n c_\nu \iint \varphi_\nu \varphi_\mu\, dx\, dy = \oint \left(\varphi_\mu \cdot \frac{\partial F}{\partial n} - F \cdot \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial n} \right) ds.$$

Diese Gleichung bedeutet ein System von n linearen Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten c_ν.

Zum Schluß dieses Teiles sei noch eine einfache Methode zur Bildung von Potentialfunktionen erwähnt: Bildet man die analytische Funktion $f(z) = f(x + iy)$ und zerlegt diese in den reellen und imaginären Teil, so daß $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, ist sowohl u wie auch v eine Potentialfunktion (u und v sind konjugiert). Setzen wir z. B.

$$f(z) = (x + iy)^n,$$

so ist mit $x = r \cdot \cos\vartheta$, $y = r \cdot \sin\vartheta$

$$f(z) = r^n (\cos\vartheta + i \cdot \sin\vartheta)^n$$

und nach Anwendung des Moivreschen Satzes

$$(\cos\vartheta + i \cdot \sin\vartheta)^n = \cos n\vartheta + i \cdot \sin n\vartheta$$

ergeben sich $r^n \cdot \cos n\vartheta$ und $r^n \cdot \sin n\vartheta$ zu Potentialfunktionen. Diese Funktionen werden wir im folgenden für φ verwenden.

Teil II. Anwendung auf eine Quadratscheibe.

Die zahlenmäßige Rechnung wird für eine quadratische Scheibe mit mittigem, kreisförmigem Loch nach Bild 2 durchgeführt. Das System ist zu den Achsen $\vartheta = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$ symmetrisch.

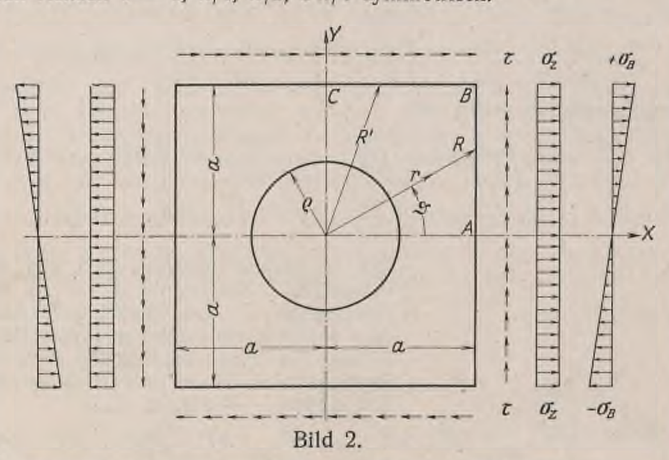


Bild 2.

Die in Bild 2 angegebenen Belastungen τ, σ_z, σ_B sowie die daraus bestimmbaren Randwerte für F und $\partial F / \partial n$ sind symmetrisch oder antimetrisch. Der Ansatz $\Phi = \sum c_\nu \varphi_\nu$ braucht bei jedem Belastungsfall nur solche Funktionen φ_ν zu enthalten, die dieselben Symmetrieeigenschaften besitzen, da alle anderen bei der Integration über den gesamten Bereich offensichtlich Null werden. Ferner genügt es, die Integration nur auf das Teilgebiet zu erstrecken, das zwischen zwei Symmetrie- bzw. zwischen einer Symmetrie- und einer Antimetrieachse liegt.

A. Die auf Schub beanspruchte Scheibe.

Den Symmetrieeigenschaften der Randbelastung τ (Bild 2) genügen die Funktionen $\sin(4m - 2)\vartheta$, $m = 1, 2, 3 \ldots.$ Der Ansatz für Gl. (9) wird somit

$$\text{(13)} \qquad \Phi = c_1 r^2 \cdot \sin 2\vartheta + c_2 r^6 \cdot \sin 6\vartheta + \ldots + c_3 r^{-2} \cdot \sin 2\vartheta + c_4 r^{-6} \cdot \sin 6\vartheta + \ldots$$

Mit diesem Ansatz erhält man eine genügende Näherung für $0 < \varrho < \frac{a}{2}$

Bei größerem Lochdurchmesser müßte $r^{\pm 10} \cdot \sin 10\vartheta$ usw. hinzugefügt werden. Die Integrale der Gl. (12) erstrecken sich auf den Bereich $0 < \vartheta < \pi/4$. Setzt man die Werte der Gl. (13) in Gl. (12) ein, so erhält man die Bedingungsgleichungen:

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + c_3 a_{13} + c_4 a_{14} = a_{10} \\ c_1 a_{21} + c_2 a_{22} + c_3 a_{23} + c_4 a_{24} = a_{20} \\ c_1 a_{31} + c_2 a_{32} + c_3 a_{33} + c_4 a_{34} = a_{30} \\ c_1 a_{41} + c_2 a_{42} + c_3 a_{43} + c_4 a_{44} = a_{40}. \end{cases}$$

Hierin sind die Vorzahlen $a_{\mu\nu} = \iint \varphi_\mu \varphi_\nu\, dx\, dy$, die Belastungszahlen $a_{\mu_0} = \int \left(\varphi_\mu \cdot \frac{\partial F}{\partial n} - F \cdot \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial n} \right) ds$. Da $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$, ist das Gleichungssystem zur Hauptdiagonale symmetrisch. Eine einfache Lösung der Integrale ergibt sich bei Verwendung von Polarkoordinaten.

Berechnung der Vorzahlen $a_{\mu\nu}$.

Die Vorzahlen $a_{\mu\nu}$ erhält man als Integral über das gleichschenklige Dreieck O—A—B (Bild 2), abzüglich des Kreissektors mit Radius ϱ

$$a_{\mu\nu} = a'_{\mu\nu} - a''_{\mu\nu} = \int_0^{\pi/4} \int_\varrho^R r^{\pm\mu\pm\nu} \cdot \sin\mu\vartheta \cdot \sin\nu\vartheta\, dx\, dy;$$

mit $dx\, dy = r\, dr\, d\vartheta$ und $R = \frac{a}{\cos\vartheta}$ ist nach Integration von ϱ bis R:

$$\text{(15)} \qquad a'_{\mu\nu} = \frac{a^{\pm\mu\pm\nu+2}}{\pm\mu\pm\nu+2} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\mu\vartheta \cdot \sin\nu\vartheta}{\cos^{\pm\mu\pm\nu+2}\vartheta} \cdot d\vartheta,$$

$$\text{(16)} \qquad a''_{\mu\nu} = \frac{\varrho^{\pm\mu\pm\nu+2}}{\pm\mu\pm\nu+2} \int_0^{\pi/4} \sin\mu\vartheta \cdot \sin\nu\vartheta\, d\vartheta.$$

Berechnung der Belastungszahlen a_{μ_0}.

Für die Belastungszahlen sind die Werte von F und $\partial F / \partial n$ zu ermitteln. Hierzu dienen die Gl. (7) u. (8). Da der Anfangspunkt der Integration zur Bestimmung von F und $\partial F / \partial n$ beliebig ist, ergeben die Randwerte F und $\partial F / \partial n$ zunächst nicht immer dieselbe Symmetrie wie die Belastung, diese kann aber durch Hinzufügen einer Konstanten bei $\partial F / \partial n$ sowie einer linearen Funktion in x und y bei F hergestellt werden, da in Gl. (6) u. (7) noch drei Integrationskonstanten stecken. Diese sind am Außenrand willkürlich und haben auf die Spannungen, die ja die zweiten Ableitungen von F sind, keinen Einfluß. Am Innenrand werden bei diesem Ansatz die Integrationskonstanten Null.

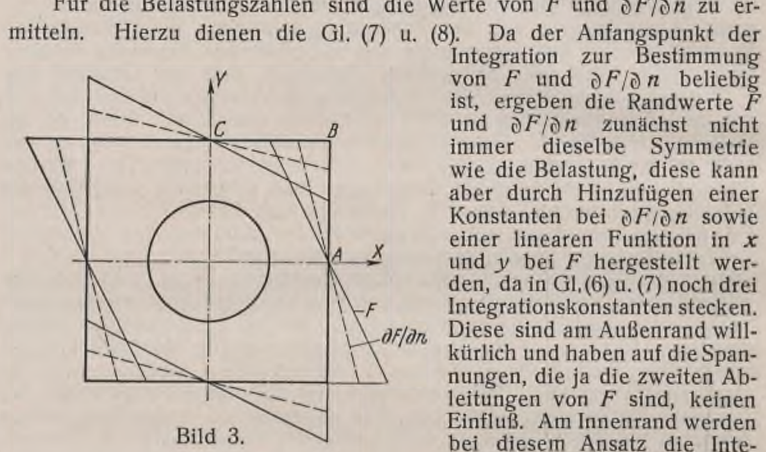


Bild 3.

Am Rand $0 < \vartheta < \pi/4$ ist

$$\text{(17)} \qquad \frac{\partial F}{\partial n} = -\tau y = -\tau a \cdot \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta},$$

$$\text{(18)} \qquad F = -\tau a y = -\tau a^2 \cdot \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}.$$

Die Richtigkeit wird nachgeprüft durch Vergleich der F-Fläche mit der Momentenfläche aus der Belastung, wenn der Rand als Rahmen aufgefaßt wird. Am Rand $0 < \vartheta < \pi/4$ ist ferner

$$\text{(19)} \qquad \varphi_\mu = r^{\pm\mu} \cdot \sin\mu\vartheta = a^{\pm\mu} \cdot \frac{\sin\mu\vartheta}{\cos^{\pm\mu}\vartheta}$$

und die Ableitung von φ_μ nach der Randnormalen, in diesem Falle also nach x,

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dx} + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dx},$$

wobei

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial r} = \pm\mu\, a^{\pm\mu-1} \cdot \frac{\sin\mu\vartheta}{\cos^{\pm\mu-1}\vartheta}, \qquad \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \vartheta} = \mu\, a^{\pm\mu} \cdot \frac{\cos\mu\vartheta}{\cos^{\pm\mu}\vartheta}$$

$$\frac{dr}{dx} = \cos\vartheta, \qquad \frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta}{a}$$

und damit

$$\text{(20)} \qquad \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial n} = \mu\, a^{\pm\mu-1} \cdot \frac{\pm \sin\mu\vartheta \cdot \cos\vartheta - \cos\mu\vartheta \cdot \sin\vartheta}{\cos^{\pm\mu-1}\vartheta}.$$

Es können nun die Belastungszahlen a_{μ_0} aus Gl. (17) bis (20) mit $ds = dy = \frac{a}{\cos^2\vartheta}$ angeschrieben werden:

$$\text{(21)} \qquad a_{\mu_0} = -\tau \int_0^{\pi/4} \left(a^{\pm\mu+2} \cdot \frac{\sin\mu\vartheta \cdot \sin\vartheta}{\cos^{\pm\mu+3}\vartheta} + \mu\, a^{\pm\mu+2} \cdot \frac{\mp \sin\mu\vartheta \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta + \cos\mu\vartheta \cdot \sin^2\vartheta}{\cos^{\pm\mu+2}\vartheta} \right) d\vartheta.$$

Die Werte der Gl. (15), (16) u. (21) in Gl. (14) eingesetzt, ergeben die Koeffizienten c_1 bis c_4 und diese nach Gl. (13) die Spannungssumme φ, also am Lochrand die gesuchte Tangentialspannung

$$\sigma_\vartheta = \left(c_1 \varrho^2 + c_3 \varrho^{-2}\right) \sin 2\vartheta + \left(c_2 \varrho^6 + c_4 \varrho^{-6}\right) \sin 6\vartheta. \tag{22}$$

Für die zahlenmäßige Durchführung empfiehlt es sich, die zu integrierenden Funktionen als Potenzen von $\cos\vartheta$ auszudrücken. Die dazu nötigen Formeln lauten bei Berücksichtigung der beiden folgenden Belastungsfälle:

$$\sin 2\vartheta = 2 \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta$$
$$\sin 6\vartheta = 32 \cdot \sin\vartheta \cdot \cos^3\vartheta + 6 \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta$$
$$\sin 2\vartheta \cdot \sin 2\vartheta = 4 \cdot \cos^2\vartheta - 4 \cdot \cos^4\vartheta$$
$$\sin 2\vartheta \cdot \sin 6\vartheta = 12 \cdot \cos^2\vartheta - 76 \cdot \cos^4\vartheta + 128 \cdot \cos^6\vartheta - 64 \cdot \cos^8\vartheta$$
$$\sin 6\vartheta \cdot \sin 6\vartheta = 36 \cdot \cos^2\vartheta - 420 \cdot \cos^4\vartheta + 1792 \cdot \cos^6\vartheta - 3456 \cdot \cos^8\vartheta + 3072 \cdot \cos^{10}\vartheta - 1024 \cdot \cos^{12}\vartheta$$
$$\cos 2\vartheta = 2 \cdot \cos^2\vartheta - 1$$
$$\cos 4\vartheta = 8 \cdot \cos^4\vartheta - 8 \cdot \cos^2\vartheta + 1$$
$$\cos 6\vartheta = 32 \cdot \cos^6\vartheta - 48 \cdot \cos^4\vartheta + 18 \cdot \cos^2\vartheta - 1$$
$$\cos 8\vartheta = 128 \cdot \cos^8\vartheta - 256 \cdot \cos^6\vartheta + 160 \cdot \cos^4\vartheta - 32 \cdot \cos^2\vartheta + 1$$
$$\cos 2\vartheta \cdot \cos 2\vartheta = 4 \cdot \cos^4\vartheta - 4 \cdot \cos^2\vartheta + 1$$
$$\cos 2\vartheta \cdot \cos 6\vartheta = 64 \cdot \cos^8\vartheta - 128 \cdot \cos^6\vartheta + 84 \cdot \cos^4\vartheta - 20 \cdot \cos^2\vartheta + 1$$
$$\cos 4\vartheta \cdot \cos 4\vartheta = 64 \cdot \cos^8\vartheta - 128 \cdot \cos^6\vartheta + 80 \cdot \cos^4\vartheta - 16 \cdot \cos^2\vartheta + 1$$
$$\cos 4\vartheta \cdot \cos 8\vartheta = 1024 \cdot \cos^{12}\vartheta - 3072 \cdot \cos^{10}\vartheta + 3456 \cdot \cos^8\vartheta - 1792 \cdot \cos^6\vartheta + 424 \cdot \cos^4\vartheta - 40 \cdot \cos^2\vartheta + 1$$
$$\cos 6\vartheta \cdot \cos 6\vartheta = 1024 \cdot \cos^{12}\vartheta - 3072 \cdot \cos^{10}\vartheta + 3456 \cdot \cos^8\vartheta - 1792 \cdot \cos^6\vartheta + 420 \cdot \cos^4\vartheta - 36 \cdot \cos^2\vartheta + 1$$
$$\cos 8\vartheta \cdot \cos 8\vartheta = 16\,384 \cdot \cos^{16}\vartheta - 65\,536 \cdot \cos^{14}\vartheta + 106\,496 \cdot \cos^{12}\vartheta - 90\,112 \cdot \cos^{10}\vartheta + 42\,240 \cdot \cos^8\vartheta - 10\,753 \cdot \cos^6\vartheta + 1334 \cdot \cos^4\vartheta - 64 \cdot \cos^2\vartheta + 1$$
$$\sin\vartheta \cdot \sin 2\vartheta = -2 \cdot \cos^3\vartheta + 2 \cdot \cos\vartheta$$
$$\sin\vartheta \cdot \sin 4\vartheta = -8 \cdot \cos^5\vartheta + 12 \cdot \cos^3\vartheta - 4 \cdot \cos\vartheta$$
$$\sin\vartheta \cdot \sin 6\vartheta = -32 \cdot \cos^7\vartheta + 64 \cdot \cos^5\vartheta$$
$$\sin\vartheta \cdot \sin 8\vartheta = -128 \cdot \cos^9\vartheta + 320 \cdot \cos^7\vartheta - 272 \cdot \cos^5\vartheta + 88 \cdot \cos^3\vartheta - 8 \cdot \cos\vartheta.$$

Aus diesen Formeln erkennt man die verhältnismäßig große Fehlerempfindlichkeit. Ferner werden folgende Rekursionsformeln benutzt:

$$\int \cos^m\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{m} \cdot \sin\vartheta \cdot \cos^{m-1}\vartheta + \frac{m+1}{m}\int \cos^{m-2}\vartheta\, d\vartheta,$$

$$\int \cos^{-m}\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{m-1} \cdot \frac{\sin\vartheta}{\cos^{m-1}\vartheta} + \frac{m-2}{m}\int \frac{d\vartheta}{\cos^{m-2}\vartheta}.$$

Die Durchführung der Zahlenrechnung führte zu folgendem Ergebnis:

Tabelle der Koeffizienten c_1 bis c_4.

ϱ/a	c_1	c_2	c_3	c_4
$1/8$	$+0{,}121\,298\,\tau a^{-2}$	$+0{,}036\,837\,\tau a^{-6}$	$-0{,}065\,651\,\tau a^2$	$-0{,}000\,000\,\tau a^6$
$1/4$	$+0{,}543\,327\,\tau a^{-2}$	$+0{,}162\,981\,\tau a^{-6}$	$-0{,}305\,638\,\tau a^2$	$-0{,}000\,000\,\tau a^6$
$3/8$	$+1{,}489\,793\,\tau a^{-2}$	$+0{,}436\,814\,\tau a^{-6}$	$-0{,}895\,907\,\tau a^2$	$-0{,}000\,082\,\tau a^6$
$1/2$	$+2{,}760\,234\,\tau a^{-2}$	$+1{,}010\,744\,\tau a^{-6}$	$-2{,}367\,828\,\tau a^2$	$-0{,}003\,447\,\tau a^6$

Tabelle der Lochrandspannung σ_ϑ.

ϱ/a	σ_ϑ	$\max \sigma_\vartheta$
$1/8$	$(-4{,}1998 \cdot \sin 2\vartheta - 0{,}0001 \cdot \sin 6\vartheta)\,\tau$	$\mp 4{,}200\,\tau$
$1/4$	$(-4{,}8563 \cdot \sin 2\vartheta - 0{,}0013 \cdot \sin 6\vartheta)\,\tau$	$\mp 4{,}855\,\tau$
$3/8$	$(-6{,}1614 \cdot \sin 2\vartheta - 0{,}0284 \cdot \sin 6\vartheta)\,\tau$	$\mp 6{,}133\,\tau$
$1/2$	$(-8{,}7812 \cdot \sin 2\vartheta - 0{,}2048 \cdot \sin 6\vartheta)\,\tau$	$\mp 8{,}576\,\tau$

$\max \sigma_\vartheta$ tritt auf bei $\vartheta = 3\pi/4,\ 7\pi/4$, $\min \sigma_\vartheta$ bei $\pi/4,\ 5\pi/4$.

B. Die auf Zug beanspruchte Scheibe.

Die in Bild 2 angegebene Zugbelastung σ_z wird in zwei Belastungsfälle aufgespalten, von denen der eine Zugbelastung an allen vier Seiten der Quadratscheibe, der andere Zugbelastung an den Seiten $x =$ konst und Druckbelastung an den Seiten $y =$ konst hervorruft. Die Belastung ist jeweils $q = \sigma_{z/2}$. Der erste Belastungsfall ist zu allen vier Achsen symmetrisch, der zweite ist zu den Achsen $\vartheta = 0,\ \pi/2$ symmetrisch, zu $\vartheta = \pi/4,\ 3\pi/4$ antimetrisch. Von diesen Eigenschaften wird bei der Wahl der Funktionen φ Gebrauch gemacht. Die Integration erstreckt sich wie bei dem Schubbelastungsfall auf den Bereich $0 < \vartheta < \pi/4$. Der Rechnungsgang ist prinzipiell derselbe wie beim vorigen Beispiel. Es werden deshalb ohne weitere Erläuterungen die Zwischenergebnisse und das Endergebnis mitgeteilt.

1. Symmetrischer Lastfall.

Geeignete Näherungsfunktionen für Φ sind:

$$\Phi = c_1 + c_2 r^4 \cdot \cos 4\vartheta + c_3 r^8 \cdot \cos 8\vartheta + c_4 r^{-4} \cdot \cos 4\vartheta + c\, r_5^{-8} \cdot \cos 8\vartheta \tag{23}$$

$$\left\{\begin{aligned} a'_{\mu\nu} &= \frac{a^{\pm\mu\pm\nu+2}}{\pm\mu\pm\nu+2}\int_0^{\pi/4} \frac{\cos\mu\vartheta \cdot \cos\nu\vartheta}{\cos^{\pm\mu\pm\nu+2}\vartheta} \cdot d\vartheta \\ a''_{\mu\nu} &= \frac{\varrho^{\pm\mu\pm\nu+2}}{\pm\mu\pm\nu+2}\int_0^{\pi/4} \cos\mu\vartheta \cdot \cos\nu\vartheta\, d\vartheta. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Am Rand $0 < \vartheta < \pi/4$ ist

$$\frac{\partial F}{\partial n} = +q\,a \tag{25}$$

$$F = +\frac{q\,a^2}{2} \cdot \frac{\cos^2\vartheta + 1}{\cos^2\vartheta} \tag{26}$$

$$\varphi_\mu = a^{\pm\mu} \cdot \frac{\cos\mu\vartheta}{\cos^{\pm\mu}\vartheta} \tag{27}$$

$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial n} = \mu\, a^{\pm\mu-1} \cdot \frac{\sin\mu\vartheta \cdot \sin\vartheta \pm \cos\mu\vartheta \cdot \cos\vartheta}{\cos^{\pm\mu-1}\vartheta} \tag{28}$$

$$a_{\mu_0} = q\,a^{\pm\mu+2}\left[\left(1 \mp \frac{\mu}{2}\right)\int_0^{\pi/4} \frac{\cos\mu\vartheta}{\cos^{\pm\mu+2}\vartheta} \cdot d\vartheta - \frac{\mu}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{\sin\mu\vartheta \cdot \sin\vartheta}{\cos^{\pm\mu+1}\vartheta} \cdot d\vartheta - \frac{\mu}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{\sin\mu\vartheta \cdot \sin\vartheta}{\cos^{\pm\mu+3}\vartheta} \cdot d\vartheta \mp \frac{\mu}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{\cos\mu\vartheta}{\cos^{\pm\mu}\vartheta} \cdot d\vartheta\right]. \tag{29}$$

Tabelle der Koeffizienten c_1 bis c_5.

ϱ/a	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
$1/8$	$+2{,}028\,498\,q$	$+0{,}016\,891\,q\,a^{-4}$	$+0{,}002\,530\,q\,a^{-8}$	$-0{,}000\,000\,q\,a^4$	$-0{,}000\,000\,q\,a^8$
$1/4$	$+2{,}119\,101\,q$	$+0{,}070\,720\,q\,a^{-4}$	$+0{,}010\,619\,q\,a^{-8}$	$-0{,}000\,044\,q\,a^4$	$-0{,}000\,000\,q\,a^8$
$3/8$	$+2{,}289\,766\,q$	$+0{,}173\,896\,q\,a^{-4}$	$+0{,}026\,459\,q\,a^{-8}$	$-0{,}001\,128\,q\,a^4$	$-0{,}000\,000\,q\,a^8$
$1/2$	$+2{,}582\,663\,q$	$+0{,}364\,565\,q\,a^{-4}$	$+0{,}058\,182\,q\,a^{-8}$	$-0{,}011\,693\,q\,a^4$	$-0{,}000\,010\,q\,a^8$

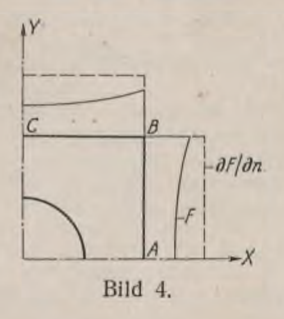


Bild 4.

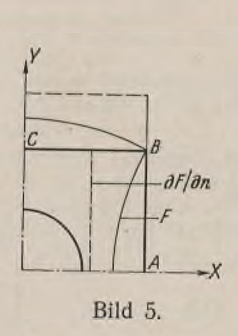


Bild 5.

Tabelle der Lochrandspannung σ_ϑ.

ϱ/a	σ_ϑ	$\max \sigma_\vartheta$
$1/8$	$(+2{,}0285 - 0{,}0007 \cdot \cos 4\vartheta - 0{,}0000 \cdot \cos 8\vartheta)\,q$	$+2{,}029\,q$
$1/4$	$(+2{,}1191 - 0{,}0110 \cdot \cos 4\vartheta - 0{,}0000 \cdot \cos 8\vartheta)\,q$	$+2{,}130\,q$
$3/8$	$(+2{,}2898 - 0{,}0536 \cdot \cos 4\vartheta - 0{,}0002 \cdot \cos 8\vartheta)\,q$	$+2{,}344\,q$
$1/2$	$(+2{,}5827 - 0{,}1643 \cdot \cos 4\vartheta - 0{,}0024 \cdot \cos 8\vartheta)\,q$	$+2{,}345\,q$

$\max \sigma_\vartheta$ tritt auf bei $\vartheta = \pi/4,\ 3\pi/4,\ 5\pi/4,\ 7\pi/4$.

2. Antimetrischer Lastfall.

Geeignete Näherungsfunktionen für Φ sind:

$$\Phi = c_6 r^2 \cdot \cos 2\vartheta + c_7 r^6 \cdot \cos 6\vartheta + c_8 r^2 \cdot \cos 2\vartheta + c_9 r^{-6} \cdot \cos 6\vartheta. \tag{30}$$

Für $a'_{\mu\nu}$, $a''_{\mu\nu}$ sind die Formeln (24) gültig.

Am Rand $0 < \vartheta < \pi/4$ ist

$$\frac{\partial F}{\partial n} = -q\,a \tag{31}$$

$$F = -\frac{q\,a^2}{2} \cdot \frac{2 \cdot \cos^2\vartheta - 1}{\cos^2\vartheta}. \tag{32}$$

φ_μ und $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial n}$ nach Gl. (27) u. (28) ergibt:

$$a_{\mu_0} = q\, a^{\pm\mu+2}\left[\left(-1 \mp \frac{\mu}{2}\right)\int_0^{\pi/4} \frac{\cos\mu\vartheta}{\cos^{\pm\mu+2}\vartheta}\cdot d\vartheta + \mu\int_0^{\pi/4}\frac{\sin\mu\vartheta\cdot\sin\vartheta}{\cos^{\pm\mu+1}\vartheta}\cdot d\vartheta - \frac{\mu}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{\sin\mu\vartheta\cdot\sin\vartheta}{\cos^{\pm\mu+3}\vartheta}\cdot d\vartheta \pm \mu\int_0^{\pi/4}\frac{\cos\mu\vartheta}{\cos^{\pm\mu}\vartheta}\cdot d\vartheta\right].$$

Tabelle der Koeffizienten c_6 bis c_9.

ϱ/a	c_6	c_7	c_8	c_9
$^1/_8$	$+0{,}175\,037\,q\,a^{-2}$	$+0{,}030\,146\,q\,a^{-6}$	$-0{,}066\,315\,q\,a^2$	$-0{,}000\,000\,q\,a^{-6}$
$^1/_4$	$+0{,}803\,503\,q\,a^{-2}$	$+0{,}136\,257\,q\,a^{-6}$	$-0{,}318\,730\,q\,a^2$	$-0{,}000\,001\,q\,a^{-6}$
$^3/_8$	$+2{,}307\,428\,q\,a^{-2}$	$+0{,}380\,049\,q\,a^{-6}$	$-0{,}991\,401\,q\,a^2$	$-0{,}000\,079\,q\,a^{-6}$
$^1/_2$	$+5{,}988\,509\,q\,a^{-2}$	$+0{,}941\,590\,q\,a^{-6}$	$-0{,}890\,445\,q\,a^2$	$-0{,}002\,991\,q\,a^{-6}$

Tabelle der Lochrandspannung σ_ϑ.

ϱ/a	σ_ϑ	max σ_ϑ
$^1/_8$	$(-\ 4{,}2414\cdot\cos 2\vartheta)\,q$	$\mp 4{,}241\,q$
$^1/_4$	$(-\ 5{,}0495\cdot\cos 2\vartheta - 0{,}0022\cdot\cos 6\vartheta)\,q$	$\mp 5{,}052\,q$
$^3/_8$	$(-\ 6{,}7255\cdot\cos 2\vartheta - 0{,}0273\cdot\cos 6\vartheta)\,q$	$\mp 6{,}753\,q$
$^1/_2$	$(-10{,}0647\cdot\cos 2\vartheta - 0{,}1758\cdot\cos 6\vartheta)\,q$	$\mp 10{,}241\,q$

min σ_ϑ tritt auf bei $\vartheta = 0,\ \pi$; max σ_ϑ bei $\vartheta = \pi/2,\ 3\pi/2$.

Die Zusammenfassung von Fall 1 und 2 ergibt die Lochrandspannung bei einseitigem Zug gemäß Bild 2. Die größte Spannung tritt auf bei $\vartheta = \pi/2,\ 3\pi/2$ und beträgt

ϱ/a	max σ_ϑ
$^1/_8$	$+3{,}135\,\sigma_z$
$^1/_4$	$+3{,}580\,\sigma_z$
$^3/_8$	$+4{,}494\,\sigma_z$
$^1/_2$	$+6{,}328\,\sigma_z$

C. Die auf Biegung beanspruchte Scheibe.

Die in Bild 2 angegebene Biegebelastung mit der maximalen Randspannung σ_B kann nicht weiter aufgespalten werden. Die Integration der Vor- und Belastungszahlen muß sich deshalb auf den Bereich $0 < \vartheta < \pi/2$ erstrecken.

Geeignete Näherungsfunktionen für Φ sind

$$(33)\qquad \Phi = c_1\, r\cdot\sin\vartheta + c_3\, r^3\cdot\sin 3\vartheta + c_5\, r^5\cdot\sin 5\vartheta + c_2\, r^{-1}\cdot\sin\vartheta + c_4\, r^{-3}\cdot\sin 3\vartheta + c_6\, r^{-5}\cdot\sin 5\vartheta + \ldots$$

Wir beschränken uns jedoch zur Vereinfachung der Rechnung nur auf

$$\Phi = c_1\, r\cdot\sin\vartheta + c_2\, r^{-1}\cdot\sin\vartheta.$$

Wie wir bei dem Schub- und Zugbelastungsfall gesehen haben, wird der Einfluß der folgenden Glieder gering sein. Mit $R = a/\cos\vartheta$, $R' = a/\sin\vartheta$ erfolgt die Berechnung der Vorzahlen $a_{\mu\nu}$ entsprechend Gl. (15) u. (16) zu

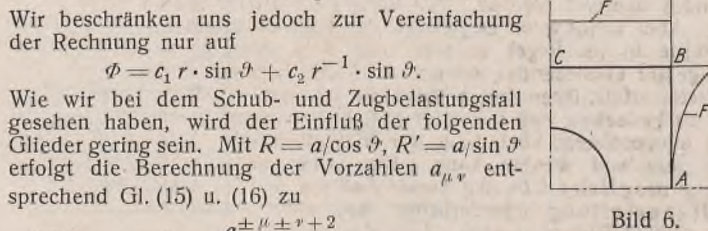


Bild 6.

$$(35)\qquad a'_{\mu\nu} = \frac{a^{\pm\mu\pm\nu+2}}{\pm\mu\pm\nu+2}\left[\int_0^{\pi/4}\frac{\sin\mu\vartheta\cdot\sin\nu\vartheta}{\cos^{\pm\mu\pm\nu+2}\vartheta}\cdot d\vartheta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin\mu\vartheta\cdot\sin\nu\vartheta}{\sin^{\pm\mu\pm\nu+2}\vartheta}\cdot d\vartheta\right],$$

$$(36)\qquad a''_{\mu\nu} = \frac{\varrho^{\pm\mu\pm\nu+2}}{\pm\mu\pm\nu+2}\int_0^{\pi/2}\sin\mu\vartheta\cdot\sin\nu\vartheta\, d\vartheta.$$

Damit werden $a_{11} = \frac{a^4}{3} - \pi\cdot\frac{\varrho^4}{16}$; $\qquad a_{12} = \frac{a^2}{2} - \pi\cdot\frac{\varrho^2}{8}$.

Die Vorzahl a_{22} läßt sich nach diesen Formeln nicht lösen, da $-\mu-\nu+2 = 0$. Es ist

$$a_{22} = \int_0^{\pi/4}\int_\varrho^R r^{-1}\cdot\sin^2\vartheta\, dr\, d\vartheta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_\varrho^{R'} r^{-1}\cdot\sin^2\vartheta\, dr\, d\vartheta$$

$$= \int_0^{\pi/4}\left[\ln\left(\frac{a}{\cos\vartheta}\right) - \ln\varrho\right]\sin^2\vartheta\, d\vartheta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\ln\left(\frac{a}{\sin\vartheta}\right) - \ln\varrho\right]\sin^2\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\ln\left(\frac{a}{\varrho}\right) - \int_0^{\pi/4}\ln(\cos\vartheta)\, d\vartheta.$$

Mittels der Maclaurinschen Reihe wird

$$\ln(\cos\vartheta) = -\frac{\vartheta^2}{2} - \frac{\vartheta^4}{12} - \frac{\vartheta^6}{45} - \frac{17\,\vartheta^8}{2520} - \frac{521\,\vartheta^{10}}{226\,800} - \ldots$$

und

$$\int_0^{\pi/4}\ln(\cos\vartheta) = -\frac{(\pi/4)^3}{6} - \frac{(\pi/4)^5}{60} - \frac{(\pi/4)^7}{315} - \frac{17\,(\pi/4)^9}{22\,680} - \frac{521\,(\pi/4)^{11}}{2\,494\,800} - \ldots$$

Damit wird

$$a_{22} = \frac{\pi}{4}\cdot\ln\left(\frac{a}{\varrho}\right) + 0{,}0861.$$

Bereich	F	$\partial F/\partial n$
$0 < \vartheta < \pi/4$	$\frac{\sigma_B}{6a}\cdot y^3$	—
$\pi/4 < \vartheta < \pi/2$	$\frac{\sigma_B}{6}\cdot a^2$	$\frac{\sigma_B}{2}\cdot a$

Die Ermittlung der Belastungszahlen a_{μ_0} bietet keine Schwierigkeiten und wird genau wie bei den vorigen Beispielen durchgeführt. Es muß nur beachtet werden, daß jetzt bis $\vartheta = \pi/2$ zu integrieren ist. Es ergibt sich

$$a_{10} = \frac{a^3}{3}\cdot\sigma_B;\quad a_{20} = \frac{a}{3}\cdot\sigma_B\int_0^{\pi/4}\left(1 - 2\cdot\cos^2\vartheta\,\nu\cdot\frac{1}{\cos^2\vartheta}\right)d\vartheta = \frac{a}{2}\cdot\sigma_B.$$

Tabelle der Koeffizienten c_1, c_2.

ϱ/a	c_1	c_2
$^1/_8$	$+0{,}995\,\sigma_B\,a^{-1}$	$+0{,}000\,\sigma_B\,a$
$^1/_4$	$+0{,}970\,\sigma_B\,a^{-1}$	$+0{,}024\,\sigma_B\,a$
$^3/_8$	$+0{,}740\,\sigma_B\,a^{-1}$	$+0{,}198\,\sigma_B\,a$
$^1/_2$	$+0{,}215\,\sigma_B\,a^{-1}$	$+0{,}658\,\sigma_B\,a$

Tabelle der Lochrandspannung σ_ϑ.

ϱ/a	σ_ϑ	max σ_ϑ
$^1/_8$	$0{,}173\,\sigma_B\cdot\sin\vartheta$	$\pm 0{,}173\,\sigma_B$
$^1/_4$	$0{,}340\,\sigma_B\cdot\sin\vartheta$	$\pm 0{,}340\,\sigma_B$
$^3/_8$	$0{,}805\,\sigma_B\cdot\sin\vartheta$	$\pm 0{,}805\,\sigma_B$
$^1/_2$	$1{,}423\,\sigma_B\cdot\sin\vartheta$	$\pm 1{,}423\,\sigma_B$

max σ_ϑ tritt auf bei $\vartheta = \pi/4,\ 5\pi/4$, min σ_ϑ bei $\vartheta = 3\pi/4,\ 7\pi/4$.

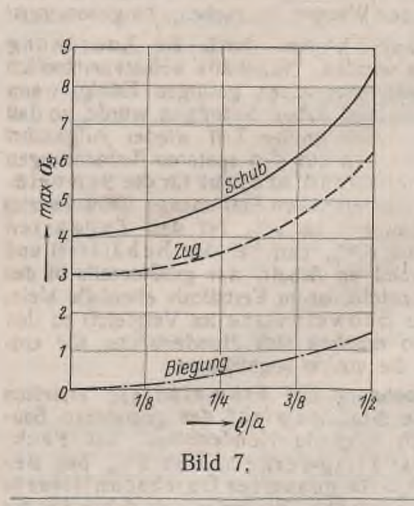


Bild 7.

Beurteilung der Ergebnisse.

Das Problem der Spannungsverteilung am Lochrand bei unendlich großen Scheibenabmessungen ist bekannt und ergibt für reinen Schub max $\sigma_\vartheta = 4\,\tau$, für reinen Zug max $\sigma_\vartheta = 3\,\sigma_z$. Die oben gefundenen Ergebnisse nähern sich schon bei $\varrho = a/8$ ziemlich genau diesen Werten. In Bild 7 ist die maximale Spannung σ_ϑ abhängig vom Lochdurchmesser zur Quadratseite dargestellt. Inwieweit sich die hier gewonnenen Ergebnisse auf das Stegblech eines Trägers anwenden lassen, bedarf noch der Klärung, da die Gurtsteifigkeit und der durchgehende Steg die hier zugrunde gelegten Randbedingungen nicht streng erfüllen. Jedoch haben von Krupp-Stahlbau und der Versuchsanstalt der Friedrich-Alfred-Hütte durchgeführte Spannungsmessungen an einem Kastenträger mit Sparlöchern ($\varrho/a \approx {}^1/_2$) ergeben, daß sowohl bei Schub wie bei Biegung am Lochrand Spannungen auftreten, die dem Verlauf und der Größe nach den hier gewonnenen entsprechen.

Als Ergebnis der Untersuchung kann gesagt werden, daß bei gelochten Trägern sowohl bei Schub wie bei Normalkraft und Biegung verhältnismäßig hohe Spannungen am Rande der Löcher entstehen. Diese treten zwar nur örtlich auf und brauchen deshalb nicht unmittelbar zu einer Gefährdung des Trägers zu führen. Bei Trägern mit häufigem Lastwechsel können sie jedoch die Ursache von Dauerbrüchen sein.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Organ des Arbeitskreises „Stahlbau“ der Fachgruppe Bauwesen im NS.-Bund Deutscher Technik

Schriftwaltung: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift DIE BAUTECHNIK Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 7 RM und Postgeld

15. Jahrgang BERLIN, 11. September 1942 Heft 19/20

Der Schweißniet.

Von Professor Dr.-Ing. **Robert Schönhöfer,** Braunschweig.

Die Nietverschwächung, bisher ein notwendiges Übel.

Es ist leider eine bekannte Tatsache, daß die durch die Niete bedingten Verschwächungen der Querschnitte bisher als ein notwendiger und nicht abwendbarer Verlust in Kauf genommen wurden. Wie groß diese Verluste sind, wird erst klar, wenn man diesbezügliche Beispiele betrachtet. Zu den folgenden Beispielen wird vorausgeschickt, daß nur die Verluste festgestellt worden sind, die sich durch die Anordnung von Schweißnieten vermeiden lassen.

Eine Fachwerkbrücke von ungefähr 70 m Stützweite mit zwei Hauptträgern besitzt in den 10 Feldern 10 m lange Zugstreben aus Breitflanschträgern mit einer durchschnittlichen Flanschendicke von 25 mm. Bei 26-mm-Anschlußnieten beträgt der Nietverlust (an der Anschlußstelle) $4 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}26 = 0{,}26$ dm². Diesem Nietverlust entspricht ein Gewicht von $100 \cdot 0{,}26 \cdot 7{,}85 =$ rd. 200 kg für jede Zugstrebe. Bei den vorhandenen 20 Zugstreben gibt das ein Gewicht von $20 \cdot 200 = 4000$ kg. Zu diesen 4 t Stahl gesellen sich noch die Gewichte der Nietverluste in den Zuggurten, Fahrbahnträgern, Wind- und Querverbänden usw. Insgesamt kann bei der vorliegenden Brücke mit einem abwendbaren Nietverlustgewicht von 7 bis 8 t gerechnet werden. Als weiteres Beispiel sei ein Stahldach betrachtet, welches aus 20 genieteten Blechträgern von 15 m Stützweite besteht. In den 10 mm dicken Stegblechen der Träger befinden sich (innerhalb der Gurtwinkel) 8 Stück 20-mm-Niete. Bei einem Träger beträgt das Nietverlustgewicht $150 \cdot 8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 7{,}85 = 188$ kg. Bei 20 Dachträgern bringt dies $20 \cdot 188 = 3760$ kg. Werden die anderen noch vorkommenden Nietverluste berücksichtigt, so kann bei diesem Stahldach mit einem abwendbaren Nietverlustgewicht von 4 bis 5 t gerechnet werden. Ganz besonders groß sind die Verluste im Behälter- und Kesselbau. Bei einem Dampfkessel beträgt der Verlust 20 bis 30% des zylindrischen Blechmantels. Bei einem Dampfkessel von 3 m Durchm., 10 m Länge und 20 mm Blechdicke beträgt das Gewicht des Blechmantels $100 \cdot 30\,\pi \cdot 0{,}2 \cdot 7{,}85 =$ rd. 14 800 kg. Das abwendbare Nietverlustgewicht beträgt daher 3000 bis 4500 kg. Das ist ungeheuer viel. Wieviel das ist, das soll greifbar vor die Augen gebracht werden. Der Verlust bei dem Dampfkessel entspricht einem 20 mm dicken Reifen von 3 m Durchm. mit einer Breite von 2 bis 3 m. Diese in den drei Beispielen angeführten namhaften Stahlmengen hat man bisher als notwendige (!) Verluste, ohne mit der Wimper zu zucken, hingenommen!

Alle die angeführten Verluste können durch die Anordnung der Schweißniete vermieden werden. Nun hätte selbstverständlich ein solches Hilfsmittel keinen oder nur einen geringen Erfolg, wenn seine Anwendung viel Baustoff und viel Arbeit benötigen würde, so daß dadurch die erzielten Ersparnisse zum großen Teil wieder aufgezehrt werden würden. Das ist aber, wie sich aus den späteren Betrachtungen ergibt, keineswegs der Fall. Der Aufwand an Stahl für die Schweißniete beträgt in Hundertteilen der ersparten Stahlmenge (Mittelwerte) bei den Zugstäben je nach Länge 1 bis 3%, bei den Zuggurten 3 bis 6%, bei den Trägern 5 bis 10%, und bei den Behältern und Kesseln 1 bis 2%. Der Aufwand an Arbeit, der größtenteils in der Herstellung von Schweißnähten besteht, ist im Verhältnis ebenfalls klein. Betrachtet man die Kosten der Schweißniete im Vergleich zu den durch sie ersparten Beträgen, so ergeben sich Hundertsätze, die entsprechend etwas größer sind als die vorhin angeführten.

Werden die durch die Anordnung der Schweißniete erzielten Ersparnisse auf das gesamte Stahlgewicht des genieteten Bauwerks bezogen, so ergeben sich folgende Hundertsätze: bei Fachwerken 2 bis 3%, bei Vollwandtragwerken 1 bis 2%, bei Behältern und Kesseln 5 bis 10%. Als gesamter Durchschnittssatz kann etwa 1 bis 2% angenommen werden. Es ergibt sich daher für die in Großdeutschland gebauten Nietstahlbauwerke jährlich eine durch die Schweißniete erzielbare Stahlersparnis von mehreren Tausenden Tonnen. Diese riesige Stahlmenge und die damit aufgewendeten Millionen von Arbeitsstunden sind bisher unnütz vertan worden. Man muß sich wundern, daß von dem Heer der Stahlbaugestalter, die täglich vor den Reißbrettern stehen und die Stahltragwerke berechnen und entwerfen, nur unbedeutende Versuche gemacht worden sind, die Quelle dieser recht beträchtlichen Verluste zu verstopfen. Solange im Stahlbau nur genietet wurde, war die Möglichkeit der Abwehr der Nietverluste kaum gegeben. Allerdings ist in diesem Belange eine bescheidene Maßnahme vorhanden. Es betrifft dies die bekannte Verteilung der Niete im Anschluß, wenn quer zur Achse des Zugstabes mehrere Niete Platz haben. Werden in diesem Fall erst ein, dann zwei, dann drei usw. Niete angeordnet, so braucht statt mehrerer Nietlöcher nur ein einziges in Abzug gebracht zu werden. Da diese Möglichkeit der Verringerung des Nietabzugs eigentlich nur bei Zugstäben mit flach angeschlossenem ⊏-Stahl in Frage kommt, so hat dieser Fall nur eine geringe Bedeutung.

Als im Stahlbau das Schweißen Eingang gefunden hatte, da war die Möglichkeit gegeben, den Nietverlust in der Mehrzahl der Fälle zu beseitigen. Man hat jedoch von dieser Möglichkeit nur in einigen wenigen Fällen Gebrauch gemacht, wie z. B. durch Anordnung zusätzlicher angeschweißter Platten und durch angeschweißte Futterstreifen. Daß im übrigen nichts geschah, ist vor allem der Gepflogenheit zuzuschreiben, im Stahlbau entweder nur zu nieten oder nur zu schweißen. Mit dieser Gepflogenheit muß allerdings bei der Verwendung der Schweißniete gebrochen werden. Die bedeutenden Ersparnisse an Stahl werden das Brechen mit der erwähnten Gepflogenheit gebieterisch fordern.

Zu der Möglichkeit, den Nietverlust durch eine in der Nähe des Nietes zusätzlich aufgeschweißte Platte hereinzubringen, muß folgendes bemerkt werden. Für derartige Platten fehlt es meistens an Platz. Aber selbst wenn es gelingt, den Platz zu schaffen, so liegt dann die Platte in der Regel so weit vom Niet entfernt, daß ein bei der Bruchgefahr entstehender Riß um die Platte herumläuft; das heißt also, die Platte erfüllt ihren Zweck nicht, sie ist wertlos. Auch ist schließlich noch zu bedenken, daß bei einer vom Niet entfernt liegenden Platte mit einer einwandfreien Umleitung der Nietverlustkraft über die Nietstelle nicht gerechnet werden kann. Die einwandfreie und wohl auch einzig mögliche Lösung dieser Aufgabe besteht darin, daß die zur Kraftüberleitung erforderlichen Bauteile unmittelbar in den Niet selbst verlegt werden. Und das geschieht durch die Schweißniete. An dieser Stelle soll gleich erwähnt werden, daß die Schweißniete kein Allheilmittel gegen den Nietverlust darstellen. In allen Fällen, wo die Niete in Reihen gleichlaufend zur Achse des Stabes oder des Trägers liegen, kommt die Anordnung von Schweißnieten nicht in Frage. Es trifft dies z. B. bei den zusammengesetzten Zugstäben auf die Verbindungsniete der Walzstäbe, bei den Walzträgern mit Gurtplatten und bei den Blechträgern auf die Gurtniete usw. zu.

Die verschiedenen Arten der Schweißniete.

Dem Wesen nach besteht der Schweißniet aus einem am nietgeschwächten Querschnitt angeschweißten Nietkopf oder einer angeschweißten Lochscheibe, die den Nietschaft umschließt. Der angeschweißte Nietkopf oder die angeschweißte Lochscheibe bilden gewissermaßen eine Lasche, welche die Nietverlustkraft über den Niet oder um den Niet herumleitet. Es ist also dieser neue Bauteil sowohl eine Verbundform von Niet und Lasche als auch eine Verbundform von Nietung und Schweißung. Der angeschweißte Nietkopf kann entweder der vorhandene sein, oder es kann an Stelle dessen ein besonders geformter plattenförmiger Nietkopf treten. Im Falle der Verwendung von Lochscheiben bei kleinen Nietabständen werden diese zweckmäßig durch Lochstreifen ersetzt.

Schweißniet mit gewöhnlichem Nietkopf.

Ein Beispiel dieser Ausführung zeigt Bild 1. Der Nietkopf ist am nietverschwächten Querschnitt unmittelbar angeschweißt. Der Umstand, daß hier der Nietkopf und seine Schweißnaht die Nietverlustkraft überleiten muß, bedingt von vornherein das Vorhandensein einer

geringen Nietverlustfläche. Es ist ja einerseits die Querschnittsfläche des Nietkopfes verhältnismäßig klein, und es läßt andererseits die geringe Dicke der Nietkopfschweißnaht nur die Überleitung geringer Kräfte zu. Es wird daher diese Art des Schweißnietes nur bei Querschnitten mit geringer Dicke in Frage kommen.

Schweißniet mit Plattennietkopf.

Bei dem in Bild 2 dargestellten Schweißniet ist statt des üblichen Nietkopfes ein plattenförmiger Nietkopf angeordnet. In zweckdienlicher Weise wird der Setzkopf als Plattenkopf ausgebildet. Der Plattenkopf kann kreisrund, elliptisch, quadratisch oder rechteckig sein. Im letzteren Fall werden die Ecken abgerundet. Die elliptische oder rechteckige Kopfform kommt im besonderen bei Platzmangel zur Anwendung. Da der Plattenkopfquerschnitt, abgesehen von der Platzfrage, beliebig groß angeordnet werden kann, so lassen sich mit Hilfe des Plattenkopf-Schweißnietes die meisten Fälle der Vermeidung des Nietverlustes durchführen.

warm in besonderen Hammer- oder Preßmaschinen fertiggestellt werden. Das Schlagen der Niete mit Plattenköpfen bereitet keine besonderen Schwierigkeiten. Die plattenförmigen Setzköpfe können mit Hilfe der üblichen Gegenhalter oder durch Gegenhalter mit besonders geformten Köpfen an das Werkstück angepreßt werden.

Um die Schweißniete in der Praxis mit bestem Erfolg anwenden zu können, empfehlen sich folgende Maßnahmen.

Die Niete mit Plattenköpfen werden zweckmäßig in ganz bestimmten Abmessungen hergestellt, oder mit anderen Worten gesagt, sie werden genormt. Bezüglich der elliptischen oder rechteckigen Plattenköpfe wird man sich auf eine möglichst geringe Anzahl von Formen beschränken.

Die Lochscheiben werden zweckmäßig nur als kreisförmige, allenfalls auch als elliptische genormt. Die Normung von rechteckigen Lochscheiben mit runden Ecken dürfte sich nicht empfehlen.

Die genormten Plattenkopfniete und Lochscheiben, die im Handel erhältlich sind, erhalten laufende Nummern aufgeprägt.

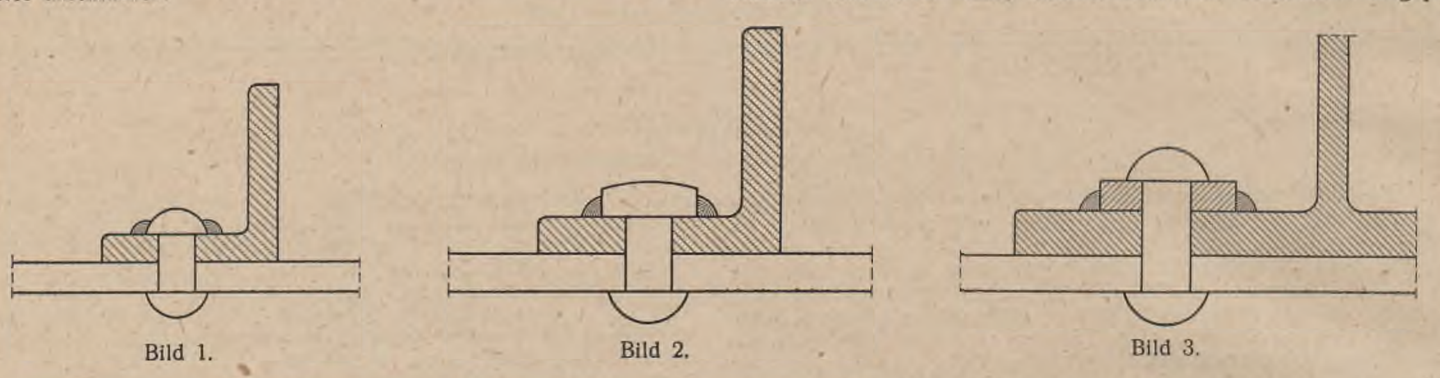


Bild 1. Bild 2. Bild 3.

Schweißniet mit Lochscheibe oder Lochstreifen.

Bild 3 zeigt eine unter dem Nietkopf angeordnete Lochscheibe bzw. einen Lochstreifen. Die Form dieser Lochscheibe kann ebenfalls kreisrund, quadratisch, elliptisch oder rechteckig sein. Bei enger Nietteilung empfiehlt es sich bzw. wird es nötig, statt einzelner Lochscheiben Lochstreifen anzuordnen. Diese Lochstreifen sind seitlich durch Gerade begrenzt, wenn das auf jeden Schweißniet entfallende Stück Schweißnaht

In den für die Schweißniete besonders herauszugebenden Normblättern sind für jede dieser Nummern der Plattenkopfnieten und der Lochscheiben alle für die Anwendung und für die Berechnung erforderlichen Zahlenwerte in besonderen Zusammenstellungen ausgewiesen.

Eine Normung der Lochstreifen dürfte sich nur für ganz bestimmte, öfter wiederkehrende Fälle empfehlen. Bei sehr beschränkten

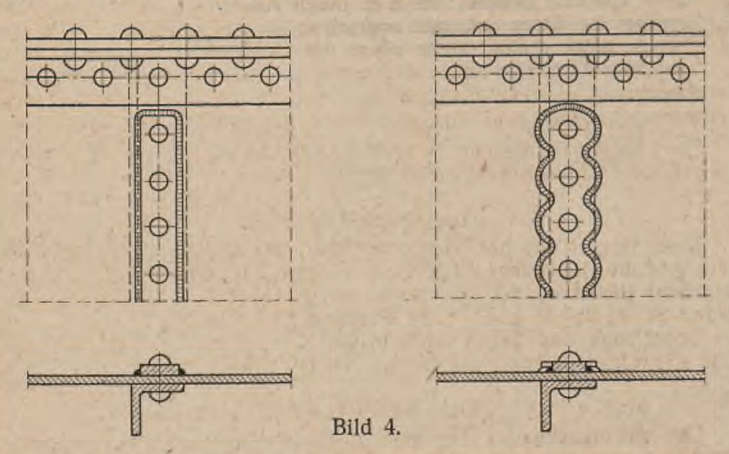


Bild 4.

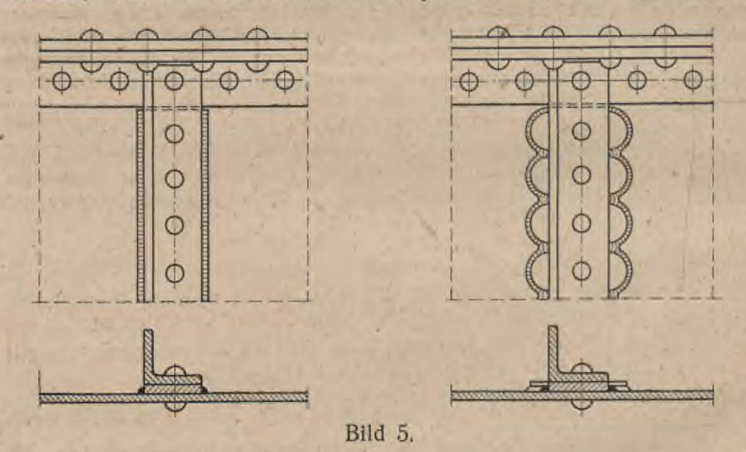


Bild 5.

hinreicht, um die betreffende Nietverlustkraft aufzunehmen. Ist das aber nicht der Fall, so muß an Stelle der geradlinigen Begrenzung eine wellenlinige treten, damit die Kraftaufnahme erreicht wird. In Bild 4 ist ein Lochstreifen mit geradliniger und ein solcher mit wellenliniger Begrenzung dargestellt.

In dem besonderen Fall, wo ein Anschlußwinkel oder ein Steifwinkel bei einem Blechträger unterfuttert ist, kann der Futterstreifen sehr zweckmäßig als Lochstreifen benutzt werden. Bild 5 zeigt einen solchen als Lochstreifen benutzten Futterstreifen, einmal mit geradliniger und einmal mit wellenliniger seitlicher Begrenzung.

Die Schweißniete mit Lochscheiben oder mit Lochstreifen gestatten die Anordnung aller möglichen Formen, Querschnitte und Schweißnähte, so daß es mit ihrer Hilfe möglich wird, wohl alle in Frage kommenden Fälle der Praxis zu lösen.

Die praktische Anwendung der Schweißniete.

Die Herstellung der Schweißniete bereitet in der Praxis nicht die geringsten Schwierigkeiten, denn es besteht ihre Ausführung aus der Erzeugung eines Nietes und einer Schweißnaht, beides altbekannte Fertigkeiten. In vielen Fällen kann bei der Anschweißung von Plattennietköpfen, Lochscheiben und Lochstreifen in zweckmäßiger Weise die maschinelle Schweißung in Frage kommen.

Die Niete mit Plattenköpfen werden zweckmäßig in Nietenfabriken mit Hilfe besonderer Nietenmaschinen hergestellt. Die Lochscheiben können kalt durch Stanzen aus Blechen (Abfallblechen) mit entsprechender Nacharbeit erzeugt werden. Sie können aber auch

Platzverhältnissen können die Schweißniete auch aus einem hochwertigen Baustahl hergestellt werden.

Die Berechnung der Schweißniete.

Die Berechnung der Schweißniete gestaltet sich denkbar einfach. Nachstehend wird die Berechnung der einzelnen Fälle vorgeführt. Es sind dabei folgende Bezeichnungen gewählt worden. Nietdurchmesser: d, Nietabstand: e, Dicke des Anschlußquerschnitts: δ, Durchmesser des Nietkopfes oder der Lochscheibe, Breite des Lochstreifens: D, Dicke des Plattennietkopfes, der Lochscheibe oder des Lochstreifens: h, Länge der maßgebenden Schweißnaht: l, Dicke der Schweißnaht: a, Querschnitt des gewöhnlichen Nietkopfes: F, für die Kraftüberleitung maßgebende Nietverlustfläche: f, zulässige Schweißnahtspannung: $\varrho\,\sigma_{zul}$. Beizahl für die Berechnung der maßgebenden Nietverlustfläche: α. Zu dieser Zahl α ist folgendes zu sagen.

Es ist eine bekannte Tatsache, daß die Anschlußniete eines Zugstabes nicht alle den gleichen Anteil der Stabkraft übernehmen, sondern die vorderen Niete etwas mehr und die hinteren Niete etwas weniger erhalten. Diese auch durch Versuche nachgewiesene Tatsache hat man bisher vernachlässigt und hat bekanntlich die Annahme gemacht, daß alle Anschlußniete den gleichen Kraftanteil erhalten. Die Schweißniete bieten nunmehr die Möglichkeit, der größeren Beanspruchung der vordersten Niete Rechnung zu tragen, indem sie auf eine größere Kraftüberleitung berechnet werden. Zu diesem Zweck wird die Nietverlustfläche mit der Zahl $\alpha_1 > 1$ multipliziert. Es empfiehlt sich, diese Zahl α_1 vorläufig mit 1,2 anzunehmen. Bei den

Schweißnieten, die nicht in Zugstabanschlüssen liegen (z. B. in Trägern), ist selbstverständlich $\alpha_1 = 0$.

Bei den Schweißnieten mit angeschweißtem Nietkopf kommt noch folgendes hinzu. Der Nietkopf hat vor allem seine Aufgabe als Kopf des Nietes zu erfüllen, wobei allerdings hervorzuheben ist, daß seine Beanspruchungen als Lasche in Richtung und Wirkung andersgeartet sind. Wohl zu beachten ist aber der Umstand, daß der Nietstahl eine etwas geringere Festigkeit hat als der Baustahl des Tragwerks. Werden alle diese Umstände berücksichtigt, so empfiehlt es sich, die Zahl α_2 entsprechend hoch, und zwar vorläufig mit 1,5 anzusetzen.

Schweißniet mit gewöhnlichem Nietkopf.

Die Nietverlustfläche beträgt $f = d\,\delta$. Der erforderliche Nietkopfquerschnitt muß sein $F' = \alpha_2 f = \alpha_2\, d\,\delta$. Es muß sein $F \geqq F'$ oder $F \geqq \alpha_2\, d\,\delta$. Die Länge der Schweißnaht beträgt $l = \frac{1}{2} \cdot \pi D$. Bezüglich der Schweißnahtdicke gilt die Gleichung $l\, a\, \varrho\, \sigma_{zul} = \alpha_1 f \sigma_{zul}$. Die erforderliche Nahtdicke beträgt $a = \frac{\alpha_1 f}{l\,\varrho} = \frac{2\,\alpha_1\, d\,\delta}{\pi D\,\varrho}$.

Für $\varrho = 0{,}65$ und $\alpha_1 = 1{,}2$ ist $\frac{2 \cdot 1{,}2}{\pi\, 0{,}65} = \text{rd. } 1{,}2$.

In diesem Fall ist $a = \frac{1{,}2\, d\,\delta}{D}$.

Die Ausführung einer Schweißnaht mit der Dicke a um den Nietkopf muß natürlich möglich sein. Andernfalls muß ein Schweißniet mit Plattenkopf zur Anwendung kommen.

Schweißniet mit Plattennietkopf.

Die Querschnittsfläche eines kreisrunden Plattennietkopfes beträgt $D\,h$. Es muß nun sein: $D\,h = \alpha_1\, d\,\delta$. Die übrigen Gleichungen sind sinngemäß die gleichen wie beim Schweißniet mit gewöhnlichem Nietkopf.

Ist der Platz beschränkt, so ist der Durchmesser des Plattennietkopfes gegeben. Es berechnet sich dann die Höhe des Plattennietkopfes $h = \frac{\alpha_1\, d\,\delta}{D}$. Diese Dicke des Plattennietkopfes muß selbstverständlich so groß sein, daß die Anbringung der erforderlichen Schweißnaht möglich ist. Im Falle der Plattennietkopf elliptisch oder rechteckig ist, ergeben sich etwas andere Berechnungen, die hier auszuführen unterbleiben kann.

Schweißniet mit Lochscheiben.

Der Querschnitt der kreisrunden Lochscheibe beträgt $(D - d)\,h$. Es muß sein: $(D - d)\,h \geqq \alpha_1\, d\,\delta$. Ist D durch die Platzfrage vorgeschrieben, so ergibt sich die Höhe der Lochscheibe zu $h = \frac{\alpha_1\, d\,\delta}{D - d}$. Für a gilt die oben bereits angeführte Gleichung. Es muß wiederum h die für a entsprechende Größe aufweisen. Im Falle die Lochscheibe eine andere als Kreisform besitzt, so ergeben sich etwas andere, hier nicht weiter behandelte Berechnungen.

Schweißniet mit Lochstreifen.

Es müssen zwei verschiedene Fälle betrachtet werden, je nachdem die Kraft quer zum Nietriß oder längs zum Nietriß gerichtet ist.

Wirkt die Kraft quer zum Nietriß, so muß $e\,h = \alpha_1\, d\,\delta$ sein. Es gilt weiter folgende Gleichung: $e\, a\, \varrho\, \sigma_{zul} = \alpha_1\, d\,\delta\, \sigma_{zul}$.

Die erforderliche Nahtdicke muß sein: $a = \frac{\alpha_1\, d\,\delta}{e\,\varrho}$. Wird die Schweißnahtdicke a zu groß, so muß der Nietabstand berechnet werden. Es gelten dann die Gleichungen

$$e = \frac{\alpha_1\, d\,\delta}{a\,\varrho} \quad \text{und} \quad h = \frac{\alpha_1\, d\,\delta}{e} = a\,\varrho.$$

Die zuletzt angeführte Gleichung gibt einen viel zu kleinen Wert für h. Die Höhe des Laschenstreifens muß selbstverständlich so groß sein, als es die Schweißnahtdicke erforderlich macht. Ergibt sich bei der zuerst angeführten Gleichung ein Wert für e, der den zulässigen Nietabstand überschreitet, so müssen die Ränder des Lochstreifens gewellt sein. In einem solchen Fall ist e und a gegeben. Die Dicke des Lochstreifens muß dann sein: $h \geqq \frac{\alpha_1\, d\,\delta}{e}$. Die jedem Niet zukommende Nahtlänge (Wellenlänge) beträgt $l = \frac{\alpha_1\, d\,\delta}{a\,\varrho}$.

Für den Sonderfall, daß ein untergelegter Futterstreifen als Lochstreifen verwendet wird, ist die Dicke h dieses Futters und damit auch a gegeben. Für den Nietabstand e ergeben sich dann zwei Gleichungen:

$$e_1 = \frac{\alpha_1\, d\,\delta}{h} \quad \text{und} \quad e_2 = \frac{\alpha_1\, d\,\delta}{a\,\varrho}.$$

Der größere Wert von beiden ist maßgebend.

Überschreitet hier e den zulässigen Nietabstand, so müssen die Futterränder wellenlinig ausgebildet werden. Die Gleichung für die maßgebende Schweißnahtlänge ist dieselbe wie die vorhin angeführte.

Für den Fall, daß die Kraft längs zum Nietriß wirkt, gelten folgende Berechnungen.

Die Breite des Laschenstreifens D muß so groß sein, daß $(D - d)\,h \geqq \alpha_1\, d\,\delta$. Die auf jeden Niet entfallende Schweißnahtlänge beträgt $l = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e = e$. Der Nietabstand beträgt daher $e = \frac{\alpha_1\, d\,\delta}{a\,\varrho}$.

Beispiel der Berechnung und Ausführung eines Stabanschlusses.

Ein Breitflanschträger-Zugstab I P 28 (Flanschdicke 20 mm) ist an ein 15 mm dickes Knotenblech mit 26-mm-Nieten angeschlossen. Der Werkstoff ist St 37, und es ist $\varrho = 0{,}65\, \sigma_{zul}$.

a) Ausführung mit Plattennietkopf.

Die Nietverlustfläche beträgt $f = d\,\delta = 2{,}6 \cdot 2 = 5{,}2$ cm².
Erforderlicher Querschnitt des Nietkopfes $\alpha_2 f = 1{,}5 \cdot 5{,}2 = 7{,}8$ cm².
Ausgeführt: $D = 70$ mm und $h = 15$ mm.
Vorhandener Querschnitt des Plattennietkopfes $7 \cdot 1{,}5 = 10{,}5$ cm².
Die Länge der Schweißnaht beträgt $l = \frac{1}{2} \cdot \pi D = \frac{1}{2} \cdot \pi\, 7 = 11{,}0$ cm.
Erforderliche Schweißnahtdicke $a = \frac{\alpha_1 f}{l\,\varrho} = \frac{1{,}2 \cdot 5{,}2}{11 \cdot 0{,}65} = 0{,}87$ cm.
Ausgeführt wurde $a = 9$ mm.
Dieser berechnete Anschluß ist in Bild 6a dargestellt.

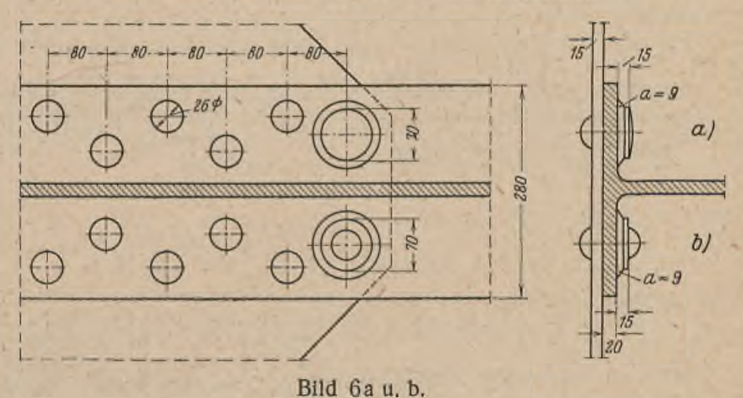


Bild 6a u. b.

b) Ausführung mit Lochscheiben.

Der erforderliche Querschnitt der Lochscheibe ist
$\alpha_1 f = 1{,}2 \cdot 5{,}2 = 6{,}24$ cm².
Ausgeführt: $D = 70$ mm und $h = 15$ mm.
Vorhandener Querschnitt $(D - d)\,h = (7 - 2{,}6)\, 1{,}5 = 6{,}6$ cm².
Die Länge und Dicke der Schweißnaht ist dieselbe wie beim Beispiel unter a. Diese Ausführung zeigt Bild 6b.

Die Grenzlängen.

Einen Begriff von der Wirtschaftlichkeit der Anordnung der Schweißniete gibt die Grenzlänge. Die Grenzlänge λ ist jene Länge zwischen zwei Schweißnieten, bei welcher a) der Aufwand an Stahl für die beiden Schweißniete gleich ist demjenigen des Nietverlustes in der Grenzlänge und bei welcher b) die Kosten der beiden Schweißniete gleich sind derjenigen der Nietverluste in der Grenzlänge.

a) Die Grenzlänge betreffend Stahlersparnis.

Um zu brauchbaren Ergebnissen zu kommen, werden folgende Annahmen gemacht.

Die Untersuchung wird nur auf den Fall des Schweißnietes mit Lochscheibe erstreckt, und es wird angenommen, daß die Dicke der Lochscheibe gleich ist der Dicke des verschwächten Flansches, es wird also gesetzt: $h = \delta$. Der Rauminhalt der Schweißnaht steht zum Rauminhalt der vollen Lochscheibe (Lochscheibe einschließlich Nietschaft) in einem engbegrenzten Verhältnis. Auf Grund berechneter Beispiele kann dieses Verhältnis zu folgenden Hundertsätzen angenommen werden: für 20-mm-Niete 0,30%, für 23-mm-Niete 0,35% und für 26-mm-Niete 0,40%.

An früherer Stelle wurde gefunden $(D - d)\,h = \alpha_1\, d\,\delta$.

Daraus ergibt sich $\quad D = \frac{d\,(\alpha_1\,\delta + h)}{h}$.

Wird gesetzt $h = \delta$, so wird $D = d\,(\alpha_1 + 1)$.

Der Rauminhalt der vollen Lochscheibe beträgt

$$V = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \delta = \frac{1}{4} \cdot \pi\,(\alpha_1 + 1)^2\, d^2\,\delta.$$

Für $\alpha_1 = 1{,}2$ wird $V = 3{,}80\, d^2\,\delta$.

Dazu der Rauminhalt der Schweißnaht gibt folgende Werte:

$$V' = 1{,}30 \cdot 3{,}80\, d^2\,\delta = 4{,}94\, d^2\,\delta$$
$$V' = 1{,}35 \cdot 3{,}80\, d^2\,\delta = 5{,}13\, d^2\,\delta$$
$$V' = 1{,}40 \cdot 3{,}80\, d^2\,\delta = 5{,}32\, d^2\,\delta.$$

Der Rauminhalt des Nietverlustes auf die Grenzlänge beträgt $V'' = d\,\delta\,\lambda'$. Dieser Rauminhalt muß gleich sein dem Rauminhalt der beiden Lochscheiben einschließlich Schweißnähte der beiden Schweißniete: $V'' = 2\,V'$ und daher: $d\,\delta\,\lambda' = 2 \cdot 4{,}94\, d^2\,\delta$.

Daraus ergibt sich $\lambda' = 9{,}88\, d$ und in gleicher Weise $\lambda' = 10{,}26\, d$ und $\lambda' = 10{,}64\, d$.

Werden für d die Durchmesser eingesetzt, so werden folgende drei Grenzlängen erhalten:

$$d = 20 \text{ mm}, \quad \lambda' = 19{,}8 \text{ cm} = 0{,}20 \text{ m}$$
$$d = 23 \text{ mm}, \quad \lambda' = 23{,}6 \text{ cm} = 0{,}24 \text{ m}$$
$$d = 26 \text{ mm}, \quad \lambda' = 27{,}7 \text{ cm} = 0{,}28 \text{ m}.$$

b) Die Grenzlänge betreffend Kostenersparnis.

Um zu greifbaren Ergebnissen zu kommen, werden folgende Annahmen gemacht.

Die Kosten des Stahlbautragwerks werden mit 400 RM/t angenommen. Die Kosten der Schweißnähte werden für die Dicken $\delta = 10$ mm, 15 mm, 20 mm und 25 mm veranschlagt mit 3 RM/m, 3,5 RM/m, 4,0 RM/m und 4,5 RM/m.

Die Untersuchung wird auch hier auf den Fall des Schweißnietes mit Lochscheibe beschränkt. Werden die Kosten des Stahlaufwandes für die Schweißniete gleich gesetzt den Kosten des Stahlaufwandes für das ganze Tragwerk, so kommt zu der Grenzlänge infolge Stahlaufwand noch die Grenzlänge dazu, wie sie den besonderen Kosten der Schweißnaht entspricht.

Die Länge der Schweißnaht beträgt $\pi D = \pi d (\alpha_1 + 1)$.

Für beide Schweißniete und für $\alpha_1 = 1{,}2$ ergibt sich die gesamte Schweißnahtlänge zu $2 \pi 2{,}2\, d = 13{,}8\, d$.

Die Kosten der Schweißnaht betragen $13{,}8 \cdot 3\, d = 41{,}4\, d$, ferner $48{,}3\, d$, $55{,}2\, d$ und $62{,}1\, d$.

Das Stahlgewicht des Nietverlustes für die Grenzlänge λ'' beträgt $\lambda''\, d\, \delta \cdot 7850$ kg, wobei die Längen in Meter anzunehmen sind. Die Kosten dieser Stahlmenge betragen bei 0,4 RM/kg $0{,}4 \cdot 7850\, \lambda''\, d\, \delta = 3140\, \lambda''\, d\, \delta$. Die Gleichsetzung der Kosten führt zu der Gleichung

$$3140\, \lambda''\, d\, \delta = 41{,}4\, d \text{ usw.}$$

Die Grenzlänge ergibt sich daraus mit

$$\lambda'' = \frac{41{,}4}{3140\, \delta} \text{ usw.}$$

Die gesamte Grenzlänge beträgt

$$\lambda = \lambda' + \lambda'' = \lambda' + \frac{41{,}4}{3140\, \delta} \text{ usw.}$$

Nach diesen Formeln sind folgende Grenzlängen berechnet worden:

	$\delta = 10$ mm	$\delta = 15$ mm	$\delta = 20$ mm	$\delta = 25$ mm
$d = 20$ mm	$\lambda = 1{,}52$ m	$\lambda = 1{,}23$ m	—	—
$d = 23$ mm	$\lambda = 1{,}56$ m	$\lambda = 1{,}27$ m	$\lambda = 1{,}12$ m	—
$d = 26$ mm	—	$\lambda = 1{,}31$ m	$\lambda = 1{,}16$ m	$\lambda = 1{,}07$ m

Diese unter a) und b) berechneten Grenzlängen sind bei den Schweißnieten mit Plattenköpfen um ein geringes kleiner, weil der Rauminhalt des Nietkopfes und ein Stück des Nietschaftes von der Länge h in Wegfall kommt. Bei den Schweißnieten mit angeschweißtem Nietkopf sind die Grenzlängen noch weiter um ein geringes kleiner. Dagegen sind die Grenzlängen bei den Schweißnieten mit Lochstreifen um ein ganz geringes größer als bei den Schweißnieten mit Lochscheiben.

Zusammenfassend lassen sich aus der Betrachtung der Grenzlängen folgende Schlußfolgerungen ziehen.

Wird die Ersparnis von Stahl als oberster Grundsatz aufgestellt, so genügen bereits Grenzlängen von 0,2 m bis 0,3 m, um einen Erfolg zu erzielen. Derart kleine Längen kommen im Stahlbau (einschließlich Kessel- und Behälterbau) gar nicht vor, so daß folgender wichtiger Grundsatz ausgesprochen werden kann:

1. Vom Standpunkt der Stahlersparnis ist die Anordnung von Schweißnieten in allen Fällen erforderlich.

Wird die Ersparnis der Kosten obenangestellt, so genügen Grenzlängen von 1,0 m bis 1,6 m, um die Anordnung von Schweißnieten zu rechtfertigen. Bei größeren Fachwerken kommen Stäbe mit derart geringen Längen überhaupt nicht vor. Bei kleineren Fachwerken und anderen Tragwerken sind die Abstände der Schweißniete in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle größer als ein bis anderthalb Meter. Bei den Kesseln und Behältern entsprechen den Grenzlängen von 1,0 bis 1,6 m die Durchmesser von 0,3 bis 0,5 m. Da es so kleine Kessel oder Behälter gar nicht gibt, so sind daher im Kessel- und Behälterbau Schweißniete stets anzuordnen. Auf Grund dieser Überlegungen kann daher weiterhin folgender wichtiger Grundsatz aufgestellt werden.

2. Vom Standpunkt der Kostenersparnis gilt folgendes:
   a) Bei größeren Fachwerken, insbesondere bei Fachwerkbrücken, ist die Anordnung von Schweißnieten in allen Fällen erforderlich.
   b) Bei mittleren und kleinen Fachwerken ist die Anordnung von Schweißnieten bei Stablängen von 2 m und mehr erforderlich.
   c) Bei allen anderen Tragwerken sind Schweißniete anzuordnen, wenn deren Abstände mehr als ungefähr 2 m betragen.
   d) Im Kessel- und Behälterbau ist die Anordnung von Schweißnieten in allen Fällen erforderlich.

Schlußbemerkungen.

Über den Wert oder Unwert der Schweißniete wird naturgemäß erst die Praxis entscheiden. Es kann aber dazu schon heute folgendes gesagt werden:

Über die Anwendungsmöglichkeit der verschiedenen Arten der Schweißniete ist zunächst der Umstand maßgebend, ob auf der Baustelle geschweißt wird oder nicht. Wird auf der Baustelle geschweißt, dann können alle Arten der Schweißniete zur Anwendung kommen. Ist das aber nicht der Fall, dann scheiden die Niete mit angeschweißten Nietköpfen aus, und es kommen nur die Niete mit Lochscheiben oder Lochstreifen in Frage.

Bezüglich der Schweißniete mit angeschweißten Nietköpfen ist im besonderen folgendes zu bemerken: Es ist bekannt, daß die Niete bei schwellender oder wechselnder Beanspruchung „arbeiten". Es ist ohne weiteres denkbar, daß durch dieses „Arbeiten" die Schweißnähte gefährdet werden können. Ob dies wirklich der Fall sein wird und unter welchen Umständen eine Gefährdung der Schweißnähte vermieden werden kann, darüber können nur Dauerversuche Klarheit schaffen. Bei Tragwerken mit gleichbleibender Belastung, wie sie z. B. im Hochbau vorkommen, dürfte dagegen schon heute der Anwendung der Schweißniete mit angeschweißten Köpfen nichts im Wege stehen.

Die Schweißniete mit angeschweißtem gewöhnlichen Nietkopf werden, vorausgesetzt, daß auf der Baustelle geschweißt wird, nur für Bauteile geringer und nebensächlicher Bedeutung, z. B. Geländer, in Frage kommen. Es ist durchaus möglich, daß die Praxis ihre Anwendung überhaupt ablehnt.

Die Schweißniete mit Plattennietkopf werden zunächst nur für Tragwerke mit gleichbleibender Belastung zur Anwendung kommen. Wenn die obenerwähnten Dauerversuche günstig ausfallen, dann können sie auch für alle anderen Tragwerke verwendet werden. Sobald auf der Baustelle nicht geschweißt wird, was bei einem Nietstahlbauwerk meistens der Fall sein wird, kommen diese Art Schweißniete nicht in Frage. Selbst aber für den Fall, daß auf der Baustelle geschweißt wird, kann es vorkommen, daß einzelne Schweißniete mit Plattennietkopf nicht ausgeführt werden können, weil es zufolge ihrer Lage nicht möglich ist, die Schweißnähte einwandfrei auszuführen.

Alle diese bei den Nieten mit angeschweißten Köpfen angeführten Nachteile sind bei den Schweißnieten mit Lochscheiben oder mit Lochstreifen nicht vorhanden. Da die Lochscheiben oder die Lochstreifen bereits in der Werkstatt angeschweißt werden, so entfällt das Schweißen auf der Baustelle. Der Niet selbst unterscheidet sich von allen anderen Nieten weder durch seine Herstellung, noch durch sein Verhalten. Er kann bei schwellender oder wechselnder Beanspruchung anstandslos „arbeiten". Aber auch die an den Lochscheiben oder den Lochstreifen angebrachten Schweißnähte unterscheiden sich von allen anderen Schweißnähten in keiner Weise. Der Umstand, daß die Schweißnähte in der Werkstatt ausgeführt werden, bringt außerdem den großen Vorteil, daß sie in jeder Hinsicht einwandfrei herstellbar sind. Es ist weiterhin klar, daß es nicht notwendig sein wird, durch Dauerversuche nachzuweisen, daß diese Art von Schweißnieten einwandfrei ist.

Auf Grund dieser Betrachtungen kann gesagt werden, daß die Schweißniete mit Lochscheiben oder mit Lochstreifen bedenkenlos schon heute für alle Stahlbauwerke ohne Ausnahme zur Anwendung kommen können. Weiter kann mit großer Sicherheit vorausgesagt werden, daß die Schweißniete mit Lochscheiben oder Lochstreifen das Feld beherrschen werden, und daß daneben die Niete mit angeschweißten Nietköpfen nur in besonderen Fällen zur Anwendung kommen werden bzw. von ihrem Gebrauch vielleicht überhaupt Abstand genommen werden wird.

Bemerkung zur Frage der Kipplast eines Trägerrostes.

Von **Josef Weinhold** in Brünn.

Für einen praktisch vorliegenden Vierträgerrost wird gezeigt, daß zur Bestimmung der Kipplast der Einfluß der Flanschwirkung und der Torsionssteifigkeit vernachlässigbar klein ist. Für konstante Steifigkeit der Querbiegung und konstantes Biegemoment wird eine Kippbedingung hergeleitet. Für die betrachteten praktischen Verhältnisse ist ein Kippen des Rostes mit großer Sicherheit ausgeschlossen.

1. Einleitung und Aufgabenstellung.

Beim freien Vorbau von vollwandigen Deckbrücken können Verhältnisse vorliegen, die eine Bestimmung der Sicherheit gegen seitliches Auskippen als notwendig erscheinen lassen. Im folgenden wird unter den allgemeinen Voraussetzungen der Kipptheorie gerader Stäbe [1] und besonderer vereinfachender Annahmen mit Hilfe der Energiegleichung eine einfache Beziehung zwischen den maßgebenden Größen an der Kippgrenze des Trägerrostes hergeleitet.

Der betrachtete Rost besteht aus vier gleichen, gleichlaufenden und gleichbelasteten waagerecht liegenden doppelt-symmetrischen I-Trägern 1 bis 4. Diese sind in gleichen Abständen durch untereinander gleiche Querträger mit konstantem Querschnitt verbunden. Die Mittellinien von Haupt- und Querträgern bilden vor dem Auskippen ein waagerecht liegendes Rechtecknetz (Rostebene). Die Lasten greifen in der Mittellinie der Längsträger senkrecht zur Rostebene an. Der vorgebaute Rost

soll als einseitig starr eingespannter Rost aufgefaßt werden können. Die Rostlänge sei l, die Entfernung der Mittelträger b, die eines äußeren und eines inneren a, die Trägerhöhe h (siehe Bild 1).

Neben den allgemeinen Voraussetzungen:

a) Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes,

b) die Biegesteifigkeit B der Querbiegung ist sehr klein gegenüber der Biegesteifigkeit B_1 der Hauptbiegung,

wird weiter angenommen, daß

c) die Biegesteifigkeit (für eine Verbiegung senkrecht zur Rostebene) B_Q der Querträger gleichmäßig auf die Trägerlänge l verteilt werden kann [1]).

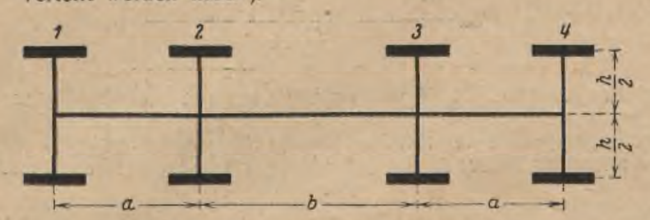


Bild 1. Rostquerschnitt, schematisch.

Die Zulässigkeit dieser letzteren Annahme ist durch Versuche mit einem aus zwei Trägern von 3 m Länge und acht Rippen bestehenden Modellrost nachgewiesen worden [2]. Aus der Symmetrie des Rostes folgt, daß bei gleicher Belastung der inneren Träger (2, 3) und der äußeren Träger (1, 4) die Kippwinkel ϑ_2, ϑ_3 der inneren Träger die gleichen sind, ebenso die der äußeren Träger ϑ_1, ϑ_4. Wegen der hier anzunehmenden Undehnbarkeit der Querträgerachse sind weiter die seitlichen Auslenkungen y der Trägermittellinien einander gleich. Es gilt also

$$\vartheta_1 = \vartheta_4 \qquad \vartheta_2 = \vartheta_3 \quad \text{und} \tag{1}$$

$$y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y. \tag{2}$$

2. Energiegleichung.

Diese sagt aus, daß an der Kippgrenze, beim Übergang vor der nur ebenen Verbiegung zur unendlich nahe benachbarten räumlich verbogenen und verdrillten Lage, die infolge der zusätzlichen Verformungen geleistete Arbeit der inneren Kräfte L_i gleich ist der während des Kippvorgangs geleisteten Arbeit L_a der äußeren Kräfte. $L_i - L_a = 0$ ist zugleich auch ein Extremwert. — Mit x als gemeinsamer Längskoordinate und M als dem bei allen vier Trägern gleichen, zunächst mit x veränderlichen Moment der Hauptbiegung ist die Arbeit der äußeren Kräfte bei einem Träger für die Längeneinheit der Stabachse $-M\vartheta y''$ [3], die gesamte Arbeit unter Berücksichtigung der Beziehungen (1) und (2) also

$$L_a = -2\int_0^l M y''(\vartheta_1 + \vartheta_2)\,dx. \tag{3}$$

Die Verformungsarbeit setzt sich zusammen aus der Arbeit der Querbiegung L_B, der der St. Venantschen Torsion L_C und der Verformungsarbeit der Querträger L_Q bei deren Verbiegung senkrecht zur Rostebene, wenn man berücksichtigt, daß die Steifigkeit der Querträger für eine Verbiegung in der Rostebene sehr klein ist im Verhältnis zu jener für die Verbiegung senkrecht zur Rostebene. Es sind dann alle weiteren Anteile als die bisherigen von höherer als der 2. Ordnung klein, können also hier unberücksichtigt bleiben.

Die Arbeit der Querbiegung ist im wesentlichen durch die Verbiegung der Flanschen bedingt. Diese setzt sich zusammen aus der Auslenkung y der Stabachse und einem aus der Drehung des Querschnitts um den Kippwinkel ϑ folgenden Anteil $\pm \frac{h}{2}\cdot\vartheta$. Mit B als Steifigkeit der Querbiegung ist so die gesamte Arbeit der Querbiegung [4] wegen $\frac{1}{2}\left\{\left(y'' + \frac{h}{2}\cdot\vartheta''\right)^2 + \left(y'' - \frac{h}{2}\cdot\vartheta''\right)^2\right\} = y''^2 + \frac{h^2}{4}\cdot\vartheta''^2$

$$L_B = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^l B\left[y''^2 + \frac{h^2}{8}(\vartheta_1''^2 + \vartheta_2''^2)\right]dx. \tag{4}$$

Die Arbeit der Torsion ist mit C als Torsionssteifigkeit

$$L_C = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^l C(\vartheta_1'^2 + \vartheta_2'^2)\,dx. \tag{5}$$

Zur Herleitung der Arbeit der Querträger denken wir uns an den Stoßstellen der Querrippen die in Bild 2 eingetragenen Momente von den Querträgern auf die Hauptträger entgegen dem zunehmenden Kippwinkel wirkend übertragen. Für den angenommenen konstanten Querschnitt der Querträger ergeben sich unter Beachtung von Gl. (1) die Momente

$$\left\{\begin{aligned} m_1 &= \frac{B_Q}{a/2}(2\vartheta_1 + \vartheta_2)\\ m_{2a} &= \frac{B_Q}{a/2}(\vartheta_1 + 2\vartheta_2)\\ m_{2b} &= \frac{B_Q}{b/2}\cdot 3\vartheta_2. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Bild 2. Rückdrehende Querträgermomente.

Die von einer Rippe aufgenommene Formänderungsarbeit ist dann

$$a_R = 2\cdot\frac{1}{2}\left[m_1\vartheta_1 + (m_{2a} + m_{2b})\vartheta_2\right]. \tag{7}$$

Bei gleichmäßiger Aufteilung der Steifigkeit von n gleichen Querträgern über die Trägerlänge l wird die gesamte Formänderungsarbeit der Querträger mit

$$K = \frac{n}{l}\cdot\frac{B_Q}{a/2} \tag{8}$$

$$L_Q = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot K\int_0^l\left[\vartheta_1^2 + \vartheta_1\vartheta_2 + \left(1 + \frac{3a}{2b}\right)\vartheta_2^2\right]dx. \tag{9}$$

K ist die maßgebende Kennziffer für die Hinderung der Querschnittsdrehung; sie sei als „Drillbettungsziffer" bezeichnet. — Bildet man die Summe

$$J = L_i - L_a = L_B + L_C + L_Q - L_a = 0, \tag{10}$$

so ergibt sich unter Beachtung der Ausdrücke (4), (5), (9) und (3) als Energiegleichung des Problems

$$J = 2\int_0^l\left\{B\left[y''^2 + \frac{h^2}{8}(\vartheta_1''^2 + \vartheta_2''^2)\right] + \frac{1}{2}\cdot C(\vartheta_1'^2 + \vartheta_2'^2) + K\left[\vartheta_1^2 + \vartheta_1\vartheta_2 + \left(1 + \frac{3a}{2b}\right)\vartheta_2^2\right] + My''(\vartheta_1 + \vartheta_2)\right\}dx = 0. \tag{11}$$

Wir benutzen jetzt die Energiegleichung (11), um abzuschätzen, in welchem gegenseitigen Verhältnis die Flanschwirkung, die Torsionssteifigkeit und die „Drillbettung" auf die Größe des Kippmoments Einfluß nehmen. Zu diesem Zwecke berechnen wir mit Näherungsansätzen für ϑ_1, ϑ_2 und y einen Näherungsausdruck für das Kippmoment unter der weiteren Annahme, daß M, B, C und K nicht mit x veränderlich sein sollen. Es sei

$$\vartheta_1 = C_3\left(1 + 3\cdot\frac{a}{b}\right)\vartheta_2 \tag{12}$$

$$\vartheta_2 = C_3\left[-\frac{1}{4} - \frac{9}{2}\cdot\zeta + 6\zeta\cdot\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{3}{4}(2\zeta + 1)\left(\frac{x}{l}\right)^4\right] \tag{13}$$

$$y = C_3\cdot\frac{Ml^2}{2B}\left(2 + 3\cdot\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{9}{2}\cdot\zeta\right)\left[-\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{l} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{1}{12}\left(\frac{x}{l}\right)^4\right] \tag{14}$$

mit

$$\zeta = \frac{h^2}{4l^2}\cdot\frac{B}{C}. \tag{15}$$

C_3 ist ein unbestimmter Freiwert. Der Ansatz (12) ist hier mit sehr guter Näherung zulässig, wie sich im nächsten Abschnitt erweist. Die Ansätze (12), 13) und (14) erfüllen alle Randbedingungen der einseitig starr eingespannten I-Träger des Rostes mit ungehindert verwölbbarem freien Ende, in welchem auch das Drehmoment verschwindet [1]. Die Randbedingungen lauten, wenn $x = 0$ das freie und $x = l$ das starr eingespannte Ende ist,

$$\left\{\begin{aligned} &\vartheta_1(l) = \vartheta_2(l) = \vartheta_1'(l) = \vartheta_2'(l) = \vartheta_1''(0) = \vartheta_2''(0) = 0\\ &\vartheta_1'(0) - \zeta l^2\vartheta_1'''(0) = 0\\ &\vartheta_2'(0) - \zeta l^2\vartheta_2'''(0) = 0\\ &y(0) = y'(l) = y'''(l) = 0\\ &2By''(0) + M[\vartheta_1(0) + \vartheta_2(0)] = 0. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Sie sind, wie man sich überzeugt, miteinander verträglich. Nach dem angenommenen Verlauf von ϑ_1, ϑ_2 und y tritt im Intervall $0 < x < l$ kein Vorzeichenwechsel ein. Auf die Zulässigkeit dieser Annahme kann aus dem Verlauf von ϑ und y für die folgenden Fälle eines aus nur zwei Trägern bestehenden Tragrostes geschlossen werden: a) Berücksichtigung der Flanschwirkung und der „Drillbettung", Vernachlässigung der Torsionssteifigkeit; b) Berücksichtigung der Torsionssteifigkeit und

[1]) Die gleichmäßige Aufteilung der Querträgersteifigkeit auf die Trägerlänge ermöglicht eine einfache rechnerische Behandlung des Problems. Ansonsten müßten die durch die Querträger entstehenden Abschnitte durch Übergangsbedingungen aneinandergefügt werden, was schon bei nur wenigen Querträgern zu sehr umfangreichen Rechnungen führen würde. Der Wirklichkeit mehr angepaßt wäre die Darstellung der Querträgersteifigkeit durch eine periodische Funktion mit einer Periode gleich der Querträgerentfernung, mit dem Spitzenwert am Querträgerangriff und kleinen Funktionswerten im Zwischenfeld.

der „Drillbettung", Vernachlässigung der Flanschwirkung. Belastung in beiden Fällen durch M = konst. Nach dem Ansatz (13) verläuft z. B. ϑ_2 zwischen den analogen Werten für die niedrigste Kipplast der Fälle a und b, wegen der verhältnismäßigen Kleinheit von C im vorliegenden Fall nahe der Lösung für den Fall a. Die hier notwendigen Daten des Rostes sind[2]):

$a = 5{,}3$ m, $b = 8$ m, $h = 6$ m, Kraglänge $l = 56$ m, Querträgerabstand 7 m, $B_{min} = 32{,}7 \cdot 10^4$ tm², $C_{min} = 0{,}115 \cdot 10^4$ tm², $B_Q = 30{,}6 \cdot 10^4$ tm².

Die Ausrechnung der Energiegleichung ergibt zunächst

$$M = \sqrt{5{,}8\, K B \left[1{,}14 \cdot \frac{B h^2}{K l^4} + 1{,}74 \cdot \frac{C}{K l^2} + 1\right]}, \tag{17}$$

Berücksichtigt man für die in der eckigen Klammer stehenden Anteile die Ziffernwerte von h, l, B_{min}, C_{min} und den nach Gl. (8) gebildeten Wert der „Drillbettungsziffer" $K = 16\,450$ tm/m, dann verhalten sich diese Anteile der Reihe nach wie

$$0{,}000\,080 : 0{,}000\,039 : 1.$$

Damit erscheint dargelegt, daß bei der Berechnung der Kipplast von Trägerrosten ähnlich dem hier betrachteten der **Einfluß der Flanschwirkung und der Torsionssteifigkeit mit sehr guter Näherung praktisch vernachlässigt werden kann.**

3. Herleitung einer Kippbedingung für M = konstant bei unberücksichtigter Flanschwirkung und Torsionssteifigkeit.

Ohne die Anteile der Flanschwirkung und Torsionssteifigkeit lautet die Energiegleichung

$$J = 2\int_0^l \left\{B y''^2 + K\left[\vartheta_1^2 + \vartheta_1\vartheta_2 + \left(1 + \frac{3a}{2b}\right)\vartheta_2^2\right] + M y''(\vartheta_1 + \vartheta_2)\right\} dx. \tag{18}$$

Die Variationsforderung $\delta J = 0$ führt auf die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2}{dx^2}[2 B y'' + M(\vartheta_1 + \vartheta_2)] = 0 \tag{19}$$

$$K(2\vartheta_1 + \vartheta_2) + y'' M = 0 \tag{20}$$

$$K\left[\vartheta_1 + 2\left(1 + \frac{3a}{2b}\right)\vartheta_2\right] + y'' M = 0. \tag{21}$$

Aus Gl. (20) u. (21) folgt die bereits im vorhergehenden Abschnitt — wie man erkennt — mit sehr guter Näherung benutzte Beziehung

$$\vartheta_1 = \left(1 + 3 \cdot \frac{a}{b}\right)\vartheta_2 \quad \text{und} \tag{22}$$

$$y'' = -\frac{K}{M} \cdot 3\left(1 + 2 \cdot \frac{a}{b}\right)\vartheta_2. \tag{23}$$

In Gl. (19) bis (23) kann M noch mit x veränderlich sein. — Die Beziehungen (22) und (23) in die Energiegleichung (18) eingesetzt, ergeben nach Streichen eines von Null verschiedenen konstanten Faktors und mit M = konst

$$J = \left\{3 \cdot \frac{1 + 2 \cdot \frac{a}{b}}{1 + \frac{3a}{2b}} \cdot \frac{KB}{M^2} - 1\right\} \int_0^l \vartheta_2^2\, dx = 0. \tag{24}$$

Da für den Fall der Kippung $\vartheta_2 \neq 0$ ist, muß der in der Klammer stehende Ausdruck verschwinden, das konstante Biegemoment also den Wert

$$M = \sqrt{3 \cdot \frac{1 + 2 \cdot \frac{a}{b}}{1 + \frac{3a}{2b}} \cdot KB} \tag{25}$$

haben. Gl. (25) ist die gesuchte Kippbedingung. Sie ist nach Gl. (24) unabhängig von einem besonderen Verlauf von ϑ_2, also auch unabhängig von besonderen Grenzbedingungen.

Ein sicherer unterster Wert für die Kippsicherheit eines Rostes mit der kleinsten Steifigkeit der Querbiegung B_{min} und dem größten Biegemoment M_{max} ist dann

$$\nu \geqq \frac{\sqrt{3 \cdot \frac{1 + 2 \cdot \frac{a}{b}}{1 + \frac{3a}{2b}} \cdot K B_{min}}}{M_{max}}. \tag{26}$$

In früheren Arbeiten [3], [5] wurden für einen aus zwei durch konstante Biegemomente belasteten flanschlosen Trägern bestehenden Rost die Kippbedingungen für verschiedene Grenzbedingungen ermittelt. Statt K wurde mit h als halber Abstand der Hauptträger ein maßfreier Parameter

$$\mathfrak{b} = \frac{n B_Q l}{C h} \tag{27}$$

verwendet. Es ergab sich, daß für $\mathfrak{b} \to \infty$ — also bei sonst endlichen Werten mit $C \to 0$ — das Kippmoment einer für drei behandelte Gruppen von Grenzbedingungen gemeinsamen asymptotischen Lösung von oben her zustrebt, während für in Kugeln gehaltene Trägerenden die asymptotische Lösung selbst folgt. Der asymptotische Wert des Kippmoments lautet mit den hier benutzten Zeichen für in gleichem Sinne drehende Biegemomente

$$M = \sqrt{3 K B} \tag{28}$$

und für in den beiden Hauptträgern entgegengesetzt drehende Biegemomente

$$M = \sqrt{K B}. \tag{29}$$

Denkt man sich die Entfernung b der beiden mittleren Träger unendlich groß werdend, dann verschwinden die vom Mittelteil des Querträgers an den Stoßstellen übertragenen rückdrehenden Momente. Es verbleiben zwei Zweiträgerroste, deren Kippbedingung durch Gl. (28) gegeben sein muß, wie sie auch tatsächlich aus der Kippbedingung des Vierträgerrostes, Gl. (25), für $b \to \infty$ folgt.

Setzt man in Gl. (26) die Daten des vorliegenden Rostes ein, so wird mit dem vorhandenen $M_{max} = 12\,260$ tm

$$\nu \geqq 11{,}2.$$

Dieser sehr hohe, auf der sicheren Seite liegende Wert **schließt die in Frage stehende Kippgefahr für den betrachteten Fall aus.** Eine Verfeinerung der Rechnung durch Einführung der Veränderlichkeit von M und B zur Bestimmung eines genaueren (höheren) Wertes ν ist deswegen vorläufig wohl kaum von praktischem Interesse.

Erwähnt möge noch werden, daß auch der Einfluß eines über oder unter der Trägerachse liegenden Kraftangriffs, wie etwa der Angriff einer Stützenreaktion auf der Trägerunterkante, von ähnlicher Größenordnung wie der der Flanschwirkung und der Torsionssteifigkeit ist, also ebenfalls vernachlässigt werden kann.

Schrifttum.

[1] E. Chwalla, Die Kipp-Stabilität gerader Träger mit doppeltsymmetrischem I-Querschnitt. Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaues, Heft 2. Berlin.

[2] J. Weinhold, Über Kippversuche mit einem Holm-Rippenrost. Luftfahrtforschung, Bd. 17, Lfg. 3, 1940.

[3] J. Weinhold, Über die Kipp-Stabilität der Holme im Rippenverband. Z. ang. Math., Bd. 18, 1938.

[4] F. Hartmann, Knickung, Kippung, Beulung.

[5] J. Weinhold, Über Kipplasten eines Holm-Rippenrostes. Ing.-Archiv, IX. Bd., 1938.

[2]) Für die Anregung zu der vorliegenden Untersuchung sowie für die Angabe der Daten eines praktisch vorliegenden Rostes danke ich Herrn Prof. Dr. E. Chwalla.

Die Akustik im Bauwesen.[1])

Von Dozent Dr. Kurt Schuster, Breslau.

Auf dem Gebiet des Bauwesens hat die Akustik zwei praktisch wichtige Aufgaben zu lösen: sie soll einmal für Schalldarbietungen in einem Raum die günstigsten Bedingungen schaffen und sie soll zweitens die Maßnahmen angeben, durch die das Eindringen von störendem Schall in einen Raum verhindert werden kann. Die Lösung der ersten Aufgabe ist das Ziel der Raumakustik, die Lösung der zweiten das Ziel der Bauakustik. Wenn auch die Entwicklung auf beiden Gebieten noch nicht zum Abschluß gekommen ist, so herrscht doch heute vollkommene Klarheit über die Grunderscheinungen. Darüber hinaus sind die Ergebnisse der akustischen Forschung durch zahllose Erfolge in der Praxis bestätigt worden.

Gegenstand der raumakustischen Untersuchungen ist die „Akustik" oder „Hörsamkeit" der Räume; wir verstehen darunter die besondere Art und Weise, wie sich ein Raum bei Schallvorgängen verhält. Daß die Hörsamkeit eines Raumes geändert werden kann, ist leicht zu beobachten: wenn aus einem Zimmer alle Möbel und Einrichtungsgegenstände entfernt sind, klingt die Sprache ganz anders als sonst. Ernste Schwierigkeiten und grobe Störungen der Hörsamkeit treten allerdings in der Regel nur bei großen Räumen auf. Die Raumakustik spielt daher im Gegensatz zur Bauakustik im Wohnungsbau praktisch keine Rolle. Um so wichtiger ist sie aber, wenn es sich um Theatersäle, Vortragssäle, Konzertsäle, Kirchen und Hallen handelt.

Bei den Störungen der Hörsamkeit wollen wir „gewöhnliche" und „außergewöhnliche" Störungen unterscheiden. Zu den außergewöhnlichen Störungen zählen wir vor allem Echos, Flatterechos, Schallbrennpunkte. Sie stellen krasse Fehler der Hörsamkeit dar und sind unbedingt zu vermeiden. Das Echo beruht darauf, daß ein von einer

[1]) Vgl. auch Doorentz, Beitrag zur Beurteilung der Ausführung von Schallisolierungen in Gebäuden. Stahlbau 1930, S. 169, 187, 198, 300, und Gastell, Grundgesetze der Schalldämmung in Bauten. Stahlbau 1936, S. 79, 86.

bestimmten Wandstelle kräftig zurückgeworfener Schallstrahl mindestens $^{1}/_{15}$ s später als der direkte Schallstrahl ans Ohr des Zuhörers gelangt. Es sind dann zwei getrennte Schallimpulse an Stelle des einen zu hören. Im Falle des Flatterechos folgt dem direkten Schallimpuls, etwa Händeklatschen, ein ratterndes oder rasselndes Geräusch; es kommt dadurch zustande, daß ein Schallstrahl zwischen zwei gegenüberliegenden stark zurückwerfenden Wänden mehrmals hin und her läuft. Schallbrennpunkte treten auf, wenn mehrere Schallstrahlen nach der Reflexion an einer gewölbten Wandfläche in einem bestimmten Raumpunkt sich vereinigen; sie sind von den sogenannten Flüstergewölben und Flüstergrotten her bekannt. Tonnengewölbe und hohe Kuppeln sind deshalb immer als akustisch ungünstig zu bezeichnen. Die verschiedenen außergewöhnlichen Störungen haben das eine gemeinsam: man kann ihre Entstehung durch eine rein geometrische Betrachtung erklären, indem man nämlich den Verlauf einiger weniger Schallstrahlen verfolgt.

Als Bedingungen guter Hörsamkeit sind allgemein ausreichende Lautstärke und ausreichende Deutlichkeit zu fordern; wenn wir jemanden schlecht verstehen und annehmen, daß die Sprechweise des anderen daran schuld ist, bitten wir ihn auch, „laut und deutlich" zu sprechen. Bei den „gewöhnlichen" Fällen schlechter Hörsamkeit gibt es nun zwei Grundtypen, die sich mit Hilfe der angegebenen Hörsamkeitsbedingungen einfach beschreiben lassen: beim ersten Typ ist die Schalldarbietung laut genug, aber verwaschen, also undeutlich; beim zweiten Typ ist die Darbietung zwar deutlich, aber zu leise. Die Ursachen für diese „gewöhnlichen" Fälle schlechter Hörsamkeit sind bekannt, seit W. C. Sabine Ende des vorigen Jahrhunderts durch systematische Untersuchungen die wissenschaftliche Raumakustik begründete. Die von ihm und anderen Forschern gefundenen Grundgesetze sind aber auch heute noch nicht so allgemein bekannt, wie es wünschenswert wäre. „Es ist ein in Musiker- und Architektenkreisen weit verbreiteter Aberglaube, daß man hinsichtlich der Hörsamkeit eines Raumes ganz dem Zufall ausgeliefert sei und auf beliebige Überraschungen nach Fertigstellung des Baues gefaßt sein müsse", wurde noch auf der Physikertagung in Salzbrunn 1936 festgestellt[2]). In der Breslauer Jahrhunderthalle wurden noch vor etwa einem Jahrzehnt Wünschelrutengänger eingesetzt, um den Verlauf unterirdischer Rinnsale zu bestimmen, die für die schlechte Hörsamkeit der Halle verantwortlich sein sollten!

Wenn man die raumakustischen Erscheinungen gesetzmäßig erfassen will, muß man sich darüber im klaren sein, daß es sich im allgemeinen nur um eine statistische Betrachtung handeln kann. Denn der Schallwellenverlauf in wirklichen Räumen, deren Oberfläche eine verwickelte Gestalt hat und deren Wandbeschaffenheit von Ort zu Ort stark wechselt, ist so verwickelt, daß die Vorgänge im einzelnen theoretisch nicht bestimmt werden können. Die statistisch abgeleiteten Gesetze können natürlich im Einzelfall keine strenge Gültigkeit beanspruchen. Man gelangt aber so zu einer umfassenden Übersicht über die „gewöhnlichen" Störungen der Hörsamkeit. Man geht bei der Ableitung der Gesetze von einem besonders einfachen Schallvorgang aus. Eine Schallquelle von bestimmter, zeitlich konstanter Leistung N (das ist die Schallenergie, die in der Sekunde von der Schallquelle abgestrahlt wird), zum Beispiel ein Lautsprecher, wird plötzlich eingeschaltet und nach einer Weile wieder ausgeschaltet. Bild 1a gibt den zeitlichen Verlauf der Schalleistung wieder. Die von dem Lautsprecher ausgehenden Schallwellen werden an den Wänden teils reflektiert, teils verschluckt. Wäre gar keine Schluckung vorhanden, so würde der gesamte Vorrat an Schallenergie in dem Raum dauernd steigen, da die Schallquelle dauernd Energie nachliefert. Infolge der Schluckung bildet sich aber ein gleichbleibender Zustand aus, in dem gerade so viel Energie verschluckt wird, wie die Schallquelle nachliefert. Der auf das Raumvolumen V bezogene gesamte Energievorrat wird als die mittlere Energiedichte E bezeichnet. Für den Wert E_0, den die mittlere Energiedichte im gleichbleibenden Zustand annimmt, gilt die Gleichung:

Bild 1a bis c. Zeitlicher Verlauf von Schalleistung N (Kurve a), Energiedichte E (Kurve b) und Lautstärke L (Kurve c).

$$(1) \qquad E_0 = K_1 \cdot \frac{N}{aF}.$$

Dabei ist K_1 eine (vom Raum und der Schallquelle unabhängige) Konstante, F die gesamte Oberfläche des Raumes und a die mittlere Schluckungszahl oder der Schluckgrad der Wände. An Stelle der einzelnen Wandstücke von verschiedenem Schluckgrad denkt man sich also eine Wand von einheitlicher Beschaffenheit mit dem mittleren Schluckgrad a. Die sich einstellende Energiedichte E_0 ist also der Schalleistung N direkt, der „Gesamtschluckung" aF umgekehrt proportional. Der zeitliche Verlauf der Energiedichte beim Ein- und Ausschalten der Quelle zeigt Bild 1b. Man sieht, daß eine gewisse Zeit nach dem Einschalten der Schallquelle vergeht, bis der Raum mit Schall gefüllt ist; ebenso vergeht nach dem Abschalten eine gewisse Zeit, bis die Schallenergie aus dem Raum verschwunden ist; denn die Schallwellen, die im Augenblick des Abschaltens den Raum durchsetzen, laufen noch weiter, bis ihre Energie von den Wänden aufgezehrt ist. Diese Vorgänge werden als Anhall und Nachhall bezeichnet. Der Nachhall kann auch als eine kontinuierliche Folge von Echos angesehen werden. Der beim Hören gewonnene subjektive Eindruck wird aber nicht durch den zeitlichen Verlauf der Energiedichte E, sondern durch den der Lautstärke L wiedergegeben (Bild 1c). Die Lautstärke ist im wesentlichen ein logarithmisches Maß der Energiedichte. Subjektiv ist der Anhall kaum, der Nachhall durchaus wahrzunehmen, wie aus Bild 1c hervorgeht. Um den für die Hörsamkeit außerordentlich wichtigen Nachhallvorgang quantitativ zu erfassen, hat Sabine als Nachhallzeit diejenige Zeit T bezeichnet, die vergeht, bis die Energiedichte auf den millionsten Teil ihres Anfangswertes gesunken ist. Mit Hilfe der modernen Schallaufzeichnungsgeräte kann der zeitliche Verlauf der Lautstärke unmittelbar photographisch aufgenommen und daraus der Wert der Sabineschen Nachhallzeit T eines Raumes durch Messung bestimmt werden. Für T gilt die Formel:

$$(2) \qquad T = K_2 \cdot \frac{V}{aF}.$$

Dabei ist K_2 wieder eine Konstante und V das Raumvolumen. Je größer die Gesamtschluckung aF ist, um so kürzer ist der Nachhall. Mit dem Volumen steigt die Nachhallzeit an, weil in großen Räumen die schwächenden Reflexionen an den Wänden seltener erfolgen. In Wohnräumen beträgt die Nachhallzeit etwa 0,8 s.

Die beiden Gl. (1) u. (2) bilden die Grundgesetze der Raumakustik. Sie müssen daher der weiteren Betrachtung zugrunde gelegt werden. Denken wir uns zunächst einen Raum von gegebenem Volumen V und gegebener Oberfläche F und darin eine Schallquelle mit gegebener Leistung N. Die einzig verfügbare Größe wäre dann der mittlere Schluckgrad der Wände a. Geben wir dem Raum zunächst harte, glatte Wände und lassen ihn leer, so ergibt sich ein sehr kleiner Wert für a. Infolgedessen wird dann nach den angegebenen Gleichungen E_0 und T sehr groß. Große Energiedichte bedeutet große Lautstärke. Große Nachhallzeit bedeutet starke Verwaschung der einzelnen Schallimpulse; denn handelt es sich beispielsweise um Sprache, so wird bei jeder gesprochenen Silbe sich der von der vorhergehenden Silbe herrührende Nachhall stark überlagern. Die einzelnen Silben werden verwischt, die Sprache erscheint undeutlich. Von den beiden, oben angeführten Grundtypen schlechter Hörsamkeit ist dann der Fall 1 (laut, aber undeutlich) verwirklicht. Geben wir dagegen dem mittleren Schluckgrad einen sehr hohen Wert, indem wir eine große Menge poröser, schallschluckender Stoffe in den Raum bringen (Watte, Filz, Textilstoffe, Holzfaserplatten usw.), so werden sowohl E_0 wie T sehr klein. Die kurze Nachhallzeit verhindert jede Verwaschung, aber die Lautstärke ist sehr gering. Wir haben jetzt den Fall 2 der beiden Grundtypen schlechter Hörsamkeit vor uns (deutlich, aber zu leise). Räume des ersten Typs werden Hallräume, Räume des zweiten Typs werden schallgedämpfte Räume genannt. Grenzfälle dieser beiden Typen werden in den akustischen Laboratorien für Meßzwecke benötigt. Die schallgedämpften Räume der Laboratorien werden mit Watte- oder Schlackenwolleschichten von etwa 1 m Dicke ausgekleidet. Der subjektive Eindruck beim Aufenthalt in solchen Räumen ist außerordentlich stark; denn auch im Freien wird wegen der Reflexionen am Erdboden oder an Häusern und Bäumen niemals eine derartige Unterdrückung des Nachhalls erreicht. Die Hallräume der Laboratorien besitzen harte, glatte Wände; die Werte der Sabineschen Nachhallzeit liegen hier etwa bei 10 s. Einen unbeabsichtigten, aber besonderen Fall eines Hallraumes bildet das Wasserschloß des Walchenseekraftwerks mit einer Nachhallzeit von fast 1 Minute. Dieser ungeheuer lange Nachhall ist nach (2) verständlich, da das Volumen sehr groß ist ($V = 14\,000$ m³) und da die „Wände" von der schallharten Wasseroberfläche und von Beton gebildet werden. In diesem Raum klingt das Zuschlagen einer Holztür wie anhaltendes Donnerrollen. Von einer einzelnen Stimme gesungene Töne bleiben so lange stehen, daß sie zu Akkorden zusammenklingen.

Besitzt ein größerer geschlossener Raum einen „gewöhnlichen" Hörsamkeitsfehler, so handelt es sich fast immer um den Fall 1: die Nachhallzeit ist zu groß, der Raum wirkt als Hallraum. Diese Tatsache ist sofort aus dem Gesetz (2) zu erklären. Werden Räume ohne Kenntnis der raumakustischen Gesetze ausgestattet, so wird im allgemeinen die Beschaffenheit der Wände bei großen Räumen nicht anders sein als bei kleinen. Für den mittleren Schluckgrad a wird sich unabhängig vom Raumvolumen ein bestimmter Durchnittswert ergeben. Wird a unabhängig vom Volumen gewählt, so steigt aber nach (2) die Nachhallzeit verhältnisgleich mit den Abmessungen der Räume an, da im Zähler das Raumvolumen, im Nenner die Oberfläche auftritt. Werden die raumakustischen Gesetze nicht berücksichtigt, dann erhalten also große Räume eine längere Nachhallzeit als kleine. Das ist auch der Grund, weshalb sich für Wohnräume keine raumakustischen Schwierigkeiten ergeben. Der mittlere Schluckgrad eines Raumes muß demnach um so größer gewählt werden, je größer der Raum ist.

In welcher Weise sind nun die Bedingungen für günstigste Hörsamkeit genauer zu umschreiben? Grundsätzlich wäre zu fordern, daß unabhängig von Raumvolumen eine bestimmte mittlere Lautstärke bzw. Energiedichte und ein bestimmter Deutlichkeitsgrad, d. h. eine bestimmte Nachhallzeit erhalten werden. Beide Sollwerte sind erfahrungsmäßig festzustellen. Durch Betrachtung der beiden Grundgesetze ergibt

[2]) L. Cremer, Z. f. techn. Phys. 1936, 17, 528.

sich nun folgender Tatbestand: In einem Raum von gegebenem Volumen und gegebener Oberfläche können die angemessenen Sollwerte nur erreicht werden, wenn zwei Größen verfügbar sind. Daher muß außer dem mittleren Schluckgrad a auch die Schalleistung N als eine willkürlich wählbare Größe angesehen werden. Daß die Schalleistung dem Raum angepaßt wird, ist ja auch bis zu einem gewissen Grade selbstverständlich. Ist eine elektrische Übertragungsanlage vorhanden, so sind die Verstärker und Lautsprecher entsprechend zu bemessen; bei Konzertsälen ist die Orchesterbesetzung den Raumverhältnissen anzugleichen. Quantitativ folgt aber aus unserer grundsätzlichen Forderung eine Bedingung, die praktisch nicht zu erfüllen ist. Die Schalleistung müßte nämlich verhältnisgleich mit dem Raumvolumen V ansteigen; denn aus der Forderung konstanter Nachhallzeit ergibt sich $a\,F \sim V$. In großen Räumen würde man einen riesenhaften Leistungsaufwand benötigen. So begnügt man sich mit einer Kompromißlösung. Man läßt bei größeren Räumen einen etwas geringeren Deutlichkeitsgrad, d. h. größere Nachhallzeiten, und eine etwas geringere Lautstärke zu und kommt auf diese Weise mit einem erschwinglichen Leistungsaufwand aus.

Die Frage der günstigsten Hörsamkeit erfährt eine weitere Erschwerung dadurch, daß die angegebenen Sollwerte je nach dem besonderen Charakter der Schalldarbietung verschieden zu wählen sind. Sprache und leichte Musik verlangen vor allem Deutlichkeit und damit eine kurze Nachhallzeit. Bei schwerer Musik, z. B. einem Choral, erfordert die künstlerische Wirkung einen bedeutend größeren Nachhall. Jeder Raum kann daher nur für eine bestimmte Art der Schalldarbietung geeignet sein, wenn nicht, wie bei manchen Rundfunksenderäumen, Vorrichtungen zur willkürlichen Veränderung der Schallabsorption vorgesehen werden. In vielen Kirchen ist die Hörsamkeit für Orgelmusik denkbar günstig, während Sprache weitgehend unverständlich bleibt. Einen besonderen Fall bilden die Tonfilmtheater. Während der Vorführung soll hier der Nachhall der dargestellten Szene entsprechen. Dieser Nachhall ist aber bereits auf dem Tonfilm aufgezeichnet. Der hinzukommende Nachhall des Theaterraumes muß möglichst unterdrückt werden. Tonfilmtheater müssen daher besonders stark mit schallschluckenden Stoffen ausgekleidet werden. In Bild 2 sind die praktischen Sollwerte der Sabineschen Nachhallzeit in Abhängigkeit von der Raumgröße für verschiedene Darbietungsarten wiedergegeben. Dabei ist angenommen, daß die Säle vollbesetzt sind, so daß die beträchtliche Schallabsorption durch das Publikum wirksam wird.

Bild 2. Günstigste Nachhallzeit in Abhängigkeit von Raumvolumen für verschiedene Schalldarbietungen.

Die Bauakustik befaßt sich mit den Vorgängen bei der Schallübertragung von Raum zu Raum. Der störende Schall kann von einem Raum („Senderaum") auf verschiedenen Wegen zum anderen Raum („Empfangsraum") gelangen. Im wesentlichen haben wir dabei drei Möglichkeiten zu unterscheiden[3]):

1. Die Druckschwankungen des Störschalls versetzen Fußboden, Wände und Decke des Senderaumes in Biegeschwingungen. Die so zum Schwingen gebrachten Wände strahlen wie Lautsprechermembranen Schallenergie in die Nachbarräume ab; die Schallenergie strömt dabei senkrecht zur Wand von Raum zu Raum.
2. Durch kleine Öffnungen hindurch, z. B. Ritzen bei schlecht schließenden Türen, besteht eine direkte Verbindung zwischen zwei Räumen, so daß der Schall unmittelbar durch das Medium Luft übertragen wird.
3. Innerhalb einer Wand oder Decke, die (z. B. durch Türenschlagen oder Trittschall) in Schwingungen versetzt wird, breitet sich die Schallenergie in der Form von Dehnungswellen, Biegungswellen oder Drillungswellen längs der tragenden Bauteile, also parallel zur Wand, aus.

Bei den beiden ersten Übertragungswegen sprechen wir von Luftschall, beim dritten von Körperschall. Bei der Bekämpfung von Störschall muß man sich immer erst darüber klar werden, welcher Fall vorliegt, da gegen Körperschallübertragung ganz andere Maßnahmen ergriffen werden müssen als gegen Luftschallübertragung.

Die Fähigkeit einer Wand, der Schallübertragung entgegenzuwirken, bezeichnen wir allgemein als ihre Schalldämmung. Handelt es sich um die Übertragung von Luftschall, so betrachten wir als Maß für die Schalldämmung der Wand das Verhältnis der gesamten auf die Wand auffallenden Schalleistung N_1 zur gesamten durchgelassenen Schalleistung N_2. Die Größe $D = 10 \cdot \log \frac{N_1}{N_2}$ wird die Schalldämmzahl genannt und in Dezibel (db) ausgedrückt. Bei der Luftschalldämmung einer Wand wird der Schalldurchgang durch kleine Öffnungen um so mehr ins Gewicht fallen, je geringer die Energiemengen sind, die auf anderen Wegen in dem Nachbarraum gelangen, d. h. je höher die Schalldämmung an sich ist. Die einfachste Aufgabe der Bauakustik besteht darin, die Faktoren anzugeben, von denen die Schalldämmung einer luftdichten, einfachen Trennwand abhängt. Durch zahlreiche Messungen ist in Übereinstimmung mit theoretischen Erwägungen festgestellt worden, daß für die Schalldämmung einer Einfachwand allein ihr Gewicht maßgebend ist. Bild 3 gibt diesen sehr wichtigen Zusammenhang zwischen der Schalldämmzahl in db und dem Wandgewicht in kg/m² wieder. Aus der Kurve geht hervor, daß man das Wandgewicht von 30 kg/m² auf 100 kg/m² vergrößern muß, um einen Anstieg der Schalldämmzahl von 34 db auf 40 db zu erzielen. Bei Einfachwänden läßt sich daher eine gute Schalldämmung nur mit erheblichen Kosten erreichen. Mehrfachwände verhalten sich im allgemeinen günstiger als gleich schwere Einfachwände. Sie bestehen im einfachsten Fall aus einer Anzahl gleicher Teilwände, die voneinander durch gleich große Luftzwischenräume getrennt sind. Damit die Schalldämmung einer Mehrfachwand auch für tiefe Töne noch ausreichend ist, muß die Größe der Luftzwischenräume in bestimmter Weise gewählt werden; sie müssen um so größer sein, je leichter die Teilwände sind, dürfen aber den Betrag von 15 bis 20 cm nicht übersteigen. Weiterhin müssen in den Luftzwischenräumen Schallschluckstoffe angebracht werden, damit dort eine Ausbreitung von Schallwellen in wandparalleler Richtung verhindert wird. Es ist gelungen, nach den angegebenen Richtlinien eine Vierfachwand auszubilden, die bei einem Gesamtgewicht von 50 kg/m² und 45 cm gesamter Dicke fast die gleiche hohe Schalldämmung aufweist wie eine 50 cm dicke Vollziegelwand von 1000 kg/m²[4]).

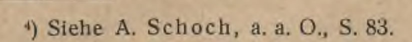
Bild 3. Schalldämmung einer Einfachwand in Abhängigkeit vom Wandgewicht.

Bei einer wirksamen Störschallbekämpfung muß zur Luftschalldämmung noch die Unterdrückung des Körperschalls treten. Er wirkt besonders unangenehm dadurch, daß er sich auf größere Entfernungen fast ungeschwächt ausbreitet und so auch entfernter liegende Räume in Mitleidenschaft zieht. Zahlreiche Beton- und Stahlskelettbauten besitzen trotz guter Luftschalldämmung durch Wände und Decken eine lästige Hellhörigkeit allein durch die Wirkung des Körperschalls. Daß der Körperschall mitunter auch ganz merkwürdige Erscheinungen hervorrufen kann, sei an dem Beispiel eines Schulgebäudes in Oberschlesien gezeigt. Diese Schule besitzt verhältnismäßig dünne Betondecken; die Fußböden sind mit Linoleum belegt. Stößt man mit dem bloßen Fußhacken gegen den Fußboden, so ist der an der Stoßstelle unmittelbar entstehende Luftschall ganz geringfügig. Durch den Stoß wird aber der ganze Fußboden in starke Schwingungen versetzt, so daß von ihm kräftige Luftschallwellen nach oben ausgehen. Infolgedessen ist eine Ortung der Stoßstelle gar nicht möglich; man hat vielmehr subjektiv den Eindruck, als käme ein Geräusch von kräftigen Axtschlägen aus dem darunterliegenden Raum.

Der Körperschall wird weitgehend ausgeschaltet, in dem man die Schalleitung an geeigneten Stellen durch Einfügen besonderer „Körperschalldämmstoffe" unterbricht. Solche Stoffe werden ebenso wie die raumakustisch wichtigen „Schallschluckstoffe" von der Industrie verhältnismäßig billig hergestellt. Bei größeren öffentlichen Gebäuden wird hiervon schon vielfach Gebrauch gemacht. Wenn die Anforderungen an die Körperschalldämmung besonders hoch sind, wie z. B. bei den Funkhäusern, hat sich die „schwebende Bauweise" außerordentlich bewährt. Hierbei werden die Fußböden, Wände und Decken der einzelnen Räume nicht unmittelbar am tragenden Baugerüst befestigt, sondern federnd daran gehängt.

Man kann zusammenfassend sagen, daß die akustische Forschung die Aufgaben, die ihr auf dem Gebiet des Bauwesens gestellt werden, weitgehend geklärt und praktisch brauchbare Lösungen angegeben hat. Vielfach wird es schwer sein, bei fertigen Bauten Abhilfe zu schaffen. Deswegen ist anzustreben, daß unbedingt schon beim Planen auch die akustischen Gesichtspunkte genügend berücksichtigt werden. Gerade in der heutigen Zeit, die durch die Anzahl und Größe der Bauvorhaben die Ingenieure vor eine gewaltige Aufgabe stellt, kann die Wichtigkeit einer akustischen Planung nicht genug betont werden.

[3]) Vgl. hierzu besonders A. Schoch, Die physikalischen und technischen Grundlagen der Schalldämmung im Bauwesen. Leipzig 1937.



[4]) Siehe A. Schoch, a. a. O., S. 83.

INHALT: Der Schweißniet. — Bemerkung zur Frage der Kipplast eines Trägerrostes. — Die Akustik im Bauwesen.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Organ des Arbeitskreises „Stahlbau" der Fachgruppe Bauwesen im NS.-Bund Deutscher Technik

Schriftwaltung: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 7 RM und Postgeld

15. Jahrgang — BERLIN, 2. Oktober 1942 — Heft 21/22

Die Pfette mit Kopfstreben.

Von Prof. Dr.-Ing. Franz Glaser, Prag.

Als Ersatz für Fachwerkpfetten, die vielfach noch als einzige Möglichkeit zur Überbrückung großer Binderentfernungen angesehen werden, kommt in erster Linie die Pfette mit Kopfstreben in Betracht. Obwohl dieser Ersatz ganz und gar nicht jene Eigenschaften hat, die man im allgemeinen diesem Begriff zuschreibt, nämlich etwas in irgendeiner Richtung Unvollkommenes, sondern leichter und billiger als die Fachwerkpfette ist, ist seine Anwendung verhältnismäßig selten. Das mag daran liegen, daß diese Pfette keine günstige ästhetische Wirkung hat, zumindest nicht im Zusammenhang mit vollwandigen Bindern. Bei Fachwerkbindern ist durch geeignete Strebenführung diese Wirkung leicht zu bessern. Immerhin wird bei Bauten, bei denen schönheitliche Gesichtspunkte im Vordergrund stehen, die Anwendungsmöglichkeit der Pfette mit Kopfstreben beschränkt bleiben.

Auf Grund der vorhandenen Berechnungsmethoden[1][2] ist die Wirtschaftlichkeit der Pfette mit Kopfstreben schon außer Zweifel. Es gelingt aber, durch Anwendung der neueren Erkenntnisse über das Verhalten des Baustahls im plastischen Bereich auf diese Pfette sowohl ihre Wirtschaftlichkeit zu steigern als auch ihre Berechnung wesentlich zu vereinfachen. Für Durchlaufträger im Stahlhochbau mit gleichen Stützweiten und gleichen Belastungen ist die Anwendung dieser Erkenntnisse bereits normenmäßig zugelassen. Es wird dabei grundsätzlich das herkömmliche Verfahren der Bemessung nach zulässigen Spannungen verlassen und dafür das sogenannte Traglastverfahren gesetzt, bei dem ein bestimmter Bruchteil der tatsächlich erreichbaren Traglast der Bemessung zugrunde gelegt wird. Das Traglastverfahren ist heute theoretisch geklärt und durch Versuche[3] hinreichend unterbaut.

Bild 1.

Bild 2.

[1]) Stahlhochbauten. Berlin 1932, Springer-Verlag.

[2]) Stahlbau-Kalender 1942, S. 303.

[3]) H. Maier-Leibnitz, Versuche zur weiteren Klärung der Frage der tatsächlichen Tragfähigkeit durchlaufender Träger aus Baustahl. Stahlbau 1936.

Die Anwendung des Traglastverfahrens auf die Pfette mit Kopfstreben bildet den Inhalt der nachstehenden Berechnung.

Es wird eine Pfette mit gleichen Stützweiten l und Gleichlast q behandelt, die über den Bindern Gelenke (Stöße) besitzt und deren Strebenfußpunkte seitlich nicht gehalten sind (Bild 1). Die Endstreben S_0 und S_n sind daher spannungslos, sie haben nur die Aufgabe, die Binderuntergurte seitlich zu halten. Bei der Berechnung werden die unbedeutenden Verformungen von den Normalkräften gegenüber den Verformungen von den Biegungsmomenten vernachlässigt. Die Annahme eines konstanten Trägheitsmoments, die bei den bisherigen Berechnungen gemacht, aber bei der konstruktiven Ausführung nicht befolgt wurde, ist unhaltbar. Wie die späteren Ergebnisse zeigen werden, kann man wohl in allen Mittelfeldern das gleiche Trägheitsmoment J ausführen, nicht aber in den Endfeldern. Dort ist unbedingt ein größeres Trägheitsmoment εJ, also $\varepsilon > 1$, erforderlich. Die Eigenart der folgenden Berechnung unterstreicht noch dieses Erfordernis.

Wir denken uns das statisch bestimmte Grundsystem durch Lösung des Zusammenhangs zwischen dem Auflagerstab A und dem Strebenfußpunkt hergestellt (Bild 2). Dadurch werden als statisch unbestimmbare Größen die lotrechten Komponenten der Strebenkräfte $V = S \cdot \sin\varphi$ eingeführt. Die gedachte Schnittstelle erfährt von der Belastung eine Verschiebung $(\delta'_p + \delta_p)/2$ an den Orten 1 und $n-1$, an allen Zwischenorten δ_p; vom Hilfsangriff $2\,V_1 = 2$ entstehen bei 1 $(\delta'_{11} + \delta_{11})/2$, bei 2 $\delta_{21}/2 = \delta_{12}/2$. Für $1 < x < n-1$ ergeben sich bei x $\delta_{xx} = \delta_{11}$, bei $x-1$ und $x+1$ $\delta_{x-1,x}/2 = \delta_{x+1,x}/2 = \delta_{12}/2$.

Zu Bild 2.

Bild 3.

Die Elastizitätsgleichungen lauten damit

$$V_1 \cdot \frac{\delta'_{11} + \delta_{11}}{2} + V_2 \cdot \frac{\delta_{12}}{2} = \frac{\delta_p' + \delta_p}{2}$$

$$V_1 \cdot \frac{\delta_{12}}{2} + V_2\,\delta_{11} + V_3 \cdot \frac{\delta_{12}}{2} = \delta_p$$

— — — — — — — — — —

$$V_{n-2} \cdot \frac{\delta_{12}}{2} + V_{n-1} \cdot \frac{\delta_{11} + \delta'_{11}}{2} = \frac{\delta_p + \delta'_p}{2}.$$

Die speziellen Werte für die Verschiebungen sind nach bekannten Formeln der Baustatik folgende (Bild 3):

$$\alpha = \frac{a}{l}, \quad \delta'_p = \frac{q\,l^4}{24\,E\,\varepsilon\,J}(\alpha - 2\,\alpha^3 + \alpha^4), \quad \delta_p = \frac{q\,l^4}{24\,EJ}(\alpha - 2\,\alpha^3 + \alpha^4),$$

$$\delta'_{11} = \frac{1\,l^3}{3\,E\,\varepsilon\,J} \cdot \alpha^2 (1-\alpha)^2, \qquad \delta_{11} = \frac{1\,l^3}{3\,EJ} \cdot \alpha^2 (1-\alpha)^2,$$

$$\delta_{12} = \frac{1\,l^3}{6\,EJ} \cdot \alpha^2 (1 - 2\,\alpha^2).$$

Die Verschiebungsgrößen in die Elastizitätsgleichungen eingesetzt und das ganze System mit $\frac{12\,EJ}{q\,l^4\,\alpha^2}$ multipliziert ergibt

$$\frac{V_1}{q\,l}\cdot 2(1-\alpha)^2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{V_2}{q\,l}(1-2\alpha^2)=\frac{1-2\alpha^2+\alpha^3}{4\alpha}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\frac{V_1}{q\,l}(1-2\alpha^2)+\frac{V_2}{q\,l}\cdot 4(1-\alpha)^2+\frac{V_3}{q\,l}(1-2\alpha^2)=\frac{1-2\alpha^2+\alpha^3}{2\alpha}$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$\frac{V_{n-2}}{q\,l}(1-2\alpha^2)+\frac{V_{n-1}}{q\,l}\cdot 2(1-\alpha)^2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=\frac{1-2\alpha^2+\alpha^3}{4\alpha}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Der allgemeine Typus ist demnach folgender:

$$\frac{V_{x-1}}{q\,l}(1-2\alpha^2)+\frac{V_x}{q\,l}\cdot 4(1-\alpha)^2+\frac{V_{x+1}}{q\,l}(1-2\alpha^2)=\frac{1-2\alpha^2+\alpha^3}{2\alpha}.$$

Er stellt eine Differenzengleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten dar. Die Lösung der homogenen Differenzengleichung lautet

$$\frac{\overline{V}_x}{q\,l}=A\,\beta^x+B\,\beta^{-x},$$

worin β die absolut größere Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$1+4\cdot\frac{(1-\alpha)^2}{1-2\alpha^2}\cdot\beta+\beta^2=0$$

darstellt. Die Partikularlösung der nichthomogenen Gleichung ergibt sich mit

$$\frac{\overline{\overline{V}}_x}{q\,l}=C=\frac{1-2\alpha^2+\alpha^3}{4\alpha(3-4\alpha)}.$$

Daher erhält man als Gesamtlösung der nichthomogenen Gleichung

$$\frac{V_x}{q\,l}=\frac{\overline{V}_x}{q\,l}+\frac{\overline{\overline{V}}_x}{q\,l}=A\,\beta^x+B\,\beta^{-x}+C.$$

Die noch unbekannten Größen A und B können aus den Randgleichungen ermittelt werden.

$$\frac{V_1}{q\,l}\cdot 4(1-\alpha)^2+\frac{V_2}{q\,l}(1-2\alpha^2)\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}=\frac{1-2\alpha^2+\alpha^3}{2\alpha}$$

$$\frac{V_{n-2}}{q\,l}(1-2\alpha^2)\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}+\frac{V_{n-1}}{q\,l}\cdot 4(1-\alpha)^2=\frac{1-2\alpha^2+\alpha^3}{2\alpha}$$

$$(A\,\beta+B\,\beta^{-1}+C)\,4(1-\alpha)^2+(A\,\beta^2+B\,\beta^{-2}+C)(1-2\alpha^2)\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}=\frac{1-2\alpha^2+\alpha^3}{2\alpha}$$

$$(A\,\beta^{n-2}+B\,\beta^{2-n}+C)(1-2\alpha^2)\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}+(A\,\beta^{n-1}+B\,\beta^{1-n}+C)\,4(1-\alpha)^2=\frac{1-2\alpha^2+\alpha^3}{2\alpha}.$$

Nach Ausrechnung und Einführung in die Gesamtlösung stellt sich diese folgendermaßen dar:

$$(1)\qquad \frac{V_x}{q\,l}=\frac{1-2\alpha^2+\alpha^3}{4\alpha(3-4\alpha)}\left[1-\frac{\frac{2}{1+\varepsilon}}{1+\beta^n+(\beta^2+\beta^{n-2})\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}(\beta^x+\beta^{n-x})\right]\quad 1\leqq x\leqq n-1.$$

Für die Sonderfälle $\varepsilon=1$ (gleiches Trägheitsmoment auch in den Endfeldern) und $\varepsilon=\infty$ (starre Endfelder) wird erhalten:

$$(2)\quad \varepsilon=1\qquad \frac{V_x}{q\,l}=\frac{1-2\alpha^2+\alpha^3}{4\alpha(3-4\alpha)}\left[1-\frac{1}{1+\beta^n}(\beta^x+\beta^{n-x})\right]\quad 1\leqq x\leqq n-1.$$

$$(3)\quad \varepsilon=\infty\qquad \frac{V_x}{q\,l}=\frac{1-2\alpha^2+\alpha^3}{4\alpha(3-4\alpha)}\quad 1\leqq x\leqq n-1.$$

Je größer das Trägheitsmoment in den Endfeldern im Verhältnis zu jenem der Mittelfelder wird, desto mehr wird ein Ausgleich der Unbekannten V_x untereinander stattfinden; im Grenzfall $\varepsilon=\infty$ sind sie alle gleich. Dieser Grenzfall zeigt nachstehenden Momentenverlauf (Bild 4):

Momente beim Strebenanschluß $\frac{q}{2}\cdot a(l-a)-V\,a=M'=M''$

Momente in Feldmitte $\frac{q\,l^2}{8}-V\,a=M_m.$

Nach Division durch $q\,l^2$ und Einführung von $V/q\,l$ bekommen wir

$$\frac{M'}{q\,l^2}=\frac{M''}{q\,l^2}=-\frac{1-6\alpha+12\alpha^2-7\alpha^3}{4(3-4\alpha)}$$

$$\frac{M_m}{q\,l^2}=\frac{1-4\alpha+4\alpha^2-2\alpha^3}{8(3-4\alpha)}\qquad M'>M_m.$$

Wird unter der Voraussetzung eines idealplastischen Stahles die Last gesteigert, so tritt zunächst an den Strebenansatzpunkten, wo die größeren Momente vorhanden sind, die Plastizierung ein, die nach vollständiger Durchdringung des Querschnitts ein Fließgelenk mit $M'_{pl}=M''_{pl}$ als konstantem Größtwert herstellt. Eine weitere Laststeigerung bewirkt dann die gleiche Erscheinung in Feldmitte. Damit ist aber der Träger in eine kinematische Kette übergegangen, die für weitere Laststeigerungen labil ist. Dieser Zustand stellt daher den Grenzwert des Tragvermögens vor. Wir haben dann mit zwei gleichen Momenten $|M'_{pl}|=|M_{m\,pl}|$ zu rechnen.

$$\frac{q\,l^2}{8}-V_{pl}\,a=-\left[\frac{q}{2}\cdot a(l-a)-V_{pl}\,a\right].$$

Daraus ergeben sich

$$\frac{V_{pl}}{q\,l}=\frac{1+4\alpha-4\alpha^2}{16\alpha}\qquad \frac{M_{m\,pl}}{q\,l^2}=-\frac{M'_{pl}}{q\,l^2}=-\frac{M''_{pl}}{q\,l^2}=\frac{(1-2\alpha)^2}{16}.$$

Im Endfeld setzen wir voraus, daß beim gleichen Grenzzustand die vollständige Plastizierung an der Stelle des größeren Feldmoments eintritt. Dieser Effekt kann durch eine entsprechende Querschnittswahl ohne weiteres erzielt werden. Eine weitere Laststeigerung, die im Endfeld noch möglich wäre, ist ohne Interesse, weil wir ja nur den Grenzwert der über den ganzen Pfettenstrang reichenden Gleichlast verwerten können. Mit dem Wert $V_{pl}/q\,l$ von oben wird für das Endfeld erhalten (Bild 5):

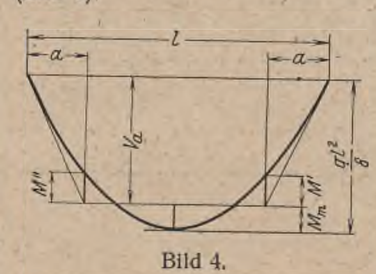


Bild 4.

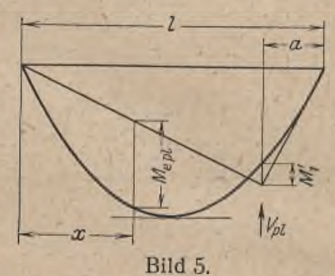


Bild 5.

Moment beim Strebenansatz

$$M_1'=\frac{q}{2}\cdot a(l-a)-V_{pl}\cdot\frac{a}{l}(l-a)$$

$$\frac{M_1'}{q\,l^2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{V_{pl}}{q\,l}\right)\alpha(1-\alpha)=-\frac{1-5\alpha+4\alpha^3}{16}.$$

Das Größtmoment im Felde $M_{e\,pl}$ tritt an der Stelle $Q=0$ auf:

$$Q=0=\frac{q\,l}{2}-q\,x-V_{pl}\cdot\frac{a}{l}.$$

Nach Division durch $q\,l$ und Einführung von $\xi=x/l$ entsteht

$$\frac{1}{2}-\xi-\frac{V_{pl}}{q\,l}\cdot\alpha=0\qquad \xi=\frac{7-4\alpha+4\alpha^2}{16}=\frac{6+(1-2\alpha)^2}{16}.$$

Aus der bekannten Parabeleigenschaft folgt

$$M_{e\,pl}=\frac{q\,(2\,x)^2}{8}\quad\text{oder}\quad\frac{M_{e\,pl}}{q\,l^2}=\frac{1}{2}\cdot\xi^2=\frac{[6+(1-2\alpha)^2]^2}{512}.$$

An der bisherigen Schlußfolgerung ist auszusetzen, daß 1. nicht $\varepsilon=\infty$, sondern $\varepsilon<\infty$ ist, und 2. von den Stützen nach beiden Seiten hin auf die Strecke a nicht der Festigkeitsfall der reinen Biegung, sondern jener der Biegung mit Zug vorliegt; dort ist nämlich noch eine Zugkraft von $S\cdot\cos\varphi=V\cdot\operatorname{cotg}\varphi$ vorhanden.

Um den Einwand 2 zu erledigen, wird ein I-Querschnitt, der als Pfettenprofil in der Regel in Betracht kommt, im vollkommen plastischen Zustand bei reiner Biegung und bei Biegung und Zug untersucht (Bild 6).

Bei reiner Biegung ist

$$M_{pl}=\left[\frac{1}{2}(b-t)(h-h_1)\frac{h+h_1}{2}+\frac{t\,h}{2}\cdot\frac{h}{2}\right]\sigma_F$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\sigma_F\,[(b-t)(h^2-h_1^2)+t\,h^2].$$

Bei Biegung und Zug ist

$$M_{pl}=\left[\frac{1}{2}(b-t)(h-h_1)\frac{h+h_1}{2}+t\,e_1\left(\frac{h}{2}-\frac{e_1}{2}\right)+t\,e_2\left(\frac{h}{2}-\frac{e_2}{2}\right)\right]\sigma_F.$$

Mit $e_1+e_2=h$ entsteht

$$M_{pl}=\frac{1}{4}\cdot\sigma_F\,[(b-t)(h^2-h_1^2)+4\,t\,e_1\,e_2]\qquad N_{pl}=\sigma_F\,t\,(e_1-e_2).$$

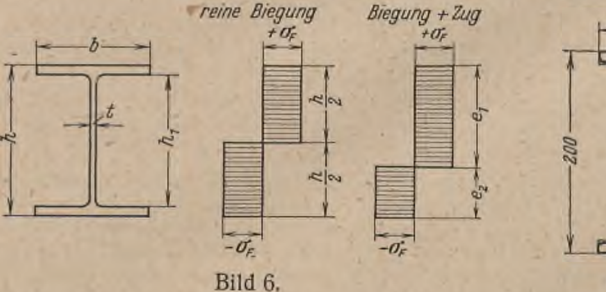


Bild 6.

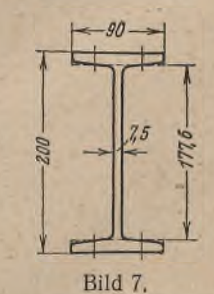


Bild 7.

Diese Gleichungen werden auf einen I 20 angewendet und der Zug hoch mit 4 t eingeschätzt. Dieser wird bei der Plastizierung auf etwa das Doppelte, also 8 t ansteigen (Bild 7).

Bei reiner Biegung ist

$$M_{pl}=\frac{2{,}4}{4}\,[8{,}25\,(20^2-17{,}76^2)+0{,}75\cdot 20^2]=600\ \text{tcm}.$$

Bei Biegung und Zug ist

$$N_{pl} = 8\ \text{t} = 2{,}4 \cdot 0{,}75\,(e_1 - e_2) \qquad e_1 + e_2 = 20\ \text{cm}$$

$$e_1 = 12{,}22\ \text{cm} \qquad e_2 = 7{,}78\ \text{cm}$$

$$M_{pl} = \frac{2{,}4}{4}\,[8{,}25\,(20^2 - 17{,}76^2) + 4 \cdot 0{,}75 \cdot 12{,}22 \cdot 7{,}78] = 590\ \text{tcm}.$$

Das Moment fällt kaum um 2 ‰. Der Einfluß der Normalkraft ist so gering, daß er unbedenklich vernachlässigt werden darf.

Zum Einwand 1 ist zu sagen, daß auch bei einer anderen Verteilung der Momente als für $\varepsilon = \infty$ sich an dem Endzustand mit den drei Fließgelenken nichts ändern wird. Die Traglast bleibt demnach die gleiche. Daß die im Laufe der Laststeigerung eintretenden Plastizierungen möglicherweise in einer anderen Reihenfolge stattfinden, ist für das Endergebnis ohne Belang. Es ist aber immerhin von Interesse, die nach der Elastizitätstheorie auftretenden Momente zu kennen. Wir erhalten damit eine Vorstellung über die Größe der unter der Gebrauchslast tatsächlich vorhandenen Momente.

Wir gehen von der Annahme aus, daß die Bemessung nach dem Traglastverfahren angewendet werden darf. Wenn wir mit der Sicherheit $\bar{q}/q$ arbeiten, erhalten wir die für die Bemessung maßgebenden Momente aus den im vollkommen plastischen Zustand auftretenden Momenten, indem q durch $\bar{q}$ ersetzt wird. Diese Sicherheit gegenüber der Traglast liegt, wie später gezeigt wird, über 2. Gerechnet wird für die für praktische Ausführungen in Betracht kommenden Grenzwerte $\alpha = 0{,}1$ und $\alpha = 0{,}2$.

$$\frac{V}{q\,l} = \frac{1 + 4\alpha - 4\alpha^2}{16\,\alpha} = 0{,}85 \quad \text{bzw.}\ 0{,}5125$$

$$\text{Mittelfelder} \quad \frac{M'}{q\,l^2} = \frac{(1 - 2\alpha)^2}{16} = 0{,}04 \quad \text{bzw.}\ 0{,}0225$$

$$\text{Endfeld} \quad \frac{M_e}{q\,l^2} = \frac{[6 + (1 - 2\alpha)^2]^2}{512} = 0{,}0861 \quad \text{bzw.}\ 0{,}0790.$$

Falls genau ausdimensioniert werden kann, verhalten sich die Widerstandsmomente von Endfeld und Mittelfeld wie

$$\alpha = 0{,}1 \quad \frac{W_e}{W} = \frac{0{,}0861}{0{,}04} = 2{,}15 \qquad \alpha = 0{,}2 \quad \frac{W_e}{W} = \frac{0{,}0790}{0{,}0225} = 3{,}51.$$

Für das Verhältnis der Trägheitsmomente kann etwa eingesetzt werden:

$$\alpha = 0{,}1 \quad \frac{\varepsilon J}{J} = \varepsilon \approx 0{,}9 \cdot 2{,}15^{3/2} \approx 3, \qquad \alpha = 0{,}2 \quad \frac{\varepsilon J}{J} = \varepsilon \approx 0{,}9 \cdot 3{,}51^{3/2} \approx 6.$$

Die spannungsmäßige Ausnutzung wird in der Regel nur in den Mittelquerschnitten möglich sein, da die Rücksichtnahme auf die zulässige Durchbiegung im Endfeld eine Überbemessung notwendig machen wird. Die überschläglich ermittelten Werte für ε werden daher bei praktischen Ausführungen in der Regel überschritten; sie stellen demnach untere Grenzwerte vor.

Mit $\varepsilon = \infty$ errechnet sich aus Gl. (3)

$$\alpha = 0{,}1 \quad \frac{V_x}{q\,l} = \frac{1 - 2\alpha^2 + \alpha^3}{4\alpha\,(3 - 4\alpha)} = 0{,}9433 = C$$

$$\alpha = 0{,}2 \quad \frac{V_x}{q\,l} = 0{,}5273 = C.$$

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung und ihre Potenzen werden für

$\alpha = 0{,}1$		$\alpha = 0{,}2$	
β	$= -0{,}3368$	β	$= -0{,}4239$
β^2	$= +0{,}1134$	β^2	$= +0{,}1797$
β^3	$= -0{,}0382$	β^3	$= -0{,}0762$
β^4	$= +0{,}0129$	β^4	$= +0{,}0323$
β^5	$= -0{,}0043$	β^5	$= -0{,}0137$
β^6	$= +0{,}0015$	β^6	$= +0{,}0058$
β^7	$= -0{,}0005$	β^7	$= -0{,}0025$
β^8	$= +0{,}0002$	β^8	$= +0{,}0010$
β^9	$= -0{,}0001$	β^9	$= -0{,}0004$
β^{10}	$= +0{,}0000$	β^{10}	$= +0{,}0002.$

Es können nunmehr nach Gl. (1) die lotrechten Komponenten der Strebenkräfte berechnet werden. Um den großen Einfluß der stärkeren Endfelder aufzuzeigen, sind in Klammern die entsprechenden nach Gl. (2) bestimmten Zahlen beigesetzt; sie gelten bekanntlich für gleiches Trägheitsmoment auch in den Endfeldern. Die Pfette mit 2 Feldern wird später behandelt.

Pfette mit 5 Feldern:

$$\alpha = 0{,}1 \qquad\qquad \alpha = 0{,}2$$

$$\frac{V_1}{q\,l} = 1{,}1691\,C \quad (1{,}3253\,C) \qquad \frac{V_1}{q\,l} = 1{,}1226\,C \quad (1{,}3970\,C)$$

$$\frac{V_2}{q\,l} = 0{,}9608\,C \quad (0{,}9245\,C) \qquad \frac{V_2}{q\,l} = 0{,}9676\,C \quad (0{,}8951\,C).$$

Für Pfetten mit mehr als 5 Feldern darf mit einem Fehler unter 2 ‰ $n = \infty$ gesetzt werden. Die Gleichung für $V_x/q\,l$ vereinfacht sich dann zu

$$(1\,\infty) \quad \frac{V_x}{q\,l} = \frac{1 - 2\alpha^2 + \alpha^3}{4\alpha\,(3 - 4\alpha)}\left[1 - \frac{\dfrac{2}{1+\varepsilon}}{1 + \beta^2 \cdot \dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \cdot \beta^x\right] \quad 1 \leqq x \leqq n - 1$$

$$(2\,\infty) \quad \varepsilon = 1 \quad \frac{V_x}{q\,l} = \frac{1 - 2\alpha^2 + \alpha^3}{4\alpha\,(3 - 4\alpha)}\,[1 - \beta^x] \quad 1 \leqq x \leqq n - 1.$$

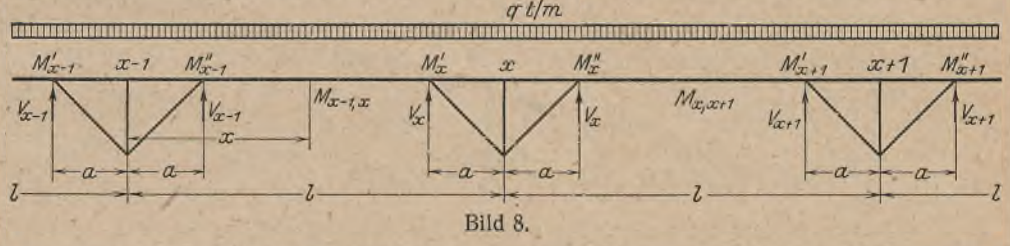


Bild 8.

Pfette mit ∞ Feldern:

$$\alpha = 0{,}1 \qquad\qquad \alpha = 0{,}2$$

$$\frac{V_1}{q\,l} = 1{,}1785\,C \quad (1{,}3368\,C) \qquad \frac{V_1}{q\,l} = 1{,}1389\,C \quad (1{,}4239\,C)$$

$$\frac{V_2}{q\,l} = 0{,}9399\,C \quad (0{,}8866\,C) \qquad \frac{V_2}{q\,l} = 0{,}9411\,C \quad (0{,}8203\,C)$$

$$\frac{V_3}{q\,l} = 1{,}0202\,C \quad (1{,}0382\,C) \qquad \frac{V_3}{q\,l} = 1{,}0250\,C \quad (1{,}0762\,C)$$

$$\frac{V_4}{q\,l} = 0{,}9931\,C \quad (0{,}9871\,C) \qquad \frac{V_4}{q\,l} = 0{,}9894\,C \quad (0{,}9677\,C)$$

$$\frac{V_5}{q\,l} = 1{,}0023\,C \quad (1{,}0043\,C) \qquad \frac{V_5}{q\,l} = 1{,}0045\,C \quad (1{,}0137\,C).$$

Man sieht, daß die Werte für V sehr rasch dem Grenzwert C zustreben.

Für die Momente ergeben sich die allgemeinen Anschreibungen (Bild 8): Über den Strebenansatzpunkten:

$$(4)\ \begin{cases} M_x' = \dfrac{q\,l}{2}(l - a) - \dfrac{q}{2}(l - a)^2 - V_{x-1} \cdot \dfrac{a}{l} \cdot a - V_x \cdot \dfrac{a}{l}(l - a) \\[2mm] \dfrac{M_x'}{q\,l^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \alpha\,(1 - \alpha) - \dfrac{V_{x-1}}{q\,l} \cdot \alpha^2 - \dfrac{V_x}{q\,l} \cdot \alpha\,(1 - \alpha) \\[2mm] M_x'' = \dfrac{q\,l}{2} \cdot a - \dfrac{q\,a^2}{2} - V_x \cdot \dfrac{l - a}{l} \cdot a - V_{x+1} \cdot \dfrac{a}{l} \cdot a \\[2mm] \dfrac{M_x''}{q\,l^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \alpha\,(1 - \alpha) - \dfrac{V_x}{q\,l} \cdot \alpha\,(1 - \alpha) - \dfrac{V_{x+1}}{q\,l} \cdot \alpha^2. \end{cases}$$

In den Feldern: Endfeld

$$(5)\ \begin{cases} Q = 0 = \dfrac{q\,l}{2} - q\,x - V_1 \cdot \dfrac{a}{l} \qquad \xi = \dfrac{x}{l} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{V_1}{q\,l} \cdot \alpha \\[2mm] M_e = \dfrac{1}{8} \cdot q\,(2\,x)^2 \qquad \dfrac{M_e}{q\,l^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \xi^2. \end{cases}$$

Mittelfelder

$$(6)\ \begin{cases} Q_{x-1,x} = 0 = \dfrac{q\,l}{2} - q\,x - V_{x-1} \cdot \dfrac{l - a}{l} + V_{x-1} - V_x \cdot \dfrac{a}{l} \\[2mm] \xi = \dfrac{x}{l} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{V_{x-1} - V_x}{q\,l} \cdot \alpha \\[2mm] M_{x-1,x} = \dfrac{1}{2} \cdot q\,x\,(l - x) - V_{x-1} \cdot \dfrac{a\,(l - a)}{l} \cdot \dfrac{l - x}{l - a} - V_x \cdot \dfrac{a\,(l - a)}{l} \cdot \dfrac{x}{l - a} \\[2mm] \dfrac{M_{x-1,x}}{q\,l^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \xi\,(1 - \xi) - \dfrac{V_{x-1}}{q\,l} \cdot \alpha\,(1 - \xi) - \dfrac{V_x}{q\,l} \cdot \alpha\,\xi. \end{cases}$$

Pfette mit 3 Feldern:

$$\alpha = 0{,}1 \quad \frac{V_1}{q\,l} = C\left[1 - \frac{0{,}5}{1 - 0{,}0382 + (0{,}1134 - 0{,}3368)(-0{,}5)}(-0{,}3368 + 0{,}1134)\right] = 1{,}1041\,C \quad (1{,}2323\,C)$$

$$\alpha = 0{,}2 \quad \frac{V_1}{q\,l} = C\left[1 - \frac{0{,}2857}{1 - 0{,}0762 + (0{,}1797 - 0{,}4239)(-0{,}7143)}(-0{,}4239 + 0{,}1797)\right] = 1{,}0636\,C \quad (1{,}2643\,C).$$

Pfette mit 4 Feldern:

$$\alpha = 0{,}1 \qquad\qquad \alpha = 0{,}2$$

$$\frac{V_1}{q\,l} = 1{,}2084\,C \quad (1{,}3702\,C) \qquad \frac{V_1}{q\,l} = 1{,}1842\,C \quad (1{,}4845\,C)$$

$$\frac{V_2}{q\,l} = 0{,}8739\,C \quad (0{,}7761\,C) \qquad \frac{V_2}{q\,l} = 0{,}8676\,C \quad (0{,}6518\,C).$$

Damit werden folgende speziellen Werte erhalten:

Pfette mit 3 Feldern:

$$\alpha = 0{,}1 \quad \frac{M_e}{q\,l^2} = +0{,}0783 \qquad \alpha = 0{,}2 \quad \frac{M_e}{q\,l^2} = +0{,}0752$$

$$\frac{M_1'}{q\,l^2} = -0{,}0487 \qquad \frac{M_1'}{q\,l^2} = -0{,}0097$$

$$\frac{M_1''}{q\,l^2} = -0{,}0592 \qquad \frac{M_1''}{q\,l^2} = -0{,}0322$$
$$\frac{M_{12}}{q\,l^2} = +0{,}0208 \qquad \frac{M_{12}}{q\,l^2} = +0{,}0128.$$

Pfette mit 4 Feldern:

$$\alpha = 0{,}1 \quad \frac{M_e}{q\,l^2} = +0{,}0747 \qquad \alpha = 0{,}2 \quad \frac{M_e}{q\,l^2} = +0{,}0704$$
$$\frac{M_1'}{q\,l^2} = -0{,}0576 \qquad \frac{M_1'}{q\,l^2} = -0{,}0199$$
$$\frac{M_1''}{q\,l^2} = -0{,}0658 \qquad \frac{M_1''}{q\,l^2} = -0{,}0382$$
$$\frac{M_{12}}{q\,l^2} = +0{,}0273 \qquad \frac{M_{12}}{q\,l^2} = +0{,}0173$$
$$\frac{M_2'}{q\,l^2} = -0{,}0406 \qquad \frac{M_2'}{q\,l^2} = -0{,}0182.$$

Pfette mit 5 Feldern:

$$\alpha = 0{,}1 \quad \frac{M_e}{q\,l^2} = +0{,}0759 \qquad \alpha = 0{,}2 \quad \frac{M_e}{q\,l^2} = +0{,}0728$$
$$\frac{M_1'}{q\,l^2} = -0{,}0543 \qquad \frac{M_1'}{q\,l^2} = -0{,}0147$$
$$\frac{M_1''}{q\,l^2} = -0{,}0634 \qquad \frac{M_1''}{q\,l^2} = -0{,}0351$$
$$\frac{M_{12}}{q\,l^2} = +0{,}0247 \qquad \frac{M_{12}}{q\,l^2} = +0{,}0149$$
$$\frac{M_2'}{q\,l^2} = -0{,}0476 \qquad \frac{M_2'}{q\,l^2} = -0{,}0253$$
$$\frac{M_2''}{q\,l^2} = -0{,}0456 \qquad \frac{M_2''}{q\,l^2} = -0{,}0220$$
$$\frac{M_{23}}{q\,l^2} = +0{,}0344 \qquad \frac{M_{23}}{q\,l^2} = +0{,}0230.$$

Pfette mit ∞ Feldern, Klammerwerte für $\varepsilon = 1$:

$$\alpha = 0{,}1 \qquad\qquad \alpha = 0{,}2$$
$$\frac{M_e}{q\,l^2} = +0{,}0756 \qquad \frac{M_e}{q\,l^2} = +0{,}0722 \quad (+0{,}0611)$$
$$\frac{M_1'}{q\,l^2} = -0{,}0550 \qquad \frac{M_1'}{q\,l^2} = -0{,}0161 \quad (-0{,}0401)$$
$$\frac{M_1''}{q\,l^2} = -0{,}0639 \qquad \frac{M_1''}{q\,l^2} = -0{,}0359 \quad (-0{,}0574)$$
$$\frac{M_{12}}{q\,l^2} = +0{,}0254 \qquad \frac{M_{12}}{q\,l^2} = +0{,}0156 \quad (+0{,}0089)$$
$$\frac{M_2'}{q\,l^2} = -0{,}0459 \qquad \frac{M_2'}{q\,l^2} = -0{,}0234 \quad (-0{,}0192)$$
$$\frac{M_2''}{q\,l^2} = -0{,}0444 \qquad \frac{M_2''}{q\,l^2} = -0{,}0210 \quad (-0{,}0119)$$
$$\frac{M_{23}}{q\,l^2} = +0{,}0326 \qquad \frac{M_{23}}{q\,l^2} = +0{,}0214 \quad (+0{,}0253)$$
$$\frac{M'}{q\,l^2} = \frac{M''}{q\,l^2} = -0{,}0493 \qquad \frac{M'}{q\,l^2} = \frac{M''}{q\,l^2} = -0{,}0255$$
$$\frac{M_m}{q\,l^2} = +0{,}0307 \qquad \frac{M_m}{q\,l^2} = +0{,}0195.$$

Die geringen Abweichungen gegenüber der Pfette mit 5 Feldern sowie die zunehmende Angleichung an ein mittleres Feld, das sich mit der Annahme $\varepsilon = \infty$ deckt, ist deutlich zu erkennen.

Ein Vergleich unserer aus dem Traglastverfahren abgeleiteten Bemessungswerte mit den tatsächlich auftretenden zeigt bei den V:

	Bemessungswert	Tatsächlich auftretender Größtwert	Verhältnis
$\alpha = 0{,}1$	$\frac{V}{q\,l} = 0{,}85 = 0{,}9011\,C$	$1{,}2084\,C$	1,3410
$\alpha = 0{,}2$	$0{,}5125 = 0{,}9719\,C$	$1{,}1842\,C$	1,2184

Da V für die Bemessung der Streben maßgebend ist, wurden diese im ungünstigsten Fall nur für 1/1,341 der tatsächlichen Stabkraft berechnet. Da die Bemessung auf Knickung zu erfolgen hat und die Verhältnisse bei den Streben so liegen, daß entweder eine Schlankheit $\lambda \approx 100$ vorliegt oder eine Ausnutzung wegen Anwendung des Mindestprofils nicht möglich ist, besteht folgender Sicherheitsgrad. Im ersten Fall beträgt die Knicksicherheit 3,5. Wir bemessen für S, sollten aber mit 1,341 S rechnen.

$$\frac{S_k}{S} = 3{,}50 \qquad \frac{S_k}{1{,}341\,S} = 2{,}61.$$

Im ungünstigsten Fall sinkt die Knicksicherheit auf 2,61, was ohne weiteres gebilligt werden kann. Im zweiten Fall wird durch die Steigerung der Stabkraft auf das 1,341 fache wahrscheinlich erst die Ausnutzung mit der zulässigen Spannung bewirkt; jedenfalls liegt die Knicksicherheit höher als im ersten Fall.

Der Vergleich der Bemessungsmomente mit den tatsächlich auftretenden ergibt:

		Bemessungswert	Tatsächlich auftretender Größtwert	Verhältnis
Endfeld	$\alpha = 0{,}1$	0,0861	0,0783	0,9094
	$\alpha = 0{,}2$	0,0790	0,0752	0,9519
Mittelfelder	$\alpha = 0{,}1$	0,0400	0,0658	1,6450
	$\alpha = 0{,}2$	0,0225	0,0382	1,6978

Während bei den Endfeldern die Bemessung für ein höheres als das tatsächlich auftretende Moment erfolgt, zeigen die Mittelfelder einen ganz bedeutenden Unterschied im ungünstigen Sinne. Dazu ist unsere Bemerkung von früher, daß ε im allgemeinen größer sein wird, als in unserer Rechnung angenommen, zu wiederholen. Eine Vergrößerung von ε bedeutet eine weitere Annäherung an $\varepsilon = \infty$, d. h. der günstige Einfluß des stärkeren Endfeldes, der in einer Abminderung des Pendelns der M um die durch $\varepsilon = \infty$ gegebene Mittellage besteht, wird sich vermehrt auswirken und den Unterschied zwischen Bemessungsmoment und tatsächlich auftretendem verkleinern. Aber selbst wenn der geschilderte günstige Einfluß nicht auftritt, ist die Überschreitung des Bemessungsmoments um 70 % keine erstmalige Erscheinung. Sie kommt nämlich bei dem gemäß DIN 1050 vorgeschriebenen Bemessungsverfahren für Durchlaufträger, das ja ebenfalls auf der Traglast beruht, auch vor. Der Vierfeldbalken hat ein größtes Stützenmoment von 0,1071 $q\,l^2$. Dieses liegt genau an der Grenze zwischen Endfeld und Mittelfeld. Da die Vorschrift über die Begrenzung der Querschnitte nichts sagt, kann der schwächere Querschnitt des Mittelfeldes dort beginnen. Dieser wird für

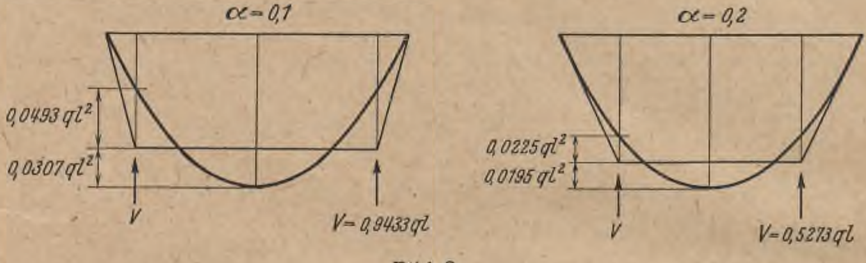


Bild 9.

0,0625 $q\,l^2$ bemessen. Der Quotient beträgt 1,714. Allerdings wird ein gewissenhafter Konstrukteur das stärkere Profil des Endfeldes über die Stütze verlängern; wenn aber die konstruktive Ausführung mit Zuglaschen und Paßplatten vorliegt, ist das gar nicht möglich. Das Beispiel soll nur zeigen, daß die bei der Pfette mit Kopfstreben unter allerungünstigsten Umständen vorliegenden Verhältnisse keineswegs ungewöhnlich sind, sondern bei vielen praktischen Ausführungen in derselben Größenordnung bestehen. Dieser beruhigende Hinweis ist aber gar nicht nötig. Bei der Bemessung nach dem Traglastverfahren wird eben die herkömmliche Ansicht der Einhaltung einer bestimmten zulässigen Spannung aufgegeben und auf Sicherheit gegen Erreichen der Traglast gerechnet. Diese Sicherheit ist bei vollwandigen, nach dem Traglastverfahren berechneten Konstruktionen größer als bei jedem Fachwerk.

Nun ist noch zu überlegen, ob das Zusammenwirken von Biegungsträgern und gedrückten Stäben das Erreichen der Traglast zuläßt. Wenn die Belastungssteigerung näherungsweise an einem Mittelfeld verfolgt wird, so wird bei etwa $2\,q$ bei den Strebenansatzpunkten das Fließgelenk erreicht. Die noch mögliche Steigerung bis zur Herstellung des Fließgelenks in Feldmitte errechnet sich wie folgt (Bild 9):

$$\alpha = 0{,}1 \qquad 0{,}0493\,(2\,q)\,l^2 = 0{,}0307\,(2\,q)\,l^2 + \frac{1}{8}\cdot \Delta q\,(l - 2\,a)^2$$
$$\Delta q = 0{,}465\,q$$
$$V_{pl} = 0{,}9433\,(2\,q)\,l + \frac{1}{2}\cdot 0{,}465\,q\,(l - a)$$
$$\frac{V_{pl}}{q\,l} = 2{,}1959$$
$$\text{Bemessungswert} \quad \frac{V}{q\,l} = 0{,}85 \qquad \frac{V_{pl}}{V} = 2{,}58$$

$$\alpha = 0{,}2 \qquad 0{,}0225\,(2\,q)\,l^2 = 0{,}0195\,(2\,q)\,l^2 + \frac{1}{8}\cdot \Delta q\,(l - 2\,a)^2$$
$$\Delta q = 0{,}133\,q$$
$$V_{pl} = 0{,}5273\,(2\,q)\,l + \frac{1}{2}\cdot 0{,}133\,q\,(l - a)$$
$$\frac{V_{pl}}{q\,l} = 1{,}1078$$
$$\text{Bemessungswert} \quad \frac{V}{q\,l} = 0{,}5125 \qquad \frac{V_{pl}}{V} = 2{,}16.$$

Mit dem Erreichen der Traglast ist also die Strebenkraft auf das 2,58 fache bzw. das 2,16 fache ihres Bemessungswerts gestiegen. Die Streben wurden aber mit einer 3,5 fachen Knicksicherheit berechnet; sie knicken daher nicht aus, sondern haben ungünstigstenfalls noch eine 3,5/2,58 = 1,36 fache Sicherheit. Das Erreichen der Traglast ist demnach gewährleistet.

Wir haben somit an einer Reihe von speziellen Überlegungen und Schlußfolgerungen die Zulässigkeit des neuen Bemessungsverfahrens — allerdings nur dank der bei uns vorgeschriebenen hohen Knick-

sicherheit — nachgewiesen. Eine gleichartige allgemeine Untersuchung, von deren Wiedergabe wegen ihrer Weitläufigkeit Abstand genommen wurde, liefert das gleiche Ergebnis.

Schließlich ist noch die Pfette mit 2 Feldern zu berechnen (Bild 10):

$$M_1' = \frac{q}{2}\cdot a(l-a) - V_1\cdot\frac{a}{l}(l-a)$$

$$\frac{M_1'}{q\,l^2} = \frac{1}{2}\cdot\alpha(1-\alpha) - \frac{V_1}{q\,l}\cdot\alpha(1-\alpha)$$

$$M_e = \frac{q}{2}\cdot x(l-x) - V_1\cdot\frac{a}{l}\cdot x \qquad \xi = \frac{x}{l}$$

$$\frac{M_e}{q\,l^2} = \frac{1}{2}\cdot\xi(1-\xi) - \frac{V_1}{q\,l}\cdot\alpha\,\xi.$$

Aus der Gleichsetzung von Feldmoment und Moment über dem Strebenansatzpunkt sowie aus der Maximumsbedingung für ersteres folgen die nachstehenden Entwicklungen und die Bemessungswerte:

$$0 = \frac{q\,l}{2} - q\,x - V_1\cdot\frac{a}{l} \qquad \xi = \frac{1}{2} - \frac{V_1}{q\,l}\cdot\alpha$$

$$\xi^2 + 2(1-\alpha)\,\xi - (1-\alpha)^2 = 0 \qquad \xi = (1-\alpha)\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$\frac{V_1}{q\,l} = \frac{1-2\,\xi}{\alpha} = \frac{1-0{,}8284\,(1-\alpha)}{2\,\alpha}$$

$$-\frac{M_1'}{q\,l^2} = \frac{M_e}{q\,l^2} = \frac{1}{2}\cdot\xi^2 = 0{,}0858\,(1-\alpha)^2.$$

Bemessungswerte:

$$\alpha = 0{,}1 \quad \frac{V_1}{q\,l} = 1{,}2722 \qquad \frac{M_e}{q\,l^2} = 0{,}0695$$

$$\alpha = 0{,}2 \quad \frac{V_1}{q\,l} = 0{,}8432 \qquad \frac{M_e}{q\,l^2} = 0{,}0549.$$

Tatsächlich auftretende Werte nach Gl. (2), (4) u. (5):

$$\alpha = 0{,}1 \quad \frac{V_1}{q\,l} = 1{,}5140, \quad \frac{M_1'}{q\,l^2} = -0{,}0913, \quad \frac{M_e}{q\,l^2} = +0{,}0608$$

$$\alpha = 0{,}2 \quad \frac{V_1}{q\,l} = 0{,}9063, \quad \frac{M_1'}{q\,l^2} = -0{,}0650, \quad \frac{M_e}{q\,l^2} = +0{,}0508.$$

Die Unterschiede liegen durchweg unter den bereits besprochenen der mehrfeldrigen Pfetten.

Das neue Bemessungsverfahren erfordert nur die Bestimmung zweier Trägerquerschnitte, einen für das Endfeld und einen für alle Mittelfelder, sowie eines Strebenquerschnitts. In der nachfolgenden Tafel I sind für solche Verhältnisse $\alpha = a/l$, die bei praktischen Ausführungen in Betracht kommen, die erforderlichen Rechnungswerte zusammengestellt. Daß das neue Bemessungsverfahren auch zu wirtschaftlicheren Abmessungen führt, ist nach der vorgebrachten Ableitung eigentlich selbstverständlich. An einem Beispiel am Schluß der Abhandlung wird diese Tatsache auch ziffernmäßig belegt.

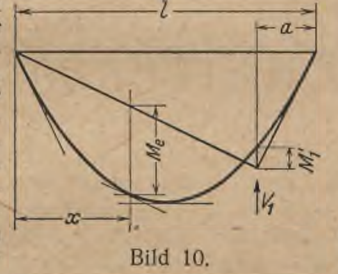


Bild 10.

Bei der Bemessung ist natürlich auch Rücksicht auf die Durchbiegung zu nehmen, die für Pfetten das Maß $l/_{300}$ nicht übersteigen darf. Für die Bestimmung der Durchbiegung ist ausschließlich das elastische Verhalten maßgebend. Es müssen daher die tatsächlich auftretenden und nicht die Bemessungsmomente in Rechnung gestellt werden.

Für die Mittelfelder kann in sehr guter Annäherung der Momentenverlauf in einem von den Enden nicht mehr beeinflußten mittleren Feld zugrunde gelegt werden (Bild 11):

$$\delta_m = \frac{5\,q\,l^4}{384\,EJ_m} - \left(\frac{C\,q\,l\,a\,l^2}{8} - \frac{1}{6}\cdot C\,q\,l\,a\cdot\frac{a}{2}\cdot a\cdot 2\right)\frac{1}{EJ_m} \leqq \frac{l}{300}$$

$$J_m \geqq \frac{300\,q\,l^3}{E}\left[\frac{5}{384} - \frac{C\,\alpha}{8}\left(1 - \frac{4}{3}\cdot\alpha^2\right)\right].$$

Für das Endfeld müssen wir uns mit einer Abschätzung begnügen. Wir bestimmen die Durchbiegung in der Mitte des strebenfreien Teiles (Bild 12):

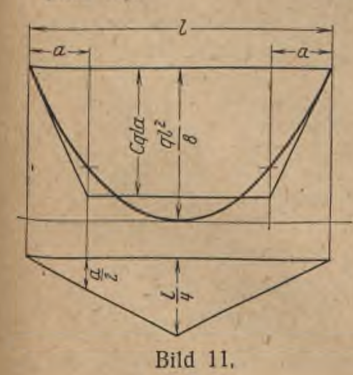


Bild 11.

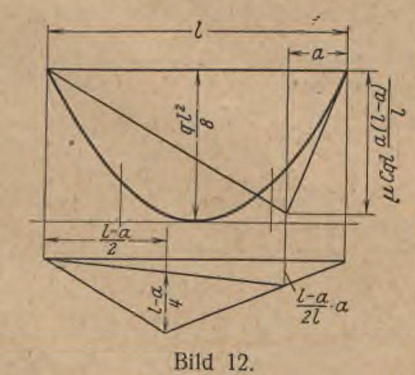


Bild 12.

$$\delta_e = \frac{q\,l^4}{24\,EJ_e}\left[\frac{l-a}{2\,l} - 2\left(\frac{l-a}{2\,l}\right)^3 + \left(\frac{l-a}{2\,l}\right)^4\right]$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\mu\,C\,q\,l\cdot\frac{a(l-a)}{l}\cdot\frac{l-a}{2\,l}\cdot a\,l\cdot\frac{1}{EJ_e}$$

$$-\frac{1}{6}\cdot\mu\,C\,q\,l\cdot\frac{a(l-a)}{l}\cdot\frac{l-a}{4}\cdot\frac{3}{2}(l-a)\frac{1}{EJ_e} \leqq \frac{l}{300}$$

$$J_e \geqq \frac{300\,q\,l^3}{E}\left\{\frac{1}{384}\left[8(1-\alpha) - 4(1-\alpha)^3 + (1-\alpha)^4\right] - \frac{\mu\,C\,\alpha}{16}(1-\alpha)^2\left(1 + \frac{5}{3}\cdot\alpha\right)\right\}.$$

Das Trägheitsmoment hängt von dem Faktor μ ab, der eine Funktion des Trägheitsmomentenverhältnisses ε, der Strebenteilung α und der Felderzahl ist. Da man in der Regel das Endfeld spannungsmäßig nicht ausnutzen kann, weil die Durchbiegung maßgebend ist, ist μ immer von dem in jedem besonderen Falle vorliegenden ε abhängig. Wenn in der tiefer stehenden Tafel II mit jenem ε gerechnet wurde, das sich auf Grund der spannungsmäßigen Ausnutzung ergibt, so haben wir es, wie erwähnt, nur mit einem Schätzwert für das Trägheitsmoment zu tun. Da aber μ mit wachsendem ε von einem Wert größer als 1 gegen 1 konvergiert und mit $\varepsilon = \infty$ genau 1 wird, hat ein zunehmendes Trägheitsmoment eine Verkleinerung des Subtrahenden und mithin eine Vergrößerung des Klammerausdrucks zur Folge. Die wachsende Tendenz beiderseits des Gleichheitszeichens ist zu erkennen. Bei den nicht erheblichen Schwankungen von ε ist die praktische Verwendbarkeit der Tafel gegeben.

Wird q in t/m, l in m und E in t/m² eingesetzt und will man J in cm⁴ bekommen, so muß mit 10^8 multipliziert werden. Dadurch wird $300/E\cdot 10^8 = 1429$. Wird der 1429fache Ausdruck in der eckigen bzw. der geschlungenen Klammer mit $f(\alpha)$ bezeichnet, so müssen die Trägheitsmomente der Bedingung genügen:

$$J \geqq f(\alpha)\,q\,l^3.$$

Die Zahlenwerte von $f(\alpha)$ sind in Tafel II zusammengestellt.

Bei der konstruktiven Durchbildung der Pfette mit Kopfstreben ist für die Aufnahme des negativen Auflagerdrucks Z und des Zuges an der Stoßstelle H Vorsorge zu treffen. Diese ergeben sich mit (Bild 13):

Bild 13.

$$H = V\cdot\operatorname{cotg}\varphi \qquad \frac{H}{q\,l} = \frac{V}{q\,l}\cdot\operatorname{cotg}\varphi$$

$$Z = \frac{q\,l}{2} - V \qquad \frac{Z}{q\,l} = \frac{1}{2} - \frac{V}{q\,l}.$$

Die Strebe ist selbstverständlich für

$$S = \frac{V}{\sin\varphi} \qquad \frac{S}{q\,l} = \frac{V}{q\,l}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}$$

zu bemessen.

Tafel I. Bemessungswerte.

$\alpha = \frac{a}{l}$	Felderzahl $n = 2$		Felderzahl $n > 2$		
	$\frac{V}{q\,l}$	$\frac{M}{q\,l^2}$	$\frac{V}{q\,l}$	$\frac{M}{q\,l^2}$ Endfeld	$\frac{M}{q\,l^2}$ Mittelfelder
0,10	1,2722	0,0695	0,8500	0,0861	0,0400
0,12	1,1292	0,0664	0,7408	0,0845	0,0361
0,14	1,0271	0,0635	0,6614	0,0830	0,0324
0,16	0,9505	0,0605	0,6006	0,0816	0,0289
0,18	0,8909	0,0577	0,5522	0,0802	0,0256
0,20	0,8432	0,0549	0,5125	0,0790	0,0225

Tafel II. Beiwerte $f(\alpha)$.

$J = f(\alpha)\,q\,l^3$, J in cm⁴, q in t/m, l in m.

$\alpha = \frac{a}{l}$	Endfeld bei einer Felderzahl $n =$ 2	3	4	5	>5	Mittelfelder
0,10	5,61	9,60	8,76	9,08	9,00	1,98
0,12	5,25	9,51	8,65	9,00	8,92	1,70
0,14	4,91	9,42	8,53	8,92	8,83	1,43
0,16	4,56	9,35	8,42	8,84	8,74	1,19
0,18	4,23	9,25	8,31	8,77	8,66	0,97
0,20	3,91	9,17	8,20	8,70	8,57	0,77

Beispiel: Pfette mit 10 Feldern, $l = 10$ m, $a = 2$ m, $q = 0{,}5$ t/m.

1. Als Pfette mit Kopfstreben nach dem neuen Bemessungsverfahren gerechnet: $\alpha = a/l = 2/10 = 0{,}2$, $\varphi = 45°$, $\sigma_{zul} = 1400$ kg/cm².

Strebe $\frac{V}{q\,l} = 0{,}5125 \qquad V = 0{,}5125\cdot 0{,}5\cdot 10 = 2{,}56$ t

$$S = \frac{V}{\sin\varphi} = \frac{2{,}56}{0{,}707} = 3{,}62\ \text{t} \qquad s_k = 250\ \text{cm} \qquad ⅂⌈\ 60\cdot 60\cdot 6$$

Endfeld $\frac{M}{q\,l^2} = 0{,}0790 \qquad M = 0{,}0790\cdot 0{,}5\cdot 10^2 = 3{,}95$ tm

I 24 $\;J = 4250$ cm⁴ $\qquad$ erf $J = 8{,}57\cdot 0{,}5\cdot 10^3 = 4280$ cm⁴

Mittelfelder $\frac{M}{q\,l^2} = 0{,}0225 \qquad M = 0{,}0225 \cdot 0{,}5 \cdot 10^2 = 1{,}13$ tm

I 14 $\quad J = 573$ cm^4 $\quad$ erf $J = 0{,}77 \cdot 0{,}5 \cdot 10^3 = 385$ cm^4.

2. Als Pfette mit Kopfstreben nach der Elastizitätstheorie, und zwar nach der früher üblichen Methode gerechnet, wobei konstantes Trägheitsmoment für den ganzen Strang angenommen wurde. Dann muß sich das stärkere Endprofil auch über das benachbarte Mittelfeld erstrecken.

Strebe $S_1 \quad V_1 = 1{,}4239 \cdot 0{,}5273 \cdot 0{,}5 \cdot 10 = 3{,}76$ t

$S_1 = \frac{3{,}76}{0{,}707} = 5{,}32$ t $\qquad$ ⅂⌈ 65 · 65 · 7

Übrige Streben $S_m \quad V_3 = 1{,}0762 \cdot 0{,}5273 \cdot 0{,}5 \cdot 10 = 2{,}84$ t

$S_m = \frac{2{,}84}{0{,}707} = 4{,}02$ t $\qquad$ ⅂⌈ 60 · 60 · 6

Endfeld und erstes Mittelfeld $M_e = 0{,}0611 \cdot 0{,}5 \cdot 10^2 = 3{,}06$ tm

I 24 $\quad J = 4250$ cm^4

Übrige Mittelfelder $M' = 0{,}0255 \cdot 0{,}5 \cdot 10^2 = 1{,}28$ tm

I 16 $\quad J = 935$ cm^4

3. Als Durchlaufträger gerechnet:

Endfeld $\quad M = \frac{1}{11} \cdot 0{,}5 \cdot 10^2 = 4{,}55$ tm

I 26 $\quad J = 5740$ cm^4 $\quad$ erf $J \approx 4600$ m^4

Mittelfelder $\quad M = \frac{1}{16} \cdot 0{,}5 \cdot 10^2 = 3{,}13$ tm

I 22 $\quad J = 3060$ cm^4 $\quad$ erf $J \approx 2000$ cm^4.

Gewicht des ganzen Pfettenstranges bei

Ausführung 1: 2500 kg oder 25 kg/m
Ausführung 2: 3200 kg oder 32 kg/m
Ausführung 3: 3400 kg oder 34 kg/m.

Die wirtschaftliche Überlegenheit des neuen Bemessungsverfahrens ist hiermit eindeutig nachgewiesen; erfordern doch die beiden anderen Ausführungen um 28 % bzw. um 36 % mehr Stahlgewicht.

Zur Berechnung des Trägerrostes.[1])

Von **Kurt Klöppel**, Darmstadt.

Die genaue statische Berechnung des Trägerrostes ist kein Problem[2]). Nur aus praktischen Gründen der Arbeits- und Zeitersparnis hat man neuerdings für den vielfach statisch unbestimmten Rost nach einfacheren Näherungsverfahren gesucht, und zwar bisher nur in der Richtung, das flächenartige Tragwerk auf ein lineares System zurückzuführen. Mit anderen Worten: Man versuchte, das Einflußvolumen einer statischen Größe durch die Einflußfläche zu ersetzen, um die zeitraubende Ermittlung und besonders die umständliche Auswertung eines Einflußvolumens[3]) zur Ermittlung der Größtwerte der Schnittgrößen zu umgehen. Zu diesem Zweck wurde die Verteilung einer Last P auf die Hauptträger (also die Querverteilung der Last) verfolgt und die sogenannte Querverteilungszahl eingeführt. Im folgenden wird zunächst die „Querverteilung der Last" erläutert und anschließend werden die Näherungsverfahren von Dr. Leonhardt und Dr. Geiger besprochen.

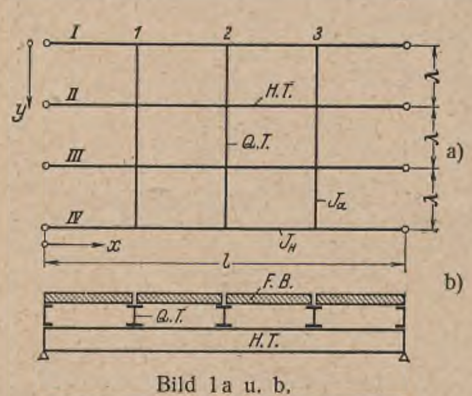


Bild 1a u. b.

Der Trägerrost nach Bild 1a möge zunächst nur einen Q.T. 1 z. B. an der Stelle $x = \frac{l}{4}$ aufweisen. Wirkt nun eine lotrechte Last P_1 auf dem Q.T., so übt dieser die Auflagerkräfte $A_{1\,I}, \ldots A_{1\,IV}$ auf die vier H.T. aus, und zwar ist $\Sigma A = P_1$. Die Last P_1 ist also in der Querrichtung des Tragwerkes verteilt. Man nennt diese Wirkung die Querverteilung, und die Auflagerkräfte $A_I, \ldots A_{IV}$ für den Fall $P_1 = 1$ werden als Querverteilungszahlen q bezeichnet. Die Querverteilungszahl q ist einerseits abhängig von l, λ, J_Q, J_H, sowie von der Anzahl (n) und Lagerung (ε) der H.T. Die Funktion dieser sämtlichen geometrischen Systemgrößen wird kurz „Roststeifigkeit" k genannt. Andererseits hängt q auch von der Lage x des Q.T. und der Lage y der Last P_1 ab. Die Querverteilungszahl q ist also schon beim Rost mit nur einem Q.T. eine Funktion der Roststeifigkeit sowie der Lage des Q.T. und der Last. Es ist mithin:

$$(1) \quad \begin{cases} q = f\,(k,\,x,\,y) \\ A = q\,P_1 \quad \text{und} \end{cases}$$

$$(2) \quad k = f\,(l,\,\lambda,\,J_Q,\,J_H,\,n,\,\varepsilon).$$

Fügt man dem Rost einen zweiten Q.T. 2 hinzu, so werden die Auflagerkräfte $A_{1\,I} \ldots A_{1\,IV}$ sich ändern und unter dem Q.T. 2 die Auflagerkräfte $A_{2\,I} \ldots A_{2\,IV}$ wachgerufen; desgleichen bei Hinzufügung eines dritten Q.T. 3. Also die belasteten und unbelasteten Q.T. beeinflussen einander. Dabei ist es einleuchtend, daß Q.T. 3 einen kleineren Einfluß auf Q.T. 1 ausübt als Q.T. 2 und umgekehrt. Also der Einfluß ist von der Lage x des Q.T. abhängig. Weiter ist es klar, daß dieser gegenseitige Einfluß auch durch l, λ, J_q, J_h, n und ε, also die Roststeifigkeit k, bestimmt wird. Belasten wir nun den Q.T. 3 auch mit einer Last P_3, so ändern sich natürlich die Auflagerkräfte $A_{1\,I} \ldots A_{1\,IV}$ sowie $A_{2\,I} \ldots A_{2\,IV}$ wiederum. Folglich hat auch die Belastung P eines Q.T. einen Einfluß auf die Auflagerkräfte der anderen Q.T.

Bezeichnen $A_{1\,I}$ und $A_{1\,II}$ die Auflagerkräfte des Q.T. 1 auf H.T. I und II für P_1 im Punkt y auf dem Q.T. 1 bei Vorhandensein nur eines Q.T. 1, $\Delta A_{1\,I}$ und $\Delta A_{1\,II}$ die Änderungen von A durch die Hinzufügung der Q T. 2 und 3 und $\Delta A'_{1\,I}$ und $\Delta A'_{1\,II}$ die Änderungen von A infolge der Belastungen auf den Q.T. 2 und 3, so können wir gemäß den vorangehenden Darlegungen schreiben:

$$(3\text{a}) \quad A_{1\,I} = f_I\,(k,\,x_1,\,P_1) = P_1\,q_{1\,I}$$

$$(4\text{a}) \quad A_{1\,II} = f_{II}\,(k,\,x_1,\,P_1) = P_1\,q_{1\,II}$$

$$(3\text{b}) \quad \Delta A_{1\,I} = \varphi_I \left[k,\,x_1,\,P_1,\,\sum_{i=2}^{i=3} \psi_i\,(x_i,\,J_{Q\,i})\right] = P_i\,\Delta q_{1\,I}$$

$$(3\text{c}) \quad \Delta A'_{1\,I} = \varphi'_I \left[k,\,x_1,\,\sum_{i=2}^{i=3} \psi_i\,(x_i,\,J_{Q\,i},\,P_i)\right]$$

und entsprechend für $\Delta A_{1\,II}$ und $\Delta A'_{1\,II}$. Die gesuchten Auflagerkräfte lauten:

$$(3) \quad A'_{1\,I} = A_{1\,I} + \Delta A_{1\,I} + \Delta A'_{1\,I}$$

$$(4) \quad A'_{1\,II} = A_{1\,II} + \Delta A_{1\,II} + \Delta A'_{1\,II}.$$

Beim Rost mit sehr viel Q.T. erhalten wir mithin den allgemeinen Ausdruck:

$$(5) \quad \begin{cases} A'_{mn} = A_{mn} + \Delta A_{mn} + \Delta A'_{mn} \\ A_{mn} = f_n\,(k,\,x_m,\,P_m) = P_m\,q_{mn} \\ \Delta A_{mn} = \varphi_n\,[k,\,x_m,\,P_m,\,\Sigma\,\psi_i\,(x_i,\,J_{Q\,i})] = P_m\,\Delta q_{mn} \\ \Delta A'_{mn} = \varphi'_n\,[k,\,x_m,\,\Sigma\,\psi_i\,(x_i,\,J_{Q\,i},\,P_i)]. \end{cases}$$

---

[1]) Zu dem Aufsatz, den Herr Dr. Geiger unter der Überschrift „Die Kopplung oder gegenseitige Beeinflussung lastverteilender Querscheiben" in den Heften 3/4 und 5/7, 1940, dieser Zeitschrift veröffentlicht hat, ging eine Zuschrift von Herrn Dr. Leonhardt ein. Der Meinungsaustausch, den die Schriftleitung daraufhin einleitete, war weder dem Inhalt noch der Form nach für eine Veröffentlichung geeignet. Herr Dr. Leonhardt hielt zwecks Verhütung unrichtiger Trägerrostberechnungen eine Stellungnahme von dritter Seite für unerläßlich. Nur auf dringenden Wunsch von Herrn Dr. Leonhardt hat sich der Verfasser in seiner Eigenschaft als Schriftleiter dieser Aufgabe unterzogen. Die Stellungnahme, die den beiden vorgenannten Herren schon vor längerer Zeit zur Kenntnisnahme zuging, bezieht sich lediglich auf diejenigen Fragen der Trägerrostberechnung, die Gegenstand des Meinungsaustausches sind, dem sowohl das Geigersche als auch das Leonhardtsche Berechnungsverfahren zugrunde liegt. Die Verzögerung der Veröffentlichung dieser Stellungnahme erklärt sich aus zeitbedingten Gründen, die auch die gewählte Kurzfassung der Ausführungen und die enzyklopädische Behandlung weiterer Zuschriften von Dr. Hoffmann, Köln, und Dr. Faltus, Pilsen, rechtfertigen.

[2]) Man vergleiche etwa Beyer, Statik im Eisenbetonbau, Bd. II, S. 624, oder Grüning, Statik des ebenen Tragwerkes, S. 614. — Bei Übungen im Ingenieurlaboratorium der T. H. Darmstadt hat sich bei der Berechnung vielfach statisch unbestimmter Trägerroste die Einführung von symmetrischen und antimetrischen Gruppenlasten der statisch überzähligen Größen als sehr zweckmäßig erwiesen.

[3]) Wegen der Auswertung von Einflußvolumen sei auf Pucher, Die Momenteneinflußfelder rechteckiger Platten, Heft 90 des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton, Berlin 1938, Wilh. Ernst & Sohn, verwiesen.

Darin sind m und n die Numerierung der Q.T. und der H.T., und die Summe $\Sigma \psi_i(x_i, J_{Qi}, P_i)$ erstreckt sich über alle Q.T. außer dem Q.T. m.

Hat man für einen Lastzustand die Auflagerkräfte A'_{mn} der Q.T. auf einen H.T., z. B. H.T. I, ermittelt, so kann man den H.T. als einen vom Rost losgelösten Einzelträger mit den Belastungen $A'_{1\,\mathrm{I}}, \ldots A'_{n\,\mathrm{I}}$ berechnen.

In den vorangehenden Ausführungen haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß die Lasten P nur auf die Q.T. wirken, also mittelbar den H.T. angreifen. Dies entspricht z. B. dem Fall nach Bild 1b, wo an die Lasten von der Fahrbahn auf die Q.T. und dann auf die H.T. übertragen werden. Diesen Fall wollen wir Fall 1 (mittelbare Belastung der H.T.) und im Gegensatz hierzu den Lastzustand, wo der H.T. auch unmittelbar belastet wird, als Fall 2 bezeichnen, bei dem in der Praxis meist die Obergurte von H.T. und Q.T. bündig liegen. Der Fall 1 ist also nur ein Sonderfall des Falles 2. Hierauf wird später noch eingegangen.

An Hand der für den Fall 1 abgeleiteten Gl. (5) können wir schon erörtern, ob es überhaupt möglich ist, das Kräftespiel eines Trägerrostes mit mehreren Q.T. mit Hilfe der sogenannten „Querverteilungszahlen" zu erfassen. Die Antwort lautet nein. Denn gemäß der Definition der Querverteilungszahl muß sich eine Zahl q'_{mn} so angeben lassen, daß die Beziehung

$$A'_{mn} = P_m\, q'_{mn} \tag{6}$$

besteht. Das ist aber unmöglich; denn bei $P_m = 0$ ist nach obiger Gleichung $A'_{mn} = 0$ und dagegen nach Gl. (5)

$$A_{mn} = 0 + 0 + \Delta A'_{mn} = \varphi'_n .$$

Die Funktion φ'_n stellt die Auflagerkraft im Punkt $m\,n$ infolge der Belastungen auf anderen Q.T. dar. Sie ist unabhängig von P_m und braucht nicht null zu sein. Hieraus erkennt man, daß beim Rost mit mehr als einem Q.T. die sogenannte Querverteilungszahl keinen statisch einwandfreien Sinn mehr hat. Wenn man unbedingt noch von der Querverteilungszahl sprechen will, so läßt sie sich nur für einen bestimmten Lastzustand, d. h. für einen bestimmten Wert von φ'_n angeben, und zwar gemäß der Definition zu:

$$q'_{mn} = q_{mn} + \Delta q_{mn} + \frac{\varphi'_n}{P_m}. \tag{7}$$

Diese klaren Feststellungen sind in keiner der in Rede stehenden Veröffentlichungen enthalten, woraus sich zu einem erheblichen Teil die Ergebnislosigkeit des Meinungsaustausches beider Verfasser erklärt. Die Vernachlässigung von φ'_n ist gleichbedeutend mit der grundsätzlich unrichtigen Auffassung, q'_{mn} wäre gleich $q_{mn} + \Delta q_{mn}$ und stelle eine für beliebige Lastzustände allgemeingültige Querverteilungszahl dar.

Der Einfluß von φ'_n wurde bisher nicht untersucht, so daß die Frage noch offen bleibt, ob die Vernachlässigung von φ'_n praktisch, d. h. für die Ermittlung der Grenzwerte von M und Q der H.T. zulässig ist. Der Modellversuch kann hierüber nur dann entscheiden, wenn er auf theoretisch einwandfreier Grundlage durchgeführt ist. Hierzu wird anschließend Stellung genommen.

Es soll nun untersucht werden, welche Einwände gegen die Ermittlung der nur für den Fall $\varphi'_n = 0$ gültigen Querverteilungszahl $q''_{mn} = q_{mn} + \Delta q_{mn}$ (d. i. die Auflagerkraft im Punkt $m\,n$, wenn lediglich eine Last $P = 1$ auf dem Q.T. m angreift, während alle anderen Q.T. keine äußere Last aufweisen) noch erhoben werden müssen.

Dr. Leonhardt will q''_{mn} unmittelbar am Modell messen. Er betrachtet die Biegelinie des Q.T. m infolge einer Einzellast auf diesem Q.T. im Punkt $m\,n$ bei Gleichheit der Trägheitsmomente aller H.T. verhältnisgleich der Querverteilungslinie q''_{mn}. Dies ist aber lediglich bei einem Trägerrost mit nur einem Q.T., d. h. für q_{mn} streng richtig, andernfalls — wie Dr. Leonhardt selbst betont — nur eine Näherung. Auf die Zuschrift[4]) von Dr. Faltus hat Dr. Leonhardt den Einfluß der Abweichung von q''_{mn} auf das Biegemoment bei einem Trägerrost mit 3 H.T. und 3 Q.T. angegeben. Nach seiner Angabe beträgt der Fehler des Biegemoments im einzelnen Fall bis zu 12 %. Da also die am Modell gemessenen Querverteilungslinien q''_{mn} beim Trägerrost mit mehr als einem Q.T. von den genauen Linien erheblich abweichen können, kann die Gegenüberstellung der gemessenen q''_{mn}-Linien und der q_{mn}-Linie keinen wissenschaftlichen Vergleichswert beanspruchen. Auch der Vergleich der Durchbiegungslinien der einzelnen Q.T. im Bild 30 der in der „Bautechnik"[5]) erschienenen Arbeit von Dr. Leonhardt ist insofern anfechtbar, als die in den Knotenverbindungen auftretenden Kräfte bei Trägerrosten mit mehr als einem Q.T. nicht den gemessenen Durchbiegungen verhältnisgleich sind.

Dr. Leonhardt folgt noch dem Gedanken von Dr. Faltus, die gegenseitige Beeinflussung mehrerer Q.T. und die Änderung der Querverteilung gegenüber dem Fall mit nur einem Q.T. durch Einführung eines „ideellen Q.T." mit $J_{Q\,\mathrm{ideell}} = J_Q\, i$ zu erfassen[6]). Man muß sich zunächst darüber klar sein, daß auch dieser Weg nur eine Näherung darstellen kann. Denn der i-Wert ändert sich einerseits mit der Roststeifigkeit, andererseits kann man mit dem ideellen Q.T. auch nicht alle Querverteilungszahlen $q''_{m\,\mathrm{I}}, q''_{m\,\mathrm{II}}, \ldots q''_{mn}$ unter dem Q.T. m genau ermitteln, d. h. man braucht schon verschiedene i-Werte, um z. B. die Querverteilungszahl eines Randträgers I $q''_{m\,\mathrm{I}}$ und diejenige eines Mittelträgers III $q''_{m\,\mathrm{III}}$ genau zu berechnen. Dr. Leonhardt hat q_{mn} und q''_{mn} des Trägerrostes mit einem und mehreren Q.T. am Modell gemessen (aus der Durchbiegung des Q.T.) und durch Vergleich dieser Zahlen i-Werte ermittelt. Setzen wir voraus, man könne mit i-Werten exakt arbeiten, so sind doch die von Dr. Leonhardt durch Modellmessungen ermittelten i-Werte nicht richtig; denn von den aus Durchbiegungsmessungen am Q.T. ermittelten Querverteilungszahlen ist q_{mn} streng richtig und q''_{mn} fehlerhaft, wie bereits erwähnt wurde. Darum ist der durch Vergleich eines richtigen Wertes q_{mn} mit einem fehlerhaften q''_{mn} errechnete i-Wert grundsätzlich anfechtbar. Der Gegenüberstellung dieser i-Werte mit denjenigen von Dr. Faltus kann deshalb keine Bedeutung beigemessen werden. Aus dem gleichen Grunde braucht auch das Bild 20 (die Veränderlichkeit der i-Werte usw.) in seiner Broschüre[7]) kein zutreffendes Bild zu geben. Dr. Leonhardt arbeitet ferner bei Trägerrosten mit mehreren Q.T. nur mit einer mittleren Querverteilungszahl, d. h. q'' bleibt unabhängig von x (Bild 1), und gibt[8]) die Änderung der Querverteilung vom ersten Q.T. zum zweiten Q.T. eines Trägerrostes mit 3 H.T. und 5 Q.T. zu 9 % an. Da seine am Modell gemessenen q''-Werte keine richtigen sind, so kann seine Angabe natürlich auch nicht stichhaltig sein. Infolgedessen bleibt die Frage, ob man mit ausreichender Genauigkeit über die ganze Länge des H.T. mit den Querverteilungszahlen eines mittleren Q.T. arbeiten darf, noch offen.

Zum Grundsätzlichen muß noch bemerkt werden, daß die Aussage (Bautechn. 1938, S. 542; Broschüre, S. 26): „Bei Trägerrost mit mehr als einem Q.T. ist unter der Einzellast P über einem Q.T. die Summe der inneren Knotenübertragungskräfte X an diesem Q.T. allein nicht mehr gleich P, weil auch an dem anderen Q.T. kleine Knotenkräfte wirken" nicht richtig sein kann, denn der Q.T. ist nichts anderes als ein elastisch gestützter Träger, und die Summe seiner Auflagerkräfte X muß aus der Bedingung $\Sigma V = 0$ gleich der äußeren Belastung P sein.

Dr. Geiger verwendet sogenannte μ-Kurven und glaubt, damit die gegenseitige Beeinflussung der Q.T. in ihrer Auswirkung auf die Querverteilungszahlen in einfacher Weise berücksichtigen zu können. Die Durchbiegung eines Balkens am jeweiligen Angriffspunkt der Wanderlast P läßt sich bekanntlich in der Form

$$\delta_{xx} = \mu_x \cdot \frac{P\,l^3}{E\,J}$$

angeben. Die Kurve $\mu_x = f(x)$ nennt Dr. Geiger μ-Kurve. Auch er folgt dem Gedanken von Dr. Faltus, die gegenseitige Beeinflussung der Q.T. durch die Einführung eines ideellen Q.T. mit $J'_Q = i\, J_Q$ zu erfassen. Hierzu gibt der Verfasser folgende Formeln[9]) an:

$$i = \frac{\mu_{m\,\mathrm{ideell}}}{\mu_m}$$

$$\mu_{m\,\mathrm{ideell}} = \mu_{mn} + \sum_1^n \mu_{mr} \tag{1}$$

$$\mu_{mr} = \mu_{rr} \cdot \frac{b_m}{b_r} \tag{2}$$

$$\mu_{m\,\mathrm{ideell}} = \sum_1^n \mu_{mr} \tag{1a}$$

$$\mu_{mr} = \frac{1}{3} \cdot \zeta_m^2\, \zeta_r^2 . \tag{2a}$$

Für diese Ermittlung des i-Wertes wird keinerlei statische Begründung gegeben.

Dennoch versucht der Verfasser, die Richtigkeit seines Verfahrens dadurch zu beweisen, daß er seine i-Werte mit den von Leonhardt an einem bestimmten Modell gemessenen i-Werten vergleicht. Dies kann aber gar nichts besagen, denn die durch Modellmessungen gewonnenen

[4]) Bautechn. 1939, S. 251.

[5]) Die vereinfachte Berechnung zweiseitig gelagerter Trägerroste. Bautechn. 1938, S. 535 usw. und als Broschüre erschienen (Berlin 1939, Wilh. Ernst & Sohn).

[6]) Die Verallgemeinerung der von Dr. Faltus erstmals vorgeschlagenen Einführung eines einzigen ideellen Q.T. als Ersatz für die Wirkung sämtlicher Q.T. ist schon deshalb unzulässig, weil die Begründung dieses Weges nur für Ausnahmefälle hinsichtlich des Verlaufs der Biegelinien von H.T. und Q.T. sowie der Angriffspunkte, Anordnung und Größe mehrerer Einzellasten möglich ist. Die Zulässigkeit der Berechnung mit einem ideellen Q.T. kann auf zweierlei Wegen erzwungen werden: entweder ist für einen Trägerrost mit vorgegebenem Trägheitsmomentenverlauf die ausgezeichnete Belastung oder für eine vorgegebene Belastung der ausgezeichnete Trägheitsmomentenverlauf zu bestimmen.

[7]) Anleitung für die vereinfachte Trägerrostberechnung. Berlin 1940, Wilh. Ernst & Sohn.

[8]) Bautechn. 1938, S. 542; seine Broschüre, S. 31.

[9]) Stahlbau 1940, S. 12.

i-Werte Leonhardts sind ja, wie bereits dargelegt, ebenfalls nicht einwandfrei.

Es muß aber auch noch auf andere Widersprüche in seinem Verfahren hingewiesen werden. Erstens stimmen seine Formeln (2) und (2a) nicht überein. Zweitens berechnet er in den Zahlenbeispielen (Stahlbau 1940, S. 16 u. 28) $\mu_{\text{I ideell}}$ aus

$$\mu_{\text{I ideell}} = \mu_{\text{I I}} - \mu_{\text{I II}},$$

statt aus seinen Formeln (1) oder (1a)

$$\mu_{\text{I ideell}} = \mu_{\text{I I}} + \mu_{\text{I II}}.$$

Eine Klärung dieses Widerspruchs gelang nicht.

Im Gegensatz zu Dr. Leonhardt arbeitet Dr. Geiger für verschiedene Q.T. mit verschiedenen Querverteilungszahlen, d. h. er nimmt keine konstante Querverteilungszahl über die ganze Hauptträgerlänge an, was an sich wirklichkeitsgetreuer ist.

Die Auflagerkräfte $\Delta A'_{mn}$ sind auch in der Geigerschen Arbeit weder erwähnt noch berücksichtigt.

Nachdem wir die Frage der Querverteilungszahl besprochen haben, wollen wir zur Erörterung der mittelbaren Belastung (Fall 1) sowie der unmittelbaren Belastung (Fall 2) übergehen.

Dr. Geiger kennt nur den Lastfall 1, so daß sein Verfahren für den Lastfall 2 erst recht keine richtigen Werte der Schnittgrößen liefert.

Dr. Leonhardt ist von dem Lastfall 2 ausgegangen und leitet in seiner Arbeit (Bautechn. 1938, S. 540 bis 543; seine Broschüre, S. 18 bis 29) für die Momente und Querkräfte die Ausdrücke

$$M_x = M_{0x}\, q + M'_x\, q'$$

$$Q_x = Q_{0x}\, q + Q'_x\, q'$$

ab. Darin beziehen sich M_{0x} und Q_{0x} auf den freien Einzelbalken ohne Q.T. und M'_x und Q'_x auf den Durchlaufträger, den man sich auf den Q.T. unnachgiebig gestützt vorzustellen hat, während q und q' die Querverteilungszahlen bedeuten. Die Ableitung der obigen Formeln hat der Verfasser für einen Trägerrost mit nur einem Q.T. angegeben, während für einen Trägerrost mit mehr als einem Q.T. der Beweis von Dr. Krabbe übernommen wurde. Die grundlegenden Formeln für den Trägerrost mit mehr als einem Q.T. sind jedoch nicht richtig, weil in der Krabbeschen Beweisführung die gegenseitige Beeinflussung „beim Schließen der Lücke η_1 und η_2" übersehen worden ist. Die Formeln sind also beim Trägerrost mit mehr als einem Q.T. nicht ableitbar und damit unbegründet.

Im Lastfall 1 sind in den Formeln von Dr. Leonhardt M'_x und Q'_x gleich Null, und infolgedessen unterscheidet sich hierfür sein Verfahren von dem Geigerschen nicht, abgesehen von dem Unterschied in den q-Zahlen.

Nun ist noch eine Zuschrift von Dr. Hoffmann, Köln, zu erwähnen. Auf Grund einer genauen Berechnung eines Trägerrostes wirft er Dr. Geiger vor, daß dessen q-Zahlen von den richtigen Werten stark abweichen und daß er den Einfluß der belasteten Q.T. auf die unbelasteten $(\Delta A'_{mn})$ vernachlässigt hat. Diese richtige Feststellung gilt ebenso für das Leonhardtsche Verfahren. Allerdings hat Dr. Geiger außerdem die unmittelbare Belastung (Fall 2) nicht berücksichtigt. Beim Trägerrost mit sehr viel Q.T. nähern sich jedoch die beiden Lastfälle 1 und 2, und infolgedessen wird der Unterschied zwischen den Verfahren von Dr. Geiger und Dr. Leonhardt kleiner (M' und Q' nehmen ab), abgesehen davon, daß Dr. Geiger — im Gegensatz zu Dr. Leonhardt — die q-Zahlen nicht über die ganze Länge des H.T. konstant annimmt.

In den in Bautechn. 1938, S. 418 bis 420, veröffentlichten Zuschriften wies Dr. Geiger darauf hin, daß die Momente, die Leonhardt in den Zahlenbeispielen seiner Arbeit berechnet hat, außerhalb der beiden Grenzfälle — Einzelbalken ohne Querverteilung und Querverteilung durch starren Q.T. — und infolgedessen auch außerhalb des Möglichen lägen. Wir wollen nur grundsätzlich erörtern, ob das Moment in den

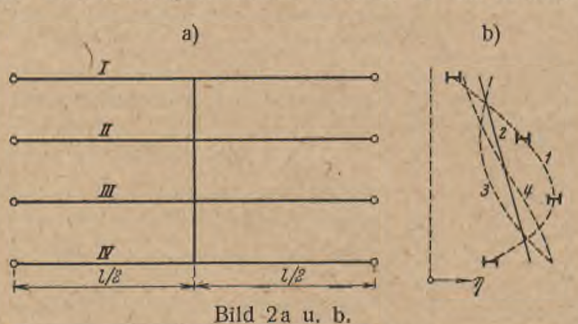


Bild 2a u. b.

Beispielen von Leonhardt außerhalb der beiden Grenzwerte liegen kann. Die Frage muß verneint werden. Im ersten Beispiel handelt es sich um die Biegemomente in der Mitte des Rand- und Mittelträgers eines über einer Öffnung gespannten Trägerrostes aus 4 H.T. und einem Q.T. in der Feldmitte (Bild 2a). Wir denken uns zunächst, der Q.T. wäre nicht da, also die Querverteilung Null (Grenzfall 1). In diesem Fall entspricht den Durchbiegungen η der Träger in Feldmitte infolge der gewählten maßgebenden Belastung etwa Linie 1 im Bild 2b. Durch Hinzufügung eines Q.T. werden sich die Durchbiegungen ändern, und die Änderung der Durchbiegung $\Delta\eta$ ist in diesem Fall unmittelbar ein Maß für das Zusatzmoment des H.T. in der Feldmitte infolge der Querverteilung. Nehmen wir an, die Durchbiegung der H.T. bei Hinzufügung eines starren Q.T. sei schon bekannt (η_∞ etwa nach Linie 2), so fragt es sich, ob die Durchbiegung des H.T. IV bei Vorhandensein eines elastischen Q.T. unterhalb der Linie 2 liegen kann, d. h. ob $\eta_{\text{IV elast.}}$ $\eta_{\text{IV}\,\infty}$ sein könnte. Wir nehmen an, es wäre möglich. Dann würde in diesem Fall der Q.T., die Durchbiegungen der H.T. ausgleichend, die Biegelinie entweder nach Linie 3 oder nach Linie 4 annehmen müssen. Es ist aber ohne weiteres einzusehen, daß solche Biegelinien im vorliegenden Falle ausschalten. Daher muß $\eta_{\text{IV elast.}}$ und damit auch $M_{\text{IV elast.}}$ innerhalb der beiden Grenzfälle liegen. Für das Moment des Mittelträgers gilt die gleiche Überlegung. Im Beispiel 2 handelt es sich um einen durchlaufenden Trägerrost über zwei Öffnungen aus 3 H.T. und 3 Q.T. in jedem Feld, und der Streit bezieht sich auf die Stützenmomente des Rand- und Mittelträgers. Hierfür kann man die vorgehende Beweisführung nicht anwenden, denn beim Trägerrost mit mehr als einem Q.T. ist die Durchbiegung kein unmittelbares Maß für das Biegemoment, und außerdem weisen die Träger über der Innenstütze keine Durchbiegungen auf. Ein allgemeiner Beweis, der hier nicht wiedergegeben werden kann, bestätigt jedoch die Aussage für Trägerroste mit mehr als einem Q.T.[10]).

Zusammenfassung.

1. Beim Trägerrost mit mehr als einem Q.T. läßt sich das Kräftespiel nicht durch die Querverteilungszahl erfassen und das Einflußvolumen nicht durch Einflußflächen eines H.T. ersetzen.

2. Sowohl Dr. Leonhardt als auch Dr. Geiger haben die Auflagerkräfte $\Delta A'_{mn}$ der Q.T. infolge der Belastungen auf den anderen Q.T. vernachlässigt. Welche Auswirkung diese Vernachlässigungen auf die Größtwerte der Schnittgrößen M und Q bei der praktischen Berechnung der H.T. ausübt, ist nicht untersucht.

3. Beim Trägerrost mit mehr als einem Q.T. kann Dr. Leonhardt die q''_{mn}-Werte nicht aus Modellmessungen ermitteln und Dr. Geiger nicht nach seinem Verfahren berechnen. Sowohl die q''_{mn}-Werte von Dr. Leonhardt als auch diejenigen von Dr. Geiger können von den genauen Werten beträchtlich abweichen.

4. Bei Trägerrosten mit mehr als einem Q.T. läßt sich für allgemeine Belastungen das Kräftespiel nicht durch Einführung eines für alle Belastungszustände gleichen ideellen Q.T. mit $J_Q' = i\,J_Q$ erfassen. Damit erledigt sich der Streit um die Ermittlung der i-Werte, die überdies sowohl bei Dr. Leonhardt als auch bei Dr. Geiger auf unrichtigen Werten aufgebaut sind, von selbst.

5. Das Verfahren von Dr. Leonhardt zur Berechnung der Momente und Querkräfte gilt für mittelbare und unmittelbare Belastung der H.T., aber lediglich beim Trägerrost mit nur einem Q.T. Beim Trägerrost mit mehr als einem Q.T. ist die durch Dr. Leonhardt übernommene Beweisführung von Dr. Krabbe nicht richtig. — Dr. Geiger berücksichtigt nur mittelbare Belastung, woraus sich allein schon größere Abweichungen von der genauen Berechnung erklären, abgesehen davon, daß sein Verfahren statisch nicht begründet wird und Widersprüche aufweist. Bei mittelbarer Belastung unterscheiden sich die Verfahren von Dr. Leonhardt und Dr. Geiger zur Ermittlung von M und Q nur darin, daß Dr. Geiger keine konstanten Querverteilungszahlen über die ganze Länge des H.T. annimmt. Der Nachweis von Dr. Leonhardt, daß man mit konstanten Querverteilungszahlen über die ganze Länge des H.T. arbeiten kann, ist anfechtbar, weil seine gemessenen q''_{mn}-Werte nicht richtig sind, so daß die Frage nach der ausreichenden Genauigkeit dieses Weges noch offen bleibt.

6. Sowohl Dr. Leonhardt als auch Dr. Geiger haben weder maximale Momente noch maximale Querkräfte in H.T. und Q.T. für die jeweils maßgebenden Belastungen nach dem genauen baustatischen Verfahren gerechnet und den Ergebnissen ihres Näherungsverfahrens gegenübergestellt, so daß noch zu untersuchen wäre, ob solche Verfahren als Näherungsverfahren im Sinne der Baustatik angesehen werden können.

[10]) Es läßt sich in allgemeingültiger Weise der folgende Satz beweisen: Ändert man den Querschnitt $A_x\,(F_x,\,J_x)$ eines Elements ds oder eines Tragteiles s an einer beliebigen Stelle x in einem beliebigen Tragwerk unter Beibehaltung des beliebigen Lastzustandes, so kann jede statische Größe X jeweils nur einen Wert annehmen, der innerhalb der beiden Grenzwerte X_{I} und X_{II} für $A = 0$ $(F_x = 0,\, J_x = 0)$ und für $A = \infty$ $(F_x = \infty,\, J_x = \infty)$ liegt. Im Sonderfall ist $X_{\text{I}} = X_{\text{II}}$. Dabei ist vorausgesetzt, daß sich der Baustoff vollkommen elastisch verhält und Instabilitäten ausschalten.

INHALT: Die Pfette mit Kopfstreben. — Zur Berechnung des Trägerrostes.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Organ des Arbeitskreises „Stahlbau" der Fachgruppe Bauwesen im NS.-Bund Deutscher Technik

Schriftwaltung: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage zur Zeitschrift **DIE BAUTECHNIK** Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 7 RM und Postgeld

15. Jahrgang | BERLIN, 13. November 1942 | Heft 23/24

Eine einfache Näherungsformel zur Berechnung gedrückter Rahmenstäbe.

Von Prof. Dr.-Ing. Ernst Melan in Wien.

Die genaue Berechnung gedrückter Rahmenstäbe[1]) führt, wie L. Mann und E. Chwalla gezeigt haben, auf eine transzendente Gleichung; die Umständlichkeit, welche die Lösung dieser Gleichung mit sich bringt, ist die Ursache, daß sich die genaue Berechnung in der Praxis bislang nicht eingebürgert hat. Deshalb wird im folgenden ein Verfahren angegeben, welches die Lösung dieser transzendenten Gleichung vermeidet und dessen Ergebnisse auf höchstens drei, im allgemeinen aber bis auf Bruchteile von Hundertsteln mit den genauen übereinstimmen.

Wir betrachten einen Rahmenstab mit n Feldern und der Länge l; die Stielachsen haben den Abstand h, ein Einzelstab die Fläche F und den Trägheitsradius i. Der Elastizitätsmodul sei E bzw. der Knickmodul E'. Wir bezeichnen die Schlankheit eines Vollstabes, der bei derselben Spannung σ_k wie der Rahmenstab knickt, mit $\bar{\lambda}$. E' ist dann eine gegebene Funktion von $\bar{\lambda}$, und die Knickspannung σ_k ist durch die Gleichung

$$\sigma_k = \frac{E'\,\pi^2}{\bar{\lambda}^2}$$

gegeben. Zur Abkürzung wird ferner $\nu = 2 - 2\sqrt{\frac{E'}{E}} + \frac{E'}{E}$ eingeführt. Liegt $\bar{\lambda}$ im Eulerbereich, so ist $E' = E$ und $\nu = 1$. Den Ausdruck $(2\,i/h)^2$ bezeichnen wir mit a. Δ sei das Maß für die Nachgiebigkeit der Querverbindungen. $l/i = \lambda$ ist die Schlankheit des Einzelstabes. Den Ausdruck $\pi \cdot \frac{\lambda}{n\,\bar{\lambda}}$ nennen wir φ. Dann lautet die transzendente Gleichung zur Bestimmung von φ

$$(1) \qquad \frac{\sin\varphi}{a\,\nu\,\varphi} = (\cos\pi/n - \cos\varphi)\,2\left(\frac{E'\,F\,n\,\Delta}{l\,\nu} + \frac{1}{2\,(1-\cos\pi/n)}\right).$$

Wir können uns eine erste Näherung beschaffen, wenn wir annehmen, daß die Querverbindungen nicht an einzelnen Stellen vorhanden, sondern über die ganze Länge des Stabes stetig verteilt sind. Diese stetig verteilten Querverbindungen müssen dann eine Nachgiebigkeit $\delta = \Delta \cdot \frac{l}{n}$ besitzen. Gl. (1) erlaubt aber nicht ohne weiteres den Grenzübergang zu $n \to \infty$; um ihn durchzuführen, ersetzen wir φ durch die neue Unbekannte ϑ:

$$\varphi = \frac{\pi}{n\,\vartheta},$$

und damit wird die gesuchte Schlankheit

$$(2) \qquad \bar{\lambda} = \lambda\,\vartheta.$$

Nach einer einfachen Umformung erhält Gl. (1) die Gestalt

$$(3) \qquad \frac{\sin\frac{\pi}{n\,\vartheta}}{n^2 \cdot \frac{\pi}{n\,\vartheta}\left(\cos\pi/n - \cos\frac{\pi}{n\,\vartheta}\right)} = 2\,a\left(\frac{E'\,F\,\delta}{l^2} + \frac{\nu}{2\,n^2(1-\cos\pi/n)}\right) = 2\,V$$

mit $V = a\left(\frac{E'\,F\,\delta}{l^2} + \frac{\nu}{2\,n^2(1-\cos\pi/n)}\right)$.

Da V stets positiv ist, liegt ϑ innerhalb der Grenzen $\vartheta = 1/n$ für $V = 0$ und $\vartheta = 1$ für $V \to \infty$.

Gl. (3) erlaubt nunmehr den Grenzübergang zu $n \to \infty$; es ergibt sich wegen

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n\,\vartheta}}{\frac{\pi}{n\,\vartheta}} = 1 \qquad 2\,n^2(1-\cos\pi/n) = \pi^2$$

$$2\,n^2\left(\cos\pi/n - \cos\frac{\pi}{n\,\vartheta}\right) = -\pi^2\left(1-\frac{1}{\vartheta^2}\right)$$

$$(4) \qquad \frac{\vartheta^2}{1-\vartheta^2} = a\left(\frac{E'\,F\,\pi^2\,\delta}{l^2} + \nu\right) = U$$

und damit

$$(4\text{a}) \qquad \vartheta = \sqrt{\frac{U}{1+U}}.$$

Gl. (4) u. (4a) enthalten entsprechend den getroffenen Annahmen keine Größe, welche die Knickung des Einzelstabes beschreibt; die Näherung ist nur dann zu gebrauchen, wenn ϑ in der Nähe von 1 liegt. Sie ist also um so besser, je größer U ist. In der Praxis sucht man aber vorteilhaft möglichst kleine Werte von ϑ zu erreichen; dann wird die Näherung unbefriedigend. Während die genaue Formel für $U = 0$ den Wert $\vartheta = 1/n$ liefert, gibt Gl. (4) u. (4a) den Wert $\vartheta = 0$.

Man kann aber leicht zu einer verbesserten Näherung gelangen, wenn man

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n\,\vartheta}}{n^2 \cdot \frac{\pi}{n\,\vartheta}\left(\cos\pi/n - \cos\frac{\pi}{n\,\vartheta}\right)} = \frac{2\,\vartheta^2}{\pi^2(1-\vartheta^2)} + \varrho(\vartheta),$$

also

$$\varrho(\vartheta) = \frac{\sin\frac{\pi}{n\,\vartheta}}{n^2 \cdot \frac{\pi}{n\,\vartheta}\left(\cos\pi/n - \cos\frac{\pi}{n\,\vartheta}\right)} - \frac{2\,\vartheta^2}{\pi^2(1-\vartheta^2)}$$

setzt und $\varrho(\vartheta)$ in der Umgebung der Stelle $\vartheta = 1/n$ in eine Taylorsche Reihe entwickelt. Es genügt die Berücksichtigung des ersten Gliedes, und so erhält man für $\varrho(\vartheta)$

$$\varrho(\vartheta) = -\frac{2}{\pi^2(n^2-1)}.$$

Damit wird

$$\frac{\vartheta^2}{\pi^2(1-\vartheta^2)} = V + \frac{1}{\pi^2(n^2-1)}$$

und daher

$$\vartheta^2 = \frac{\pi^2(n^2-1)\,V + 1}{\pi^2(n^2-1)\,V + n^2}.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$p = \pi^2(n^2-1) \quad \text{und} \quad q = \frac{\pi^2(n^2-1)}{2\,n^2(1-\cos\pi/n)},$$

so ist

$$(5) \qquad \pi^2(n^2-1)\,V = a\left(p \cdot \frac{E'\,F\,\delta}{l^2} + q\,\nu\right) = M;$$

damit wird

$$\vartheta = \sqrt{\frac{M+1}{M+n^2}}$$

und die gesuchte Schlankheit

$$(5\text{a}) \qquad \bar{\lambda} = \frac{l}{i}\sqrt{\frac{M+1}{M+n^2}}.$$

Die Werte p und q, die nur von der Felderzahl n abhängen, sind in Tafel 1 für $n = 3$ bis $n = 10$ zusammengestellt. Überdies sind auch die später benötigten Werte $r = \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \pi$ angegeben.

Tafel 1.

$n =$	3	4	5	6	7	8	9	10
p	78,96	148,04	236,87	345,44	473,74	621,79	789,57	977,09
q	8,773	15,80	24,81	35,81	48,81	63,82	80,82	99,82
r	2,793	2,945	3,016	3,054	3,078	3,093	3,103	3,110

Gl. (5a) liefert stets etwas größere Werte als die genauen Gleichungen. Über den Fehler gibt die folgende Tafel Aufschluß.

---

[1]) Vgl. hierüber Hartmann, Kippung, Knickung, Beulung. Verlag F. Deuticke, Wien.

Tafel 2. Fehler von $\bar{\lambda}$ in Hundertsteln.

$\vartheta =$	0,167	0,2	0,3	0,333	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$n=3$	—	—	—	0,00	2,75	1,97	1,22	0,63	0,25	0,05	0,0
$n=5$	0,00	2,65	1,73	—	1,10	0,60	0,17	0,14	0,08	0,00	0,0

Liegt $\bar{\lambda}$ im Eulerbereich, ist es also bei Stahl oder Holz größer als 100, so ist $E = E'$ und $\nu = 1$; ist $\lambda < 100$, so sind E' und ν von $\bar{\lambda}$ abhängig, und zwar ist

$$E' = \frac{\sigma_k \pi^2}{\bar{\lambda}^2},$$

wobei σ_k eine gegebene Funktion von $\bar{\lambda}$ ist, und

$$\nu = 2 + \frac{E'}{E} + 2\sqrt{\frac{E'}{E}}.$$

Für Baustahl St 37 ergeben sich nach der in DIN 1050 festgesetzten Beziehung zwischen σ_k und $\bar{\lambda}$ die folgenden Werte für E'.

Tafel 3. E' in t/cm².

$\bar{\lambda}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0	0,243	0,973	2,19	3,89	6,08	8,75	11,9	15,7	19,7
10	24,32	29,4	35,0	41,1	47,7	54,7	62,3	70,3	78,8	87,8
20	97,3	107	118	129	140	152	164	177	191	205
30	219	234	249	265	281	298	315	333	351	370
40	389	409	429	450	471	492	515	537	560	584
50	608	633	658	683	709	736	763	790	818	847
60	875	902	928	955	983	1010	1038	1066	1094	1122
70	1151	1180	1209	1238	1268	1298	1328	1358	1389	1419
80	1450	1481	1513	1544	1576	1607	1639	1671	1704	1736
90	1768	1801	1834	1867	1900	1933	1966	2000	2033	2066

Tafel 4.

$\bar{\lambda}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2,00	1,98	1,96	1,94	1,92	1,90	1,88	1,86	1,84	1,82
10	1,80	1,78	1,76	1,74	1,72	1,70	1,69	1,67	1,65	1,63
20	1,62	1,60	1,58	1,57	1,55	1,53	1,52	1,50	1,49	1,47
30	1,46	1,45	1,43	1,42	1,40	1,39	1,38	1,36	1,35	1,34
40	1,32	1,31	1,30	1,29	1,28	1,27	1,26	1,24	1,23	1,22
50	1,21	1,20	1,19	1,18	1,17	1,17	1,16	1,15	1,14	1,13
60	1,13	1,12	1,11	1,11	1,10	1,09	1,09	1,08	1,08	1,07
70	1,07	1,06	1,06	1,05	1,05	1,05	1,04	1,04	1,03	1,03
80	1,03	1,03	1,02	1,02	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01	1,01
90	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00

Sind die Bindebleche mit Nieten angeschlossen, so wird, wie Hartmann a. a. O. angibt,

$$\varDelta = \frac{0{,}004}{n \pi d^2}\left[(n-2)\left(1 + \frac{h_1^2}{e_1^2}\right) + 1 + \frac{h_0^2}{e_1^2}\right] = \frac{\varepsilon}{n \pi};$$

damit nimmt M die Form an, weil $\delta = \frac{l}{h} \cdot \varDelta$,

$$M = a\left(r \cdot \frac{\varepsilon F}{l} \cdot E' + q \nu\right). \qquad (5\text{b})$$

Hierin ist

$$r = \frac{n_2 - 1}{n^2} \cdot \pi$$

$$\varepsilon = \frac{0{,}004}{d^2}\left[(n-2)\left(1 + \frac{h_1^2}{e_1^2}\right) + 1 + \frac{h_0^2}{e_0^2}\right];$$

h_1 ist der Abstand der beiden Nietreihen, e_1 die Entfernung der äußersten Niete der mittleren Bindebleche; h_0 und e_0 sind diese Maße bei den Bindeblechen an den Stabenden. — Die Beiwerte r und q können für verschiedene n der Tafel 1 entnommen werden.

Sind die Querverbindungen hinreichend starr, so kann in dem Ausdruck für M der erste Summand gegenüber dem zweiten vernachlässigt werden. Ersetzt man dafür den Wert von q durch den etwas größeren Wert n^2, so ergibt sich die einfache Formel

$$\vartheta = \sqrt{\frac{a \nu + 1/n^2}{a \nu + 1}}. \qquad (6)$$

Diesem Werte von ϑ entspricht die größte Tragfähigkeit des Rahmenstabes, die sich bei n Feldern durch hinreichend starre Querverbindungen überhaupt erreichen läßt.

Zum Schlusse sei an dem Beispiel, welches Hartmann a. a. O., S. 71, gibt, die Berechnung eines gedrückten Rahmenstabes nach den vorstehend abgeleiteten Formeln erläutert. Die Stütze bestehe aus 2 ⊏ 26; es ist also $F = 48{,}3$ cm² und $i = 2{,}56$ cm. Die Länge der Stütze sei $l = 600$ cm, mithin $l/i = 234$; die Entfernung der Stabachsen beträgt $h = 35{,}3$ cm, demnach $a = (2\,i/h)^2 = 0{,}021\,04$. Der Abstand der Nietrißlinien der Bindebleche sei $h_1 = h_0 = 30$ cm, die Entfernung der äußersten Niete bei den mittleren Bindeblechen $e_1 = 9$ cm, an den Stabenden $e_0 = 18$ cm. Der Nietdurchmesser ist 2,3 cm.

Bei 6 Feldern ($n = 6$) wird

$$\varepsilon = \frac{0{,}004}{2{,}3^2}\left[4\left(1 + \frac{30^2}{9^2}\right) + 1 + \frac{30^2}{18^2}\right] = 0{,}0395.$$

Der Tafel 1 entnehmen wir für $n = 6$:

$$r = 3{,}054 \text{ und } q = 35{,}81\,\nu.$$

Damit wird

$$M = 0{,}021\,04\left(3{,}054 \cdot \frac{48{,}3 \cdot 0{,}0395}{600} \cdot E' + 35{,}81\,\nu\right).$$

Setzen wir zunächst $E' = E = 2100$ t/cm² und $\nu = 1$, so wird nach (5b) $M = 0{,}021\,04\,(0{,}009\,71 \cdot 2100 + 35{,}81) = 1{,}1824$; demnach $\vartheta = \sqrt{\frac{2{,}1824}{37{,}1824}} = 0{,}242$ und $\bar{\lambda} = 0{,}242 \cdot 234 = 56{,}7$. Nun wiederholen wir die Rechnung mit den aus Tafel 3 und 4 entnommenen, zu $\bar{\lambda} = 56$ gehörenden Werten $E' = 790$ t/cm² und $\nu = 1{,}15$ und erhalten $M = 0{,}021\,04\,(0{,}009\,71 \cdot 790 + 35{,}81 \cdot 1{,}15) = 1{,}0297$.

Damit ergibt sich der verbesserte Wert nach (5)

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2{,}0297}{37{,}0297}} = 0{,}234$$

und endlich nach (5a) $\bar{\lambda} = 0{,}234 \cdot 234 = 55$.

Der Tafel 1 kann entnommen werden, daß der Fehler etwa 2 % beträgt. Der genaue Wert ist also $\bar{\lambda} = 54$.

Die einfachere Gleichung (6) ergibt zunächst mit $\nu = 1$

$$a\nu + 1 = 1{,}021\,04 \qquad a\nu + 1/n^2 = 0{,}048\,82,$$

also

$$\vartheta = \sqrt{\frac{0{,}048\,82}{1{,}021\,04}} = 0{,}219.$$

Hierzu gehört nach Tafel 4 $\nu = 1{,}21$, mit welchem sich

$$a\nu + 1 = 1{,}025\,46 \quad \text{und} \quad a\nu + 1/n^2 = 0{,}053\,42,$$

demnach

$$\vartheta = \sqrt{\frac{0{,}053\,24}{1{,}025\,46}} = 0{,}228 \quad \text{und} \quad \bar{\lambda} = 53{,}4 \quad \text{ergibt.}$$

Obwohl die Querverbindungen verhältnismäßig schwach sind (vgl. z. B. Stahl im Hochbau, S. 691, wo die dort empfohlenen Ausführungsformen bedeutend steifere Querverbindungen besitzen), ist die Übereinstimmung mit der genauen Lösung zufriedenstellend. Zum Vergleiche sei noch erwähnt, daß die in DIN 1050 angegebene Vorschrift den Wert

$$\lambda = \sqrt{\lambda_y^2 + \lambda_1^2} = \sqrt{\left(\frac{600}{17{,}8}\right)^2 + \left(\frac{100}{2{,}56}\right)^2} = 51{,}6$$

ergibt. Macht man die Querverbindungen noch schwächer oder, was dasselbe ist, verringert man ihre Zahl, so versagt Gl. (6). Aus dem gleichen Grunde kann man auch Gl. (6) nicht für hölzerne Rahmenstäbe anwenden; der Weg wäre vielmehr der, durch Versuche die Werte von δ bzw. $\varDelta$ für verschiedene Verbindungsarten zu bestimmen. Letztere sind im allgemeinen so groß, daß in dem Ausdruck für M das erste Glied nicht zu vernachlässigen ist.

Anleitung für die strenge Trägerrostberechnung.

Von Dr.-Ing. **Ullrich Thran**, Grünberg in Schlesien.

A. Allgemeines.

Obwohl es bereits eine Anzahl mehr oder weniger einfacher Näherungsverfahren [1]) bis [14]) für die Berechnung von Trägerrosten gibt,

[1]) F. Faltus, Bauing. 1927, S. 853.
[2]) Krabbe, Bauing. 1934, S. 27.
[3]) E. Wiesner, Bauing. 1934, S. 353.
[4]) H. Holzwarth, Stahlbau 1936, Heft 16, S. 124, und 1937, Heft 5/6, S. 45, und Heft 17/18, S. 143.
[5]) A. Thoms, Stahlbau 1936, Heft 18, S. 138.
[6]) F. Geiger, Stahlbau 1938, Heft 10, S. 78, und Heft 26, S. 207, und 1940, Heft 3/4, S. 11.
[7]) F. Kaufmann, Stahlbau 1938, Heft 19, S. 145.
[8]) F. Leonhard, Bautechn. 1938, Heft 40/41, S. 535. — Anleitung für die vereinfachte Trägerrostberechnung. Berlin 1940, Wilh. Ernst & Sohn.
[9]) W. Bültmann, Stahlbau 1940, Heft 3/4, S. 9.
[10]) Weber, Bauing. 1940, S. 227.
[11]) F. Faltus, F. Geiger, F. Leonhardt, Zuschriften. Bautechn. 1939, Heft 17, S. 251, und Heft 29, S. 418.
[12]) M. Hilal, Beiträge zur Theorie und Berechnung von Balkenbrücken, Diss. E. T. H. Zürich. Zürich u. Leipzig 1940.
[13]) Kruck, Schweiz. Bauztg. 1941, Bd. 118, Nr. 1.
[14]) K. Klöppel, Stahlbau 1942, Heft 21/22, S. 78.

ist auch die allgemeine strenge Untersuchung dieses Tragwerks kein Problem. Man läßt sich jedoch leicht durch die Feststellung abschrecken, daß bei t Hauptträgern und s Querscheiben der Trägerrost $s(t-2)$-fach statisch unbestimmt ist. Die Berücksichtigung der wahren Trägheitsmomente, die Berechnung durchlaufender Trägerroste sowie die Ermittlung von Einflußlinien für alle Kraftwirkungen erscheint allerdings mit Hilfe der üblichen Methoden zu einer äußerst umfangreichen Rechenarbeit zu führen. Wie im folgenden gezeigt wird, kann jedoch durch die Berücksichtigung einer baupraktisch stets vorliegenden Voraussetzung und unter folgerichtiger Anwendung der Gruppenbelastung ein Verfahren zur strengen Berechnung derartiger Tragwerke angegeben werden, das zwar nicht die Zahl der Unbekannten herabsetzt, aber das vorliegende System in eine Reihe von Untersystemen zerlegt, so daß selbst hochgradig unbestimmte Systeme leicht und, was besonders wichtig ist, in übersichtlichen Einzelschritten lösbar werden.

Außer den üblichen Voraussetzungen — gleiche Hauptträgerabstände und verdrillungsweiche Querschnitte — soll also eine neue hinzutreten. Die Trägheitsmomente aller Hauptträger $A, B, C \ldots$ eines jeden Brückenquerschnitts sollen einander proportional sein. Es soll also

$$\frac{J_c^A}{\alpha} = \frac{J_c^B}{\beta} = \frac{J_c^C}{\gamma} = \ldots \tag{1}$$

sein. Sie können dabei beliebig über die Hauptträgerlänge verteilt sein, jedoch folgt aus (1), daß im Brückenquerschnitt m

$$\frac{J_c^A}{J_m^A} = \frac{J_c^B}{J_m^B} = \frac{J_c^C}{J_m^C} = \ldots$$

ist. Ebenso können die Querscheiben beliebige Querschnittsabstufungen aufweisen. Es wird jedoch weiter wie auch stets zutreffend vorausgesetzt, daß alle Querscheiben gleich ausgebildet sind. Jeder Hauptträger sei ferner parallel zur Querscheibenlage gesondert gelagert. Obwohl auch die Berechnung hinsichtlich der Trägheitsmomente unsymmetrischer Brückenquerschnitte mit diesem Verfahren möglich ist, so werden jedoch hierbei die allgemeinen Ausdrücke zu verwickelt. Daher wird nur der allgemeine Fall der hinsichtlich der Trägheitsmomente symmetrischen Brückenquerschnitte untersucht. Die Fahrbahn kann dabei unsymmetrisch liegen.

Außer diesen Voraussetzungen benötigt das hier gezeigte Verfahren nur die einfachen Gedankengänge:

(2) 1. Die Differenz der Durchbiegungen der Querscheibenanschlußpunkte zweier Hauptträger ist gleich der Durchbiegung der Querscheibe.

(3) 2. Einzelne Träger auf zwei oder mehreren starren oder elastischen Stützen proportionaler Steifigkeit (Trägheitsmomente, Federkonstante) erhalten bei gleicher Belastung gleiche Biegemomente, Querkräfte usw.

(4) 3. Einzelne Träger auf zwei oder mehreren starren oder elastischen Stützen proportionaler Steifigkeit erhalten bei gleicher Belastung proportionale Durchbiegungen.

Werden diese drei elementaren Gedanken folgerichtig verarbeitet, so läßt sich die mehr oder weniger vollbesetzte Matrix der üblichen Berechnungsweisen bei t Hauptträgern in $(t-2)$ fünfgliedrige Gleichungsgruppen des elastisch gestützten Trägers mit s Unbekannten zerlegen. Bei durchlaufenden Trägerrosten tritt noch eine dreigliedrige Gleichungsgruppe des durchlaufenden Trägers auf starren Stützen hinzu. Es handelt sich also nur noch um die Berechnung von Tragwerken, die durch vielfältige Ausführung bereits so weit entwickelt ist, daß sie nach Fertigstellung des Ansatzes von Hilfskräften tabellarisch weitergerechnet und ausgewertet werden kann. Und schließlich muß es bei allen umfangreichen Berechnungen stets das Ziel sein, die hochwertige Kraft des Statikers möglichst bald für die konstruktiven Fragen und zur konstruktiven Überwachung frei zu machen. Damit erfüllt dieses Verfahren auch diese Bedingung, besonders da wie bei durchlaufenden Trägern fortlaufende Prüfung der Tabellen mit Summenproben möglich ist.

B. Bezeichnungen.

Die folgerichtige Durchführung der Bezeichnungen ist bei dem gezeigten Verfahren äußerst wichtig[10].

Es werden bezeichnet:

die t Hauptträger mit $A, B, C, \ldots \bar{C}, \bar{B}, \bar{A}$;

die Querscheiben und die Querscheibenanschlußpunkte mit $i, k, \ldots$ bis s;

die Querträgeranschlußpunkte mit m, n;

die Lagerpunkte mit L, R bis U;

mit System 0: die statisch bestimmt gelagerten Balken auf zwei Stützen, die nach Trennung der Querscheibenanschlüsse und Fortfall der Stützenmomente bei durchlaufenden Trägern entstehen. Es ist bei Trägerrosten über einer Öffnung identisch mit System I;

mit System I: der durchlaufende Träger nach Trennung der Querscheibenanschlüsse mit den $U-2$ unbekannten Stützenmomenten X_L;

mit System II bis römisch $(t-1)$ bei t Hauptträgern: die durchlaufenden Träger, die außer an den starren Lagern noch an den Querscheibenanschlußpunkten elastisch gestützt sind mit den $U-2+s$ unbekannten Stützenmomenten Y_i;

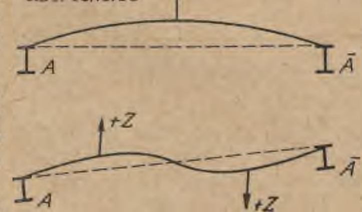


Bild 1.

mit System römisch t: das endgültige System;

mit Z: die $(t-2)s$ unbekannten Übertragungskräfte zwischen den Hauptträgern und Querscheiben. Als positiv wird dabei Z bezeichnet, wenn es die linke Hälfte der Querscheibe nach oben durchbiegt;

mit δ: die EJ_c-fachen Verschiebungen (Durchbiegungen und Verdrehungen) durch eine Last 1 oder ein Moment 1;

mit vier Indizes werden die Verschiebungen, Momente usw. gekennzeichnet. Dabei gibt der erste Index unten den Punkt an, an dem die Verschiebung, das Moment usw. auftritt; der zweite Index unten gibt den Punkt an, in dem die Last 1 oder das Moment 1 wirkt, das die Durchbiegung oder das Moment erzeugt. Der erste Index oben kennzeichnet das System, an dem gerechnet wird und der zweite Index oben den Träger, auf den sich der Wert bezieht, z. B. δ_{im}^{IB}, δ_{Bm}^{IVi} oder M_{nm}^{IIA}.

Die endgültigen Momente, Querkräfte, Durchbiegung usw. erhalten als zweiten unteren Index den Hauptträger angeschrieben, auf dem in einem beliebigen Punkt die Last 1 steht.

M_{nA}^{IIIB} ist dann das Moment im Punkte n des mittelsten Hauptträgers B bei Trägerrosten mit drei Hauptträgern, bei Belastung des Hauptträgers A mit einer Last 1;

mit ①, ②, ③ werden die t Gruppenlasten bezeichnet. Als zweiter unterer Index bedeutet z. B. ② die Durchbiegung oder das Moment infolge der Gruppenlast ② in einem Punkte m. Hierbei wird angenommen, daß die Querscheiben nicht direkt belastet werden. Durch eine entsprechende Konstruktion, die auch baupraktisch meistens vorliegt, können daher alle Lasten mittig auf die Hauptträger abgesetzt gedacht werden.

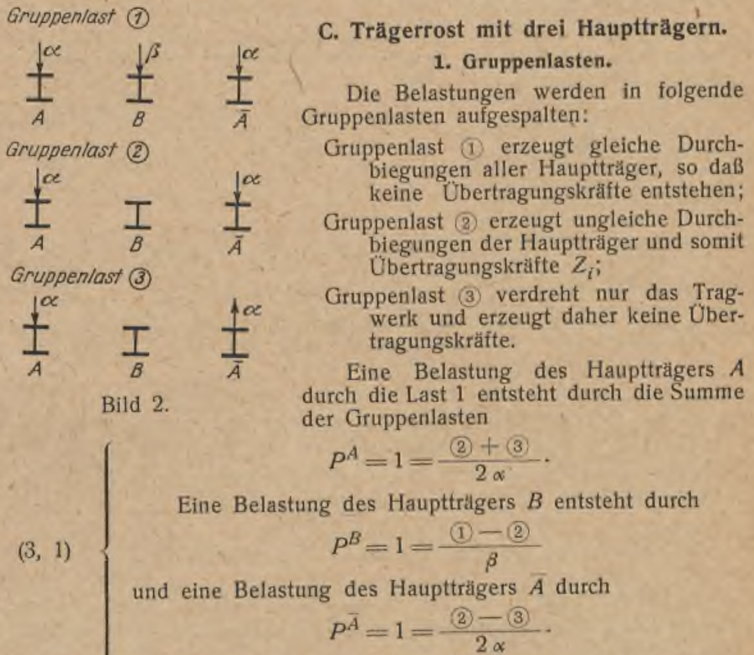


Bild 2.

C. Trägerrost mit drei Hauptträgern.

1. Gruppenlasten.

Die Belastungen werden in folgende Gruppenlasten aufgespalten:

Gruppenlast ① erzeugt gleiche Durchbiegungen aller Hauptträger, so daß keine Übertragungskräfte entstehen;

Gruppenlast ② erzeugt ungleiche Durchbiegungen der Hauptträger und somit Übertragungskräfte Z_i;

Gruppenlast ③ verdreht nur das Tragwerk und erzeugt daher keine Übertragungskräfte.

Eine Belastung des Hauptträgers A durch die Last 1 entsteht durch die Summe der Gruppenlasten

(3, 1)

$$P^A = 1 = \frac{② + ③}{2\alpha}.$$

Eine Belastung des Hauptträgers B entsteht durch

$$P^B = 1 = \frac{① - ②}{\beta}$$

und eine Belastung des Hauptträgers $\bar{A}$ durch

$$P^{\bar{A}} = 1 = \frac{② - ③}{2\alpha}.$$

Da die Gruppenlasten ① und ③ keine Übertragungskräfte erzeugen, sind ihre Kraftwirkungen am System III in jeder Hinsicht denen am System I gleich. Die Einflußlinien dieser Gruppenlasten ergeben sich somit sofort am System I, das keiner näheren Erläuterung bedarf.

2. Gruppenlast ②.

Werden nach Belastung des Tragwerks mit der Gruppenlast ② die Hauptträger A und B aus dem System III herausgeschnitten und die

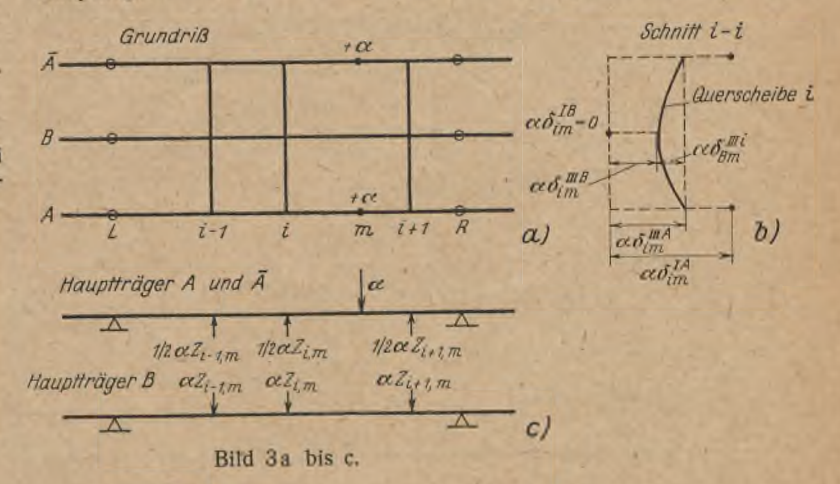


Bild 3a bis c.

unbekannten Übertragungskräfte Z_i hinzugefügt, so entsteht das in Bild 3c dargestellte gleichwertige Belastungsbild für die dadurch entstehenden Systeme I.

Die Durchbiegungen der Querscheibenanschlußpunkte betragen:

$$(3,\ 2)\quad \begin{cases} \alpha\,\delta_{im}^{\mathrm{III}\,A} = \alpha\,\delta_{im}^{\mathrm{I}\,A} - \frac{1}{2}\cdot\alpha\sum_1^s Z_{km}\,\delta_{ik}^{\mathrm{I}\,A} \\ \alpha\,\delta_{im}^{\mathrm{III}\,B} = \alpha\sum_1^s Z_{km}\,\delta_{ik}^{\mathrm{I}\,B}. \end{cases}$$

Nach (2) ist jedoch die Durchbiegung des Punktes B der Querscheibe i gleich der Differenz der Durchbiegungen der Hauptträger A und B

$$(3,\ 3)\quad \alpha\,\delta_{Bm}^{\mathrm{III}\,i} = \alpha\,\delta_{im}^{\mathrm{III}\,A} - \alpha\,\delta_{im}^{\mathrm{III}\,B}.$$

Wird daher der Hauptträger A noch mit der durch $\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)$ verzerrten Belastung des Hauptträgers B zusätzlich belastet, so biegt sich jeder Querscheibenanschlußpunkt genau so durch wie die entsprechende Querscheibe im System III.

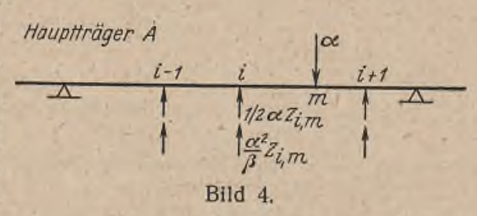


Bild 4.

$$(3,\ 4)\quad \alpha\,\delta_{Bm}^{\mathrm{III}\,i} = \alpha\,\delta_{im}^{\mathrm{III}\,A} - \frac{\alpha^2}{\beta}\cdot\delta_{im}^{\mathrm{III}\,B}\cdot\frac{J_c^B}{J_c^A}$$

$$= \alpha\,\delta_{im}^{\mathrm{III}\,A} - \alpha\,\delta_{im}^{\mathrm{III}\,B} = \alpha\,Z_{im}\,\delta_{BB}^{o\,i}.$$

Hierin bedeutet $\delta_{BB}^{o\,i}$ die Durchbiegung der auf den Hauptträgern A und $\bar{A}$ gestützten, vom Hauptträger B gelösten Querscheibe infolge $Z=1$.

Bild 5.

Das derartig belastete System kann daher auch als ein an den Querscheibenanschlußpunkten elastisch und an den Lagern starr gestützter Balken aufgefaßt werden, dessen elastische Stützung so groß ist, daß bei einer Durchbiegung $\alpha\,Z_{im}\,\delta_{BB}^{o\,i}$ die Federkraft $\alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}\right)Z_{im}$ auftritt. Der derartig gestützte Träger wird das System II genannt. Die Federkonstante der elastischen Stützung wird

$$(3,\ 5)\quad c = \frac{\alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}\right)Z_{im}}{\alpha\,Z_{im}\,\delta_{BB}^{o\,i}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}}{\delta_{BB}^{o\,i}}.$$

[Für $\alpha=\beta$ und gleichbleibendes Trägheitsmoment J^Q der Querscheibe wird

$$[3,\ 5]\quad c = \frac{72}{b^3}\cdot\frac{J^Q}{J_c^A}\Bigg].$$

Wird das System II als das mit den elastischen Stützkräften belastete System I aufgefaßt, so entstehen durch die Belastung mit der Kraft 1 die Momente

$$(3,\ 6)\quad M_{nm}^{\mathrm{II}} = M_{nm}^{\mathrm{I}} - \left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}\right)\sum_1^s M_{ni}^{\mathrm{I}}\,Z_{im}.$$

Nach Bild 3c betragen die wahren Biegemomente im System III

$$(3,\ 7)\quad \begin{cases} M_{n②}^{\mathrm{III}\,A} = \alpha\,M_{nm}^{\mathrm{III}\,A} = \alpha\,M_{nm}^{\mathrm{I}} - \frac{1}{2}\cdot\alpha\sum M_{ni}^{\mathrm{I}}\,Z_{im} \\ M_{n②}^{\mathrm{III}\,B} = \alpha\,M_{nm}^{\mathrm{III}\,B} = \alpha\sum M_{ni}^{\mathrm{I}}\,Z_{im}. \end{cases}$$

Diese Biegemomente lassen sich durch die Momente des Systems I und II im richtigen Mischungsverhältnis zusammensetzen

$$(3,\ 8)\quad \begin{cases} M_{n②}^{\mathrm{III}\,A} = \alpha\cdot\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}\cdot M_{nm}^{\mathrm{I}} + \frac{1}{2}\cdot M_{nm}^{\mathrm{II}}}{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}} \\ M_{n②}^{\mathrm{III}\,B} = \alpha\cdot\dfrac{M_{nm}^{\mathrm{I}} - M_{nm}^{\mathrm{II}}}{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}}. \end{cases}$$

3. System III.

Die endgültigen Biegemomente im System III ermitteln sich nun nach (3, 1) mit Hilfe von (3, 8) wie in Tafel 1 zusammengestellt.

Für die Querkräfte gilt sinngemäß das gleiche, wobei nur M durch Q zu ersetzen ist.

Die Übertragungskräfte selbst, deren Kenntnis zu der vorstehenden Ermittlung der Biegemomente und Querkräfte gar nicht benötigt wird, errechnen sich wie folgt:

Bei Belastung mit den Gruppenlasten ① und ③ entstehen keine Übertragungskräfte, so daß nur die Wirkung der Gruppenlast ② zu untersuchen ist. Augenscheinlich ist

$$(3,\ 9)\quad Z_{i,②}^{\mathrm{III}} = Q_{i,②}^{\mathrm{III}\,B} - Q_{i+1,②}^{\mathrm{III}\,B},$$

wenn mit Q_{i+1}^B und Q_i^B die Querkräfte rechts und links unmittelbar neben dem Anschlußpunkt der Querscheibe i am Hauptträger B bezeichnet werden. Nach (3, 8) ist jedoch

$$(3,\ 10)\quad Q_{i,②}^{\mathrm{III}\,B} - Q_{i+1,②}^{\mathrm{III}\,B} = \frac{\alpha}{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}}\left(Q_{im}^{\mathrm{I}} - Q_{i+1,m}^{\mathrm{I}} - Q_{im}^{\mathrm{II}} + Q_{i+1,m}^{\mathrm{II}}\right).$$

Nun ist

$$Q_{im}^{\mathrm{I}} = Q_{i+1,m}^{\mathrm{I}} \quad\text{und}\quad Q_{i+1,m}^{\mathrm{II}} - Q_{im}^{\mathrm{II}} = A_{im}^{\mathrm{II}}$$

gleich dem Auflagerdruck der elastischen Stütze i.

Infolge der Gruppenlast ② ist also

$$(3,\ 11)\quad Z_{i②} = \frac{\alpha\,A_{im}^{\mathrm{II}}}{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Mit Hilfe von (3, 1) wird also

$$(3,\ 12)\quad \begin{cases} Z_{iA}^{\mathrm{III}} = \dfrac{A_{im}^{\mathrm{II}}}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}} = Z_{i\bar{A}}^{\mathrm{III}} \\ Z_{iB}^{\mathrm{III}} = -\dfrac{2\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot A_{im}^{\mathrm{II}}}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}. \end{cases}$$

Die allgemeinen Angaben für die praktische Berechnung sind im Teil F angegeben.

Tafel 1.

Zustandslinien ↓ / Einflußlinien →	Durch Last 1 im Punkt m des Hauptträgers A: M_{nm}^{I}	A: M_{nm}^{II}	B: M_{nm}^{I}	B: M_{nm}^{II}	$\bar{A}$: M_{nm}^{I}	$\bar{A}$: M_{nm}^{II}	wird das Moment im Hauptträger — Faktor
	$+\frac{\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	$+\frac{\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	$+\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	$-\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	$-\frac{\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	$+\frac{\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	A
	$+\frac{1}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	$-\frac{1}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	$+\frac{1}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	$+\frac{2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	$+\frac{1}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	$-\frac{1}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	B
	$-\frac{\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	$+\frac{\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	$+\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	$-\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	$+\frac{\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	$+\frac{\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$	$\bar{A}$

4. Besonderheiten bei Trägerrosten mit drei Hauptträgern.

Die besonders einfachen Beziehungen bei Trägerrosten mit drei Hauptträgern haben noch zwei Eigenschaften, die für die praktische Berechnung äußerst willkommen sind.

Wie aus Tafel 1 ersichtlich ist, stehen $M_{nB}^{\mathrm{III}\,A}$ und $M_{n\bar{A}}^{\mathrm{III}\,A}$ im konstanten Verhältnis zueinander, das nicht von der Steifigkeit der Querscheiben — Größe der Federkonstanten im System II — abhängig ist. Das bedeutet, daß die Querlastscheide der Einflußlinie für Punkte des Hauptträgers A unabhängig von den geometrischen Abmessungen und dem Verhältnis der Trägheitsmomente $\frac{J_c^A}{J^Q}$ im Abstand $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{1+2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}\cdot b$

vom mittleren Hauptträger liegt. Selbstverständlich kann zwischen den Hauptträgern A und B, besonders im Bereich der Wechselmomente (wenn $|\eta^{I}| < |\eta^{II}|$ ist), noch eine Lastscheide liegen. Die gleichbleibende Lastscheide zwischen den Hauptträgern B und $\bar{A}$ läßt jedoch eine große Vereinfachung der bei Trägerrosten äußerst langwierigen Auswertung der Einflußlinien zu.

Werden ferner die Einflußlinien in der nachstehenden Tabellenform ermittelt, so geht man zweckmäßigerweise wie folgt vor:

Bild 6.

Tafel 2.

Last steht im Punkt	Einflußlinie für das Moment im Punkt ..n... des Hauptträgers A			B	
	bei Belastung des Hauptträgers				
	A	B	$\bar{A}$	A	B
0					
1			$\times\frac{\alpha}{\beta}$		
2	$\eta_{nA}^{III\,A}$	$\eta_{nB}^{III\,A}$	$\eta_{n\bar{A}}^{III\,A}$	$\eta_{nA}^{III\,B}$	$\eta_{nB}^{III\,B}$
3		$+\eta_n^{I}$	$\times -\frac{1}{2}$	+	η_n^{II}

(3, 13) Zunächst wird $\eta_{nA}^{III\,B} = \dfrac{\eta_n^{I} - \eta_n^{II}}{1 + 2\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$ berechnet.

Aus diesen Werten folgt sofort

$$\eta_{n\bar{A}}^{III\,A} = -\frac{1}{2}\cdot\eta_{nA}^{III\,B} \quad \text{sowie}$$

$$\eta_{nB}^{III\,B} = \eta_{nA}^{III\,B} + \eta_n^{II} \quad \text{und}$$

$$\eta_{nB}^{III\,A} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\eta_{nA}^{III\,B}; \quad \text{und schließlich wird}$$

$$\eta_{nA}^{III\,A} = \eta_{n\bar{A}}^{III\,A} + \eta_n^{I}.$$

Diese Rechnungen sind mit einer Rechenschieberstellung bzw. durch einfache Addition möglich.

D. Trägerrost mit vier Hauptträgern.

1. Gruppenlasten.

Hier ergeben sich folgende Gruppenlasten:

Gruppenlast ① erzeugt gleiche Durchbiegungen aller Hauptträger, so daß keine Übertragungskräfte entstehen;

Gruppenlast ② erzeugt gleiche Durchbiegungen der Hauptträger A und $\bar{A}$ bzw. B und $\bar{B}$, so daß die Übertragungskräfte $Z_{i②}$ auch gleich werden;

Gruppenlast ③ erzeugt gegengleiche Durchbiegungen der Hauptträger A und $\bar{A}$ bzw. $\bar{B}$ und B. Die Übertragungskräfte $Z_{i③}$ sind daher auch gegengleich;

Gruppenlast ④ verdreht nur das Tragwerk, da der dreimal so weit von der Brückenachse entfernte Hauptträger A sich auch dreimal so stark durchbiegt wie der Hauptträger B. Übertragungskräfte entstehen daher nicht.

Bild 7.

Eine Belastung des Hauptträgers A mit einer Last 1 entsteht durch die Summe der Gruppenlasten

(4, 1)
$$p^A = 1 = \frac{②+③}{2\alpha},$$

des Hauptträgers B durch

$$p^B = 1 = \frac{①-②-3\cdot③+④}{2\beta},$$

des Hauptträgers $\bar{B}$ durch

$$p^{\bar{B}} = 1 = \frac{①-②+3\cdot③-④}{2\beta}$$

und des Hauptträgers $\bar{A}$ durch

$$p^{\bar{A}} = 1 = \frac{②-③}{2\alpha}.$$

Für die Lastverteilung brauchen also nur die Gruppenlasten ② und ③ untersucht zu werden. Die Einflußlinien der Gruppenlasten ① und ④ ergeben sich sofort im System I, das keiner näheren Erläuterungen bedarf.

2. Gruppenlast ②.

Werden aus obigem endgültigen System IV (Bild 8a) nach Belastung mit der Gruppenlast ② die Hauptträger unter Hinzufügung der Schnittkräfte herausgeschnitten, so entstehen die in Bild 8c dargestellten Belastungsbilder für das System I. Die Durchbiegungen der Querscheibenanschlußpunkte betragen:

(4, 2)
$$\alpha\,\delta_{im}^{IV\,A} = \alpha\,\delta_{im}^{I\,A} - \alpha\sum_{1}^{s} Z_{km}\,\delta_{ik}^{I\,A}$$

$$\alpha\,\delta_{im}^{IV\,B} = \alpha\sum_{1}^{s} Z_{km}\,\delta_{ik}^{I\,B}$$

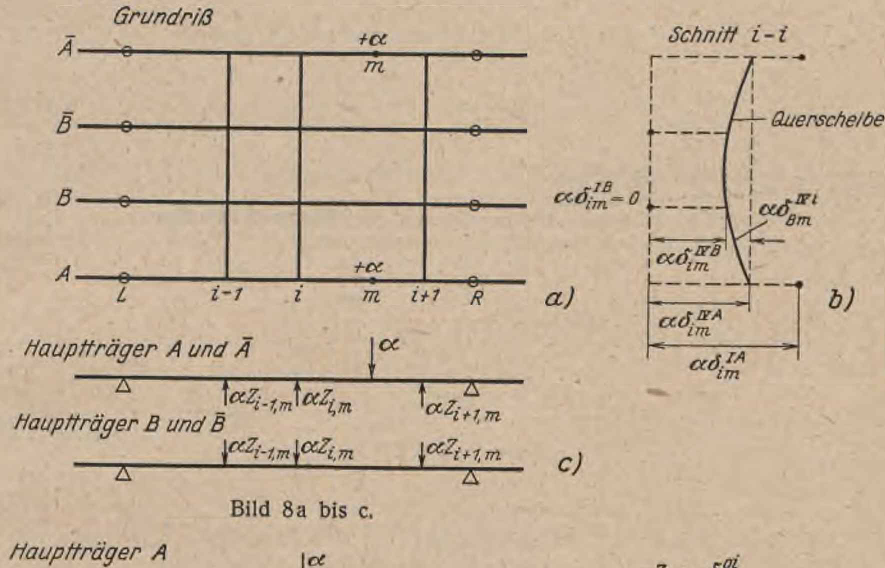


Bild 8a bis c.

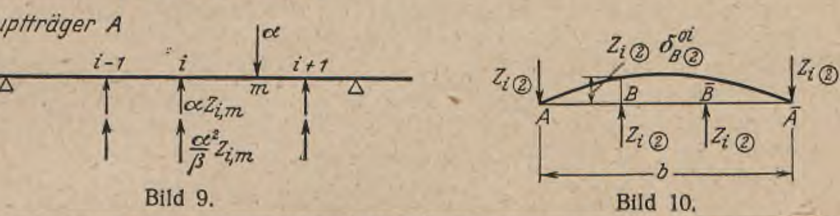


Bild 9.

Bild 10.

Nach (2) ist jedoch die Durchbiegung des Punktes B bzw. $\bar{B}$ der Querscheibe i gleich der Differenz der Durchbiegungen der Hauptträger A und B

(4, 3)
$$\alpha\,\delta_{Bm}^{IV\,i} = \alpha\,\delta_{im}^{IV\,A} - \alpha\,\delta_{im}^{IV\,B}.$$

Wird nun auf den Hauptträger A außer der tatsächlich auf ihn entfallenden, in Bild 8c gezeigten Belastung noch die negative $\frac{\alpha}{\beta}$-fache Belastung des Hauptträgers B gebracht, so biegt sich jeder Querscheibenanschlußpunkt genau so durch wie die entsprechende Querscheibe im System IV.

(4, 4)
$$\alpha\,\delta_{Bm}^{IV\,i} = \alpha\,\delta_{im}^{IV\,A} - \frac{\alpha^2}{\beta}\cdot\delta_{im}^{IV\,B}\cdot\frac{J_c^B}{J_c^A}$$

$$= \alpha\,\delta_{im}^{IV\,A} - \alpha\,\delta_{im}^{IV\,B} = \alpha\,Z_{im}\,\delta_{B②}^{o\,i}.$$

Hierin bedeutet $\delta_{B②}^{o\,i}$ die Durchbiegung des Punktes B der auf den Hauptträgern A und $\bar{A}$ gestützten und von den Hauptträgern B und $\bar{B}$ gelösten Querscheibe i unter der Übertragungsgruppenlast $Z_{i②} = 1$.

Bild 11.

Die an den Querscheibenanschlußpunkten i entstehenden Durchbiegungen sind also wieder direkt den in ihnen wirkenden Kräften proportional. Daher kann das derartig belastete System I auch als ein in den Querscheibenanschlußpunkten elastisch und an den Lagern starr gestützter Träger aufgefaßt werden, dessen elastische Stützung so groß ist, daß bei einer Durchbiegung von $\alpha\,Z_{im}\,\delta_{B②}^{o\,i}$ die Federkraft $\alpha\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)Z_{im}$ auftritt. Der derartig gestützte Träger wird das System II genannt.

Die Federkonstante der elastischen Stützung beträgt:

$$(4,\ 5)\qquad c_{\textcircled{2}} = \frac{\alpha\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right) Z_{im}}{\alpha Z_{im}\,\delta^{oi}_{B\textcircled{2}}} = \frac{1+\frac{\alpha}{\beta}}{\delta^{oi}_{B\textcircled{2}}}.$$

[Für $\alpha = \beta$ und gleichbleibendes Trägheitsmoment J^Q der Querscheibe wird

$$[4,\ 5]\qquad c_{\textcircled{2}} = \frac{64{,}80}{b^3}\cdot\frac{J^Q}{J^A_c}\Bigg].$$

Wird das System II als das mit den elastischen Stützkräften belastete System I aufgefaßt, so entstehen bei Belastung mit der Last 1 die Momente

$$(4,\ 6)\qquad M^{\mathrm{II}}_{nm} = M^{\mathrm{I}}_{nm} - \left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\sum_1^s M^{\mathrm{I}}_{ni} Z_{im}.$$

Nach Bild 8c betragen die wahren Biegemomente im System IV:

$$(4,\ 7)\qquad \begin{cases} M^{\mathrm{IV}A}_{n\textcircled{2}} = \alpha M^{\mathrm{IV}A}_{nm} = \alpha M^{\mathrm{I}}_{nm} - \alpha \sum_1^s M^{\mathrm{I}}_{ni} Z_{im} \\ M^{\mathrm{IV}B}_{n\textcircled{2}} = \alpha M^{\mathrm{IV}B}_{nm} = \qquad\qquad \alpha \sum_1^s M^{\mathrm{I}}_{ni} Z_{im}. \end{cases}$$

Die Biegemomente lassen sich nun durch die Momente im System I und II im richtigen Mischungsverhältnis zusammensetzen.

$$(4,\ 8)\qquad \begin{cases} M^{\mathrm{IV}A}_{n\textcircled{3}} = \alpha\cdot\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}\cdot M^{\mathrm{I}}_{nm} + M^{\mathrm{II}}_{nm}}{1+\frac{\alpha}{\beta}} \\ M^{\mathrm{IV}B}_{n\textcircled{2}} = \alpha\cdot\dfrac{M^{\mathrm{I}}_{nm} - M^{\mathrm{II}}_{nm}}{1+\frac{\alpha}{\beta}}. \end{cases}$$

3. Gruppenlast ③.

Auf Grund desselben Gedankenganges wird die tatsächliche Belastung des Systems IV durch die Gruppenlast ③ in Bild 12c dargestellt, und es ist:

$$(4,\ 9)\qquad \begin{cases} \alpha\,\delta^{\mathrm{IV}A}_{im} = \alpha\,\delta^{\mathrm{I}A}_{im} - \frac{1}{3}\cdot\alpha\sum_1^s Z_{km}\,\delta^{\mathrm{I}A}_{ik} \\ \alpha\,\delta^{\mathrm{IV}B}_{im} = \qquad\qquad + \alpha\sum_1^s Z_{km}\,\delta^{\mathrm{I}B}_{ik}. \end{cases}$$

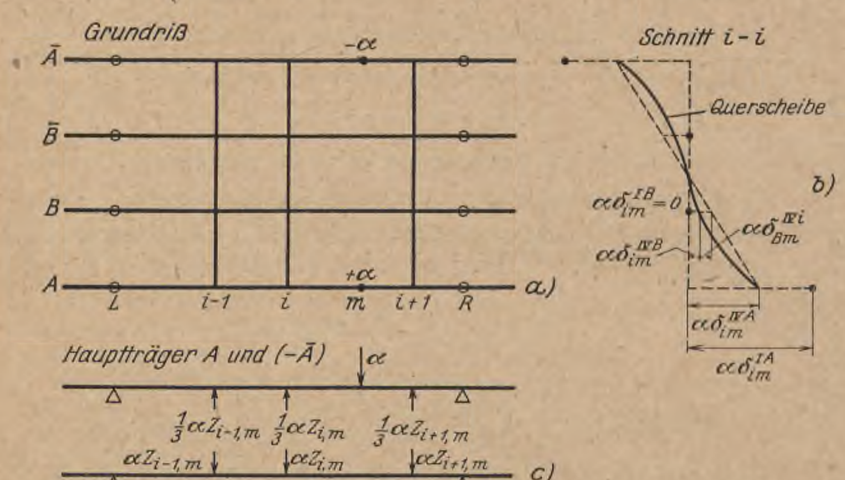


Bild 12a bis c.

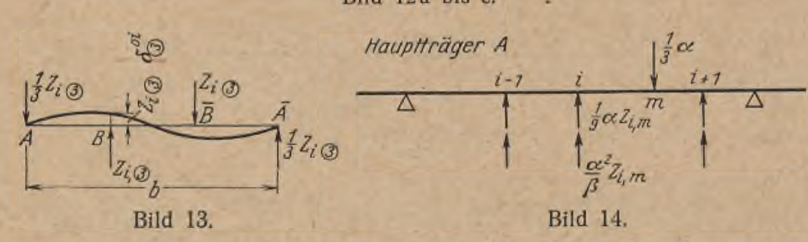


Bild 13. Bild 14.

Die Querscheiben werden hierbei durch das Kräftepaar $Z_{i\textcircled{3}}$ gegengleich belastet. Die Durchbiegung des Punktes B der Querscheibe i, $\alpha\,\delta^{\mathrm{IV}\,i}_{Bm}$, ist nach (2) gleich der Differenz der entsprechenden Hauptträgerdurchbiegungen

$$(4,\ 10)\qquad \alpha\,\delta^{\mathrm{IV}\,i}_{Bm} = \frac{1}{3}\cdot\alpha\,\delta^{\mathrm{IV}A}_{im} - \alpha\,\delta^{\mathrm{IV}B}_{im}.$$

Wird wiederum auf den Hauptträger A im System I $\frac{1}{3}$ seiner tatsächlichen und die negative $\frac{\alpha}{\beta}$-fache Belastung des Hauptträgers B aufgebracht, so biegt sich jeder Querscheibenanschlußpunkt genau so durch wie die entsprechende Querscheibe im System IV bei Belastung mit der Gruppenlast ③.

$$(4,\ 11)\qquad \alpha\,\delta^{\mathrm{IV}\,i}_{Bm} = \frac{1}{3}\cdot\alpha\,\delta^{\mathrm{IV}A}_{im} - \frac{\alpha}{\beta}\cdot\alpha\,\delta^{\mathrm{IV}B}_{im}\cdot\frac{J^B_c}{J^A_c}$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\alpha\,\delta^{\mathrm{IV}A}_{im} - \alpha\,\delta^{\mathrm{IV}B}_{im} = \alpha\,Z_{im}\,\delta^{oi}_{B\textcircled{3}};$$

bzw. unter dem Dreifachen der angegebenen Belastung biegen sich die Querscheibenanschlußpunkte des Hauptträgers A im System I dreimal so viel durch wie die entsprechenden Querscheiben im System IV unter der Gruppenlast ③.

In (4, 11) bedeute $\delta^{oi}_{B\textcircled{3}}$ die Durchbiegung des Punktes B der auf den Hauptträgern A und $\bar{A}$ gelagerten, vom Hauptträger B gelösten Querscheibe i unter der Übertragungsgruppenlast $Z_{i\textcircled{3}} = 1$ nach Bild 13.

Der so (mit dem Dreifachen) belastete Träger wird wiederum als elastisch in den Querscheibenanschlußpunkten gestützter Träger aufgefaßt, nur daß seine Federkonstanten andere als im System II sind.

In diesem System III entstehen bei der Durchbiegung $3\,\alpha\,Z_{im}\,\delta^{oi}_{B\textcircled{3}}$ die elastischen Stützkräfte $3\,\alpha\left(\frac{1}{9}+\frac{\alpha}{\beta}\right)Z_{im}$, so daß die Federkonstante

$$(4,\ 12)\qquad c_{\textcircled{3}} = \frac{3\,\alpha\left(1+9\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)Z_{im}}{9\cdot 3\,\alpha\,Z_{im}\,\delta^{oi}_{B\textcircled{3}}} = \frac{1+9\cdot\frac{\alpha}{\beta}}{9\,\delta^{oi}_{B\textcircled{3}}}\ \text{wird.}$$

[Für $\alpha = \beta$ und gleichbleibendes Trägheitsmoment J^Q der Querscheibe wird

$$[4,\ 12]\qquad c_{\textcircled{3}} = \frac{540}{b^3}\cdot\frac{J^Q}{J^A_c}\Bigg].$$

Die Stützung ist also erheblich steifer als im System II.

Wird nun wiederum das System III als das mit den elastischen Stützkräften belastete System I aufgefaßt, so lassen sich die Momente usw. infolge der Kraft 1 wie folgt berechnen:

$$(4,\ 13)\qquad M^{\mathrm{III}}_{nm} = 3\left(\frac{1}{3}\cdot M^{\mathrm{I}}_{nm} - \frac{1+9\cdot\frac{\alpha}{\beta}}{9}\cdot\sum Z_{im}\,M^{\mathrm{I}}_{ni}\right).$$

Nach Bild 12c betragen die Momente im endgültigen System IV

$$(4,\ 14)\qquad \begin{cases} M^{\mathrm{IV}A}_{n\textcircled{3}} = \alpha\,M^{\mathrm{IV}A}_{nm} = \alpha\,M^{\mathrm{I}}_{nm} - \frac{1}{3}\cdot\alpha\sum M^{\mathrm{I}}_{ni} Z_{im} \\ M^{\mathrm{IV}B}_{n\textcircled{3}} = \alpha\,M^{\mathrm{IV}B}_{nm} = \qquad\qquad \alpha\sum M^{\mathrm{I}}_{ni} Z_{im}. \end{cases}$$

Die endgültigen Momente lassen sich also wieder aus den Momenten der Systeme I und III im richtigen Mischungsverhältnis zusammensetzen.

$$(4,\ 15)\qquad \begin{cases} M^{\mathrm{IV}A}_{n\textcircled{3}} = \alpha\cdot\dfrac{9\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot M^{\mathrm{I}}_{nm} + M^{\mathrm{III}}_{nm}}{1+9\cdot\frac{\alpha}{\beta}} \\ M^{\mathrm{IV}B}_{n\textcircled{3}} = \alpha\cdot\dfrac{3\,M^{\mathrm{I}}_{nm} - 3\,M^{\mathrm{III}}_{nm}}{1+9\cdot\frac{\alpha}{\beta}}. \end{cases}$$

4. System IV.

Die endgültigen Biegemomente im System IV ermitteln sich nun nach (4, 1) mit Hilfe von (4, 8) und (4, 15) wie in Tafel 3 zusammengestellt.

Auch für die Querkräfte gilt wiederum sinngemäß Tafel 3.

Die Übertragungskraft $Z^{\mathrm{IV}B}_{im}$ bzw. $Z^{\mathrm{IV}B}_{im}$ wird wiederum aus der Differenz der Querkräfte rechts und links vom Querträgeranschlußpunkt i bestimmt.

$$(4,\ 16)\qquad Z^{\mathrm{IV}B}_{im} = Q^{\mathrm{IV}B}_{im} - Q^{\mathrm{IV}B}_{i+1,\,m}.$$

Die Querkräfte können hierbei aus Tafel 3 entnommen werden. Unter Beachtung, daß

$$(4,\ 17)\qquad Q^{\mathrm{I}}_{im} = Q^{\mathrm{I}}_{i+1,\,m},\quad\text{und}\quad Q^{\mathrm{II}}_{i+1,\,m} - Q^{\mathrm{II}}_{i,\,m} = A^{\mathrm{II}}_{im}$$
$$\text{bzw.}\quad Q^{\mathrm{III}}_{i+1,\,m} - Q^{\mathrm{III}}_{i,\,m} = A^{\mathrm{III}}_{im}$$

Tafel 3

$N_2 = \frac{1}{1+\frac{\alpha}{\beta}}$ $\qquad$ $N_3 = \frac{1}{1+9\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$

	Durch die Last 1 im Punkt m des Hauptträgers A			B			$\bar{B}$			$\bar{A}$			wird das Moment im Punkt n des Hauptträgers
	$N_2 N_3 \overset{I}{M}_{nm}$	$N_2 \overset{II}{M}_{nm}$	$N_3 \overset{III}{M}_{nm}$	$N_2 N_3 \overset{I}{M}_{nm}$	$N_2 \overset{II}{M}_{nm}$	$N_3 \overset{III}{M}_{nm}$	$N_2 N_3 \overset{I}{M}_{nm}$	$N_2 \overset{II}{M}_{nm}$	$N_3 \overset{III}{M}_{nm}$	$N_2 N_3 \overset{I}{M}_{nm}$	$N_2 \overset{II}{M}_{nm}$	$N_3 \overset{III}{M}_{nm}$	Faktor
Zustandslinien	$+\frac{\alpha}{\beta}\left(5+9\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{\alpha}{\beta}\left(2+6\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$-\frac{3}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$+\frac{\alpha}{\beta}\left(-1+3\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$+\frac{3}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$-\;4\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	A
	$+2+6\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$+\;1+5\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$+\frac{9}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$+\;4\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$-\frac{9}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$-\;1+3\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{2}$	B
	$-1+3\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{2}$	$+\;4\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$-\frac{9}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$+\;1+5\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$+\frac{9}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$+\;2+6\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\bar{B}$
	$-\;4\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{\alpha}{\beta}\left(-1+3\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$+\frac{3}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$+\frac{\alpha}{\beta}\left(2+6\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$-\frac{3}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}$	$+\frac{\alpha}{\beta}\left(5+9\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$\bar{A}$
	Einflußlinien →												

ist, wird

$$(4, 18)\quad \left\{\begin{aligned}
Z_{iA}^{IVB} &= \frac{\frac{1}{2}\cdot A_{im}^{II}}{1+\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{\frac{3}{2}\cdot A_{im}^{III}}{1+9\cdot\frac{\alpha}{\beta}}\\
Z_{iB}^{IVB} &= -\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot A_{im}^{II}}{1+\frac{\alpha}{\beta}} - \frac{\frac{9}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot A_{im}^{III}}{1+9\cdot\frac{\alpha}{\beta}}\\
Z_{i\bar{B}}^{IVB} &= -\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot A_{im}^{II}}{1+\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{\frac{9}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot A_{im}^{III}}{1+9\cdot\frac{\alpha}{\beta}}\\
Z_{i\bar{A}}^{IVB} &= \frac{\frac{1}{2}\cdot A_{im}^{II}}{1+\frac{\alpha}{\beta}} - \frac{\frac{3}{2}\cdot A_{im}^{III}}{1+9\cdot\frac{\alpha}{\beta}}.
\end{aligned}\right.$$

Die Übertragungskräfte am Hauptträger $\bar{B}$ entstehen durch Vertauschung von A in $\bar{A}$ bzw. B in $\bar{B}$ und umgekehrt.

Die allgemeinen Angaben für die praktische Berechnung sind im Teil F angegeben.

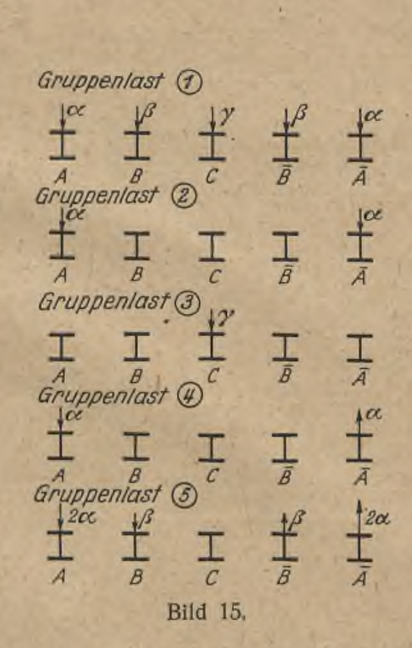


Bild 15.

E. Trägerrost mit fünf Hauptträgern.

1. Gruppenlasten.

Grundsätzlich ändert sich der allgemeine Gedankengang auch bei Trägerrosten mit fünf Hauptträgern nicht. Jedoch ist bei Trägerrosten mit mehr als vier Hauptträgern zur Bestimmung der Federkonstanten der Hilfssysteme II bis römisch $(t-1)$ noch eine zusätzliche Zwischenrechnung notwendig, die am Beispiel mit fünf Hauptträgern gezeigt werden soll.

Die Hauptträger A, B, C, $\bar{B}$, $\bar{A}$ mit proportionalen Trägheitsmomenten nach (1) werden mit den fünf Gruppenlasten nach Bild 15 belastet. Während die Gruppenlasten ① und ⑤ keine Übertragungskräfte erzeugen, entstehen beim Aufbringen der Gruppenlasten ②, ③ und ④ Übertragungskräfte. Die Einheitsbelastungen der einzelnen Hauptträger entstehen aus

$$(5, 1)\quad \left\{\begin{aligned}
P^A &= 1 = \frac{②+④}{2\alpha}\\
P_B &= 1 = \frac{①-②-③-2\cdot④+⑤}{2\beta}\\
P^C &= 1 = \frac{③}{\gamma}\\
P^{\bar{B}} &= 1 = \frac{①-②-③+2\cdot④-⑤}{2\beta}\\
P^{\bar{A}} &= 1 = \frac{②-④}{2\alpha}.
\end{aligned}\right.$$

2. Gruppenlast ②.

Werden aus dem Trägerrost nach Belastung mit der Gruppenlast ② die Hauptträger herausgeschnitten, so zeigt Bild 16c das dabei entstehende Belastungsbild. Die Durchbiegung der Querscheibe i zeigt Bild 16b. Hierbei ist

$$(5, 2)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta_{Bm}^{Vi} &= Z_{im}^{B}\,\delta_{BB}^{oi} + Z_{im}^{C}\,\delta_{BC}^{oi} \quad \text{und}\\
\delta_{Cm}^{Vi} &= Z_{im}^{B}\,\delta_{CB}^{oi} + Z_{im}^{C}\,\delta_{CC}^{oi},
\end{aligned}\right.$$

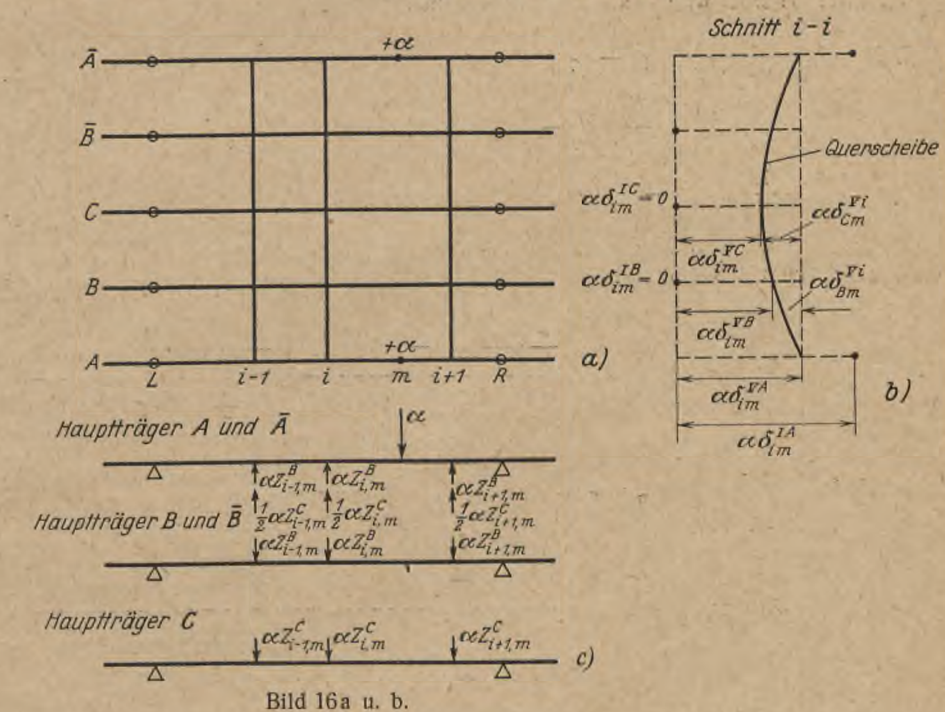


Bild 16a u. b.

wobei die Durchbiegung δ_{BB}^{oi} die Durchbiegung der auf den Hauptträgern A und $\bar{A}$ gestützten, von den Hauptträgern B, C und $\bar{B}$ gelösten Querscheibe unter der Übertragungsgruppenlast $Z^B = 1$ ist. Zu beachten ist, daß $\delta_{BC}^{oi} = \frac{1}{2}\cdot\delta_{CB}^{oi}$, also $\delta_{BC}^{oi} \neq \delta_{CB}^{oi}$ ist, da die Übertragungslast Z^B eine Gruppenlast ist.

Der übliche weitere Gedankengang:

b) die negative $\frac{\alpha}{\beta}$-fache Belastung des Hauptträgers B,

c) bzw. die negative $\frac{\alpha}{\beta}$-fache Belastung des Hauptträgers C

auf dem Hauptträger A aufzubringen, damit der Hauptträger A im Punkt i dieselbe Durchbiegung hat wie der Punkt B bzw. C der Querscheibe i, läßt sich auch hier anwenden.

$$\text{b)}\quad \alpha\,\delta^{VA}_{im} - \frac{\alpha^2}{\beta}\cdot\delta^{VB}_{im} = \alpha\,\delta^{Vi}_{Bm}$$

$$\text{c)}\quad \alpha\,\delta^{VA}_{im} - \frac{\alpha^2}{\gamma}\cdot\delta^{VC}_{im} = \alpha\,\delta^{Vi}_{Cm}$$

oder ausführlicher unter Beachtung von Bild 16c und (5, 2)

$$(5,\ 3)\quad \begin{cases} \text{b)}\ \ \alpha\,\delta^{IA}_{im} - \alpha\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\sum Z^B_{km}\,\delta^{IA}_{ik} - \frac{1}{2}\cdot\alpha\sum Z^C_{km}\,\delta^{IA}_{ik} \\ \qquad\qquad = \alpha\,Z^B_{im}\,\delta^{oi}_{BB} + \alpha\,Z^C_{im}\,\delta^{oi}_{BC} \\ \text{c)}\ \ \alpha\,\delta^{IA}_{im} - \alpha\sum Z^B_{km}\,\delta^{IA}_{ik} - \alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)\sum Z^C_{km}\,\delta^{IA}_{ik} \\ \qquad\qquad = \alpha\,Z^B_{im}\,\delta^{oi}_{CB} + \alpha\,Z^C_{im}\,\delta^{oi}_{CC}. \end{cases}$$

An dem Querscheibenanschlußpunkt i wirkt also der Durchbiegung die Kraft entgegen:

$$(5,\ 4)\quad \begin{cases} \text{b)}\ \ \alpha\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)Z^B_{im} + \frac{1}{2}\cdot\alpha\,Z^C_{im} \quad \text{bzw.} \\ \text{c)}\ \ \alpha\,Z^B_{im} + \alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)Z^C_{im}, \\ \text{wobei eine Durchbiegung in diesem Punkt von} \\ \text{b)}\ \ \alpha\,Z^B_{im}\,\delta^{oi}_{BB} + \alpha\,Z^C_{im}\,\delta^{oi}_{BC} \quad \text{bzw.} \\ \text{c)}\ \ \alpha\,Z^B_{im}\,\delta^{oi}_{CB} + \alpha\,Z^C_{im}\,\delta^{oi}_{CC} \end{cases}$$

eintritt. Bei dieser Belastung wäre also die aus (5, 4) gebildete Federkonstante eine Funktion von den unbekannten und mit der Laststellung sich ändernden Übertragungskräften Z^B_{im} und Z^C_{im}. Die Federkonstante hätte somit keine für das behandelte System feststehende Größe.

Es ist jedoch möglich, die Federkonstante von der Kenntnis der Übertragungskräfte Z^B_{im} und Z^c_{im} unabhängig zu machen, wenn zu der Differenzbelastung b) die mit φ verzerrte Differenzbelastung c) hinzugefügt wird. Hierbei wird φ aus der quadratischen Gleichung

$$(5,\ 5)\quad \varphi^2\left[+\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)\delta^{oi}_{CB} - \delta^{oi}_{CC}\right] + \varphi\left[+\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)\delta^{oi}_{BB} - \left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\delta^{oi}_{CC}\right] + \frac{1}{2}\left[+\delta^{oi}_{BB} - \left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\delta^{oi}_{CB}\right] = 0 \quad \text{ermittelt.}$$

[Für $\alpha=\beta=\gamma$ und ein gleichbleibendes Trägheitsmoment der Querscheibe J^Q lautet diese Gleichung

$$[5,\ 5]\qquad 17\,\varphi^2 - 8\,\varphi - 14 = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$\varphi_{II} = +\,1{,}1728 \quad \text{und} \quad \varphi_{III} = -\,0{,}7022.]$$

Die Durchbiegung des Querscheibenanschlußpunkts i wird dann infolge der Last $\alpha\,(1+\varphi)$ im Punkt m

$$(5,\ 6)\quad \begin{cases} \alpha(1+\varphi)\,\delta^{IIA}_{im} = \alpha\,\delta^{Vi}_{Bm} + \alpha\,\varphi\,\delta^{Vi}_{Cm} \\ \text{bzw. infolge der Last } \alpha \\ \alpha\,\delta^{IIA}_{im} = \frac{\alpha}{1+\varphi}\left(\delta^{Vi}_{Bm} + \varphi\,\delta^{Vi}_{Cm}\right). \end{cases}$$

Das derartig belastete System läßt sich wiederum als Balken mit zusätzlicher elastischer Stützung in den Querscheibenanschlußpunkten auffassen. Und zwar entstehen — entsprechend den zwei Lösungen der quadratischen Gleichungen — die zwei Systeme System II mit φ_{II} und System III mit φ_{III}.

Das Belastungsbild für die somit hergestellten Systeme II und III ist in Bild 17 gekennzeichnet.

Hauptträger A
1
i-1 i i+1
L m R
$\frac{1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi}{1+\varphi}Z^B_{im} + \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varphi+\frac{\alpha}{\gamma}\varphi}{1+\varphi}Z^C_{im}$

Bild 17.

Hierin ist φ bei System II durch φ_{II} und bei System III durch φ_{III}, den Lösungen der Gl. (5, 5), zu ersetzen.

Die Federkonstanten betragen für System II:

$$(5,\ 7)\quad c_{②} = \frac{1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{II}}{\delta^{oi}_{BB} + \varphi_{II}\,\delta^{oi}_{CB}} \quad \text{bzw.} \quad c_{②} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}}{\delta^{oi}_{BC} + \varphi_{II}\,\delta^{oi}_{CC}}.$$

Beide Werte müssen sich decken.

[Für $\alpha=\beta=\gamma$ und $J^Q=$ konst wird

$$[5,\ 7]\qquad c_{②} = \frac{58{,}292}{b^3}\cdot\frac{J^Q}{J^A_c}\Big];$$

für System III:

$$(5,\ 8)\quad c_{③} = \frac{1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{III}}{\delta^{oi}_{BB} + \varphi_{III}\,\delta^{oi}_{CB}} \quad \text{bzw.} \quad c_{③} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}}{\delta^{oi}_{BC} + \varphi_{III}\,\delta^{oi}_{CC}}.$$

Auch hier müssen sich beide Werte decken.

[Für $\alpha=\beta=\gamma$ und $J^Q=$ konst

$$[5,\ 8]\qquad c_{③} = \frac{1806{,}85}{b^3}\cdot\frac{J^Q}{J^A_c}\Big].$$

Die Momente usw. in den Hauptträgern A, B und C infolge der Gruppenlast ② sind aus dem System I und den beiden oben erläuterten Systemen II und III zusammenzusetzen.

$$(5,\ 9)\quad \begin{cases} M^{VA}_{n②} = \alpha\,M^{VA}_{nm} = \alpha\cdot\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}(\varphi_{III}-\varphi_{II})\,M^{I}_{nm} + \left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)(1+\varphi_{II})\,M^{II}_{nm} - \left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)(1+\varphi_{III})\,M^{III}_{nm}}{\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)(\varphi_{III}-\varphi_{II})} \\ M^{VB}_{n②} = \alpha\,M^{VB}_{nm} = \alpha\cdot\dfrac{\frac{\alpha}{\gamma}(\varphi_{III}-\varphi_{II})\,M^{I}_{nm} - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)(1+\varphi_{II})\,M^{II}_{nm} + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)(1+\varphi_{III})\,M^{III}_{nm}}{\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)(\varphi_{III}-\varphi_{II})} \\ M^{VC}_{n②} = \alpha\,M^{VC}_{nm} = \alpha\cdot\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}(\varphi_{III}-\varphi_{II})\,M^{I}_{nm} + \left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{III}\right)(1+\varphi_{II})\,M^{II}_{nm} - \left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{I_I}\right)(1+\varphi_{III})\,M^{III}_{nm}}{\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)(\varphi_{III}-\varphi_{II})}. \end{cases}$$

(Schluß folgt.)

INHALT: Eine einfache Näherungsformel zur Berechnung gedrückter Rahmenstäbe. — Anleitung für die strenge Trägerrostberechnung.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt. — Verlag: Wilh. Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9. Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Organ des Arbeitskreises „Stahlbau" der Fachgruppe Bauwesen im NS.-Bund Deutscher Technik

15. Jahrgang BERLIN, 11. Dezember 1942 Heft 25/26

Auf Grund besonderer Kriegsmaßnahmen wurde verfügt, daß mit Rücksicht auf die Papiereinsparung die Zeitschrift „Der Stahlbau" während des Krieges nur noch als selbständige Zeitschrift erscheinen darf. Es besteht deshalb keine Möglichkeit mehr, das Blatt auch weiterhin der „Bautechnik" beizulegen.

Bestellungen auf die Zeitschrift „Der Stahlbau" bitten wir ab Januar 1943 gesondert aufzugeben.

Schriftwaltung und Verlag.

Der Durchlaufträger auf federnden Stützen.

Von Dr.-Ing. **Josef Wilke** VDI, Berlin.

Übersicht: Es wird ein allgemeingültiges Berechnungsverfahren gezeigt, das auf der Lösung des homogenen Gleichungssystems beruht[1]); es führt, ähnlich wie auch bei anderen Tragwerksarten (vgl. Fußnoten 2, 3 und 4), zu einem geschlossenen Zahlenbild, in dem das gesamte Lösungssystem des Problems übersichtlich und zwangsläufig zur Darstellung gelangt.

Die hierbei angesetzten Reduktionsstufen des Gaußschen Eliminationsverfahrens werden statisch gedeutet; auf diese Weise wird die meist rein mechanisch durchgeführte mathematische Rechenoperation der Gleichungsauflösung mit allen ihren feinsten Verästelungen der Vorstellungswelt des Bauingenieurs nähergebracht. Durch die Anwendung des abgekürzten Verfahrens zur Auflösung von linearen Gleichungssystemen — das der Verfasser während seiner praktischen Hochschultätigkeit in Prag vor bereits mehr als 10 Jahren u. a. auch auf der Lehrkanzel für Betonbau eingeführt hat — wird der erforderliche Schreibaufwand auf ein Mindestmaß zusammengedrängt.

Den Ableitungen liegen keinerlei einschränkende Voraussetzungen in bezug auf Stützweite, Balkenquerschnitt oder Stützenfederung zugrunde.

1. Aufstellung der Elastizitätsgleichungen.

In Bild 1 ist ein beliebiger innerer Bereich $(i-2)$ bis $(i+2)$ des elastisch gestützten Durchlaufträgers schematisch dargestellt, wobei die Ordnungszahlen für die Stützweiten l und die Steifigkeitswerte (EJ) in

Bild 1. Innerer Bereich eines elastisch gestützten Durchlaufträgers.

beiden Richtungen nach dem gemeinsamen Bezugspunkt i ausgerichtet worden sind. Die Überschneidungen dieser Bezeichnungsart bei einer Gesamtbetrachtung des Trägers fallen nicht ins Gewicht, da diese Größen als Einzelwerte später nicht mehr in Erscheinung treten, sondern nur als bezogene Verhältniswerte in die Rechnung eingehen werden.

Die Federkonstante k wird durch die Beziehung

$$P = k\,\delta \tag{1}$$

definiert; wir verstehen darunter jene Federkraft P_1,

$$P_1 = k \quad \text{für } \delta = 1, \tag{2}$$

die bei einer erzwungenen Verschiebung des Trägers um die Längeneinheit $\delta = 1$ zusätzlich ausgelöst wird. E bedeutet das Elastizitätsmaß des Baustoffes und J das Trägheitsmoment des Balkens.

Als statisch bestimmtes Grundsystem wählen wir, wie üblich, die einfache Gelenkkette nach Bild 2. Dem virtuellen Selbstspannungszustand $\overline{M}_i$ (Bild 3) entspricht ein virtueller Verformungszustand Φ_i^0 (Bild 4), den man sich auch durch Überlagerung der beiden Anteile $\Phi_i^0(\varphi)$ und $\Phi_i^0(\delta)$,

$$\Phi_i^0 = \Phi_i^0(\varphi) + \Phi_i^0(\delta), \tag{3}$$

entstanden denken kann. Der erste Anteil $\Phi_i^0(\varphi)$ rührt allein von der Stabverformung her, wobei die Stützpunkte vorübergehend als unverschieblich anzusehen sind (Bild 5); der zweite Anteil $\Phi_i^0(\delta)$ liefert dann zusätzlich den Einfluß der elastischen Stützenverschiebung, wobei umgekehrt jetzt die einzelnen Stäbe vorübergehend als starr zu gelten haben (Bild 6).

[1]) Vgl. auch Dischinger, Der durchlaufende Träger und Rahmen auf elastisch senkbaren Stützen. Bauing. 23 (1942), Heft 3/4, S. 15, u. Heft 9/10, S. 74.

[2]) Wilke, Einfaches und übersichtliches Berechnungsverfahren für den durchlaufenden Träger. Bauing. 21 (1940), Heft 37/38, S. 296.

[3]) Wilke, Die Lösung des homogenen Systems als Grundlage der praktischen Rahmenrechnung. Bauing. 23 (1942), Heft 49/50.

[4]) Palotás, Durchlaufträger auf elastischen Stützen. B. u. E. 41 (1942), Heft 5/6, S. 52.

Bei unendlich starrem Träger verschwindet somit der erste Einfluß, d. h.

$$\Phi_i^0(\varphi) = 0 \quad \text{für den Fall } (EJ)_{i-1} = (EJ)_{i+1} = \infty, \tag{4}$$

bei unnachgiebiger Lagerung dagegen der zweite, d. h.

$$\Phi_i^0(\delta) = 0 \quad \text{für den Fall } k_{i-1} = k_i = k_{i+1} = \infty. \tag{5}$$

Bild 2. Gelenkkette als statisch bestimmtes Grundsystem.

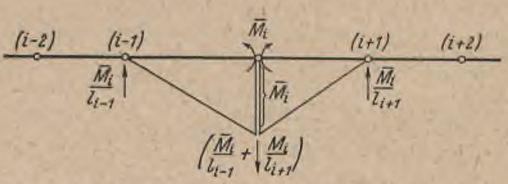


Bild 3. Virtueller Selbstspannungszustand $\overline{M}_i$.

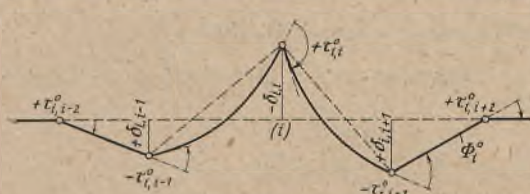


Bild 4. Virtueller Verformungszustand Φ_i^0 infolge $\overline{M}_i$.

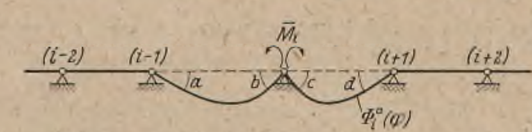


Bild 5. Anteil der Stabverformung $\Phi_i^0(\varphi)$.

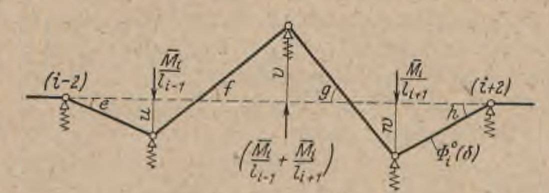


Bild 6. Verformungsanteil $\Phi_i^0(\delta)$ infolge Stützenverschiebung.

Innerhalb dieser Grenzwerte können alle erdenklichen Biegelinien der virtuellen Verformung durch eine entsprechende Kombination der Anteile $\Phi_i^0(\varphi)$ und $\Phi_i^0(\delta)$ eindeutig dargestellt werden. Hierbei spielt das Verhältnis von Biegesteifigkeit des Balkens zur Federkraft der Abstützung eine maßgebende Rolle, so daß wir hierfür eine besondere Kennzahl ε,

$$\varepsilon = \frac{6\,EJ}{k}, \tag{6}$$

einführen wollen.

Diese relative Balkensteifigkeit ε enthält also im allgemeinen je zwei veränderliche Einflüsse, und zwar die Biegesteifigkeit des Balkens im Zähler und die Federkonstante der Abstützung im Nenner. Zur Vereinfachung und besseren Übersicht der Zahlenrechnung wählen wir als konstanten Bezugswert eine charakteristische Größe ε_0,

$$\varepsilon_0 = \frac{6\,(EJ)_0}{k_0}, \tag{7}$$

worunter die auf eine ganz bestimmte, im übrigen aber frei wählbare Stütze 0 bezogene Balkensteifigkeit eines ebenfalls beliebig gewählten Feldabschnitts 0 zu verstehen ist. Die übrigen Federkonstanten k_i und Steifigkeitswerte $(EJ)_i$ werden dann als bezogene Größen durch einfache Verhältniszahlen

$$k_i' = k_i : k_0 \quad \text{bzw.} \tag{8}$$

$$(EJ)_i' = (EJ)_i : (EJ)_0 \tag{9}$$

festgelegt. Für die relative Balkensteifigkeit ε gilt dann die Formel

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \frac{\delta\,EJ}{(EJ)_0} \cdot \frac{k_0}{k} = \varepsilon_0 \cdot \frac{(EJ)'}{k'} = \varepsilon_0\,\varepsilon', \tag{10}$$

wobei ε',

$$\varepsilon' = \frac{(EJ)'}{k'}, \tag{11}$$

jene maßgebenden Verhältniszahlen bedeuten, mit denen die Charakteristik ε_0 jeweils zu multiplizieren ist, um in die gewünschten Werte ε überzugehen.

Die virtuelle Momentenbelastung $\overline{M}_i$ ist stets als unendlich kleine Kraftwirkung aufzufassen; sie ist andererseits aber wiederum frei und in jeder beliebigen Verzerrung wählbar. Wir wollen die Wahl so treffen, daß der Verschiebungszustand $\Phi_i^0(\delta)$ möglichst einfach beschrieben werden kann. So ergeben sich z. B. mit

(12) $$\overline{M}_i = k_i\, l_{i-1}\, l_{i+1},$$

vorerst ohne Rücksicht auf die hierbei auftretenden Vorzeichen, die folgenden einfachen und leicht zu behaltenden Ausdrücke für die virtuellen Formänderungsgrößen; die Stützenverschiebungen u, v und w (Bild 6),

(13) $$u = l_{i+1}\cdot\frac{k_i}{k_{i-1}} = l_{i+1}\cdot\frac{k_i'}{k_{i-1}'},$$

(14) $$v = l_{i-1} + l_{i+1},$$

(15) $$w = l_{i-1}\cdot\frac{k_i}{k_{i+1}} = l_{i-1}\cdot\frac{k_i'}{k_{i+1}'},$$

können in einfachster Weise durch die überkreuzten Stützweiten ausgedrückt werden; die zugehörigen Stabdrehwinkel e, f, g und h erhalten wir aus diesen Stützenverschiebungen durch einfache Division mit der jeweiligen Spannweite

(16) $$e = u : l_{i-2},$$

(17) $$f = (u+v) : l_{i-1},$$

(18) $$g = (w+v) : l_{i+1} \quad \text{und}$$

(19) $$h = w : l_{i+2}.$$

Die Winkelgrößen a, b, c und d des virtuellen Verformungszustandes $\Phi_i^0(\varphi)$ (Bild 5) ermitteln wir in der üblichen Weise nach Mohr; bei der obigen Annahme von $\overline{M}_i$ [Gl. (12)] ergeben sich die Ausdrücke

(20) $$a = l_{i-1}\cdot\frac{\overline{M}_i\,\beta_{i,i-1}}{6\,(EJ)_{i-1}} = \frac{l_{i-1}^2\,l_{i+1}}{\varepsilon_{i,i-1}}\cdot\beta_{i,i-1},$$

(21) $$b = a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{i,i-1},$$

(22) $$d = l_{i+1}\cdot\frac{\overline{M}_i\,\beta_{i,i+1}}{6\,(EJ)_{i+1}} = \frac{l_{i+1}^2\,l_{i-1}}{\varepsilon_{i,i+1}}\cdot\beta_{i,i+1},$$

(23) $$c = d\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{i,i+1}.$$

Hierin bedeuten:

ε die relative Balkensteifigkeit nach Gl. (10),
l die Spannweite,
α und β die verzerrten Auflagerdrehwinkel des formtreuen Einheitsstabes $l = 1$,

(24) $$\alpha = 6\int_0^1 \xi^2\cdot\frac{(EJ)_c}{EJ}\cdot d\,\xi,$$

(25) $$\beta = 6\int_0^1 \xi\,\xi'\cdot\frac{(EJ)_c}{EJ}\cdot d\,\xi,$$

die im allgemeinen aus fertigen Tafelwerken entnommen werden können; für den einfachen Stab gleicher Stärke gilt

(26) $$\beta = 1 \quad\text{und}\quad \alpha = 2 \quad \text{für } EJ = (EJ)_c = \text{konst.}$$

Mit Hilfe der Formeln (13) bis (26) können sämtliche Bestimmungsstücke und damit der Gesamtverlauf des gewählten virtuellen Verformungszustandes Φ_i^0 eindeutig angegeben werden.

Da dieser Zustand Φ_i^0 gleichzeitig als Einflußlinie für das Belastungsglied B_i^0 des Grundsystems angesehen werden kann, kann folgende Formel für B_i^0, wiederum getrennt nach den beiden Anteilen $\Phi_i^0(\varphi)$ von Bild 5 und $\Phi_i^0(\delta)$ von Bild 6, unmittelbar angeschrieben werden:

(27) $$B_i^0 = B_i^0(\varphi) + B_i^0(\delta),$$

wobei

(28) $$B_i^0(\varphi) = (a_i\,\mathfrak{B}_i)_{i-1} + (d_i\,\mathfrak{B}_i)_{i+1} \quad\text{und}$$

(29) $$B_i^0(\delta) = u_i\,A_{i-1}^0 - v_i\,A_i^0 + w_i\,A_{i+1}^0;$$

es bedeuten:

a, d, u, v und w die virtuellen Formänderungsgrößen gemäß Gl (20), (22), (13), (14) u. (15),
$\mathfrak{B}$ die üblichen Belastungsglieder des Durchlaufträgers auf unnachgiebigen Stützen (abgeleitet aus den Zuständen $a = 1$ bzw. $d = 1$),
A^0 die Auflagerdrücke der Gelenkkette nach Bild 2.

Wie wir sehen, hat die Zerlegung des virtuellen Verformungszustandes Φ_i^0 (Bild 4) in die beiden Anteile $\Phi_i^0(\varphi)$ und $\Phi_i^0(\delta)$ den Vorteil der größeren Übersichtlichkeit und Anschaulichkeit, da der zusätzliche Einfluß der elastischen Nachgiebigkeit gegenüber dem Sonderfall des Durchlaufträgers auf starren Stützen durch den einfachen Linienzug von Bild 6 [Gl. (13) bis (19)] dargestellt werden kann und damit auch gedanklich leicht zu behalten ist. Fassen wir — nunmehr unter Beachtung der Vorzeichen — beide Einflüsse zusammen, so können wir die virtuellen Knickwinkel τ^0 des Grundsystems und damit die Beiwerte der Elastizitätsgleichungen an Hand von Bild 4 sehr leicht anschreiben:

(30) $$\tau_{i,i-2}^0 = +\,e,$$

(31) $$\tau_{i,i-1}^0 = +\,a - (e+f),$$

(32) $$\tau_{i,i}^0 = +\,(b+c) + (f+g),$$

(33) $$\tau_{i,i+1}^0 = +\,d - (g+h),$$

(34) $$\tau_{i,i+2}^0 = +\,h;$$

der virtuelle Verformungszustand Φ_i^0 ist außerdem noch gekennzeichnet durch die drei Verschiebungsordinaten der Stützpunkte $(i-1)$, i und $(i+1)$,

(35) $$\delta_{i,i-1}^0 = +\,u,$$

(36) $$\delta_{i,i}^0 = -\,v,$$

(37) $$\delta_{i,i+1}^0 = +\,w,$$

(38) $$\delta_{i,k}^0 = 0 \quad \text{für } (i+1) < k < (i-1).$$

Die Elastizitätsgleichung für das Stützmoment X_i kann als Arbeitsgleichung unmittelbar aus Bild 4 abgelesen werden; sie lautet bekanntlich:

(39) $$\tau_{i,i-2}^0\,X_{i-2} + \tau_{i,i-1}^0\,X_{i-1} + \tau_{i,i}^0\,X_i + \tau_{i,i+1}^0\,X_{i+1} + \tau_{i,i+2}^0\,X_{i+2} + B_i^0 = 0,$$

wobei der Einfluß der äußeren Belastung durch das Belastungsglied B_i^0 [Gl. (27) bis (29)] vertreten ist. Die Doppelzeiger wurden so eingeführt, daß sich der erste stets auf den Angriffspunkt der virtuellen Momentenbelastung $\overline{M}_i$ bezieht und somit jene Unbekannte kennzeichnet, der die betreffende Elastizitätsgleichung zugeordnet ist.

Da eine solche Kontinuitätsbedingung [Gl. (39)] für jedes überzählige Gelenk aufgestellt werden kann, erhalten wir bei einem n-fach statisch unbestimmten Träger ein System von n 5gliedrigen Elastizitätsgleichungen, deren Matrix folgendes Schema aufweisen würde:

(40)

X_1	X_2	X_3	X_4	. . . .			X_{n-2}	X_{n-1}	X_n	B_i^0
=	—	—								—
—	=	—	—							—
—	—	=	—	—						—
	—	—	=	—	—					—
			⋮				⋮			⋮
					—	—	=	—	—	—
						—	—	=	—	—
							—	—	=	—

Sind einzelne Werte von X von vornherein — z. B. als Randbedingungen — gegeben oder aber durch andere Glieder derselben Gleichung ausdrückbar — wie z. B. bei Symmetrieeigenschaften —, dann können örtlich, im „gestörten Bereich" auch Gleichungen mit weniger als fünf Unbekannten auftreten; bei derartigen verkürzten Gleichungen setzt im allgemeinen die Reduktion der nachfolgenden voll besetzten Gleichungen und damit die Elimination der Unbekannten ein; die verkürzten Gleichungen übernehmen daher von vornherein die Rolle der „reduzierten" Gleichungen. Die Belastungsglieder B_i^0 können stets unmittelbar den virtuellen Verformungszuständen Φ_i^0 — im Maßstab ihrer Darstellung — entnommen werden [Gl. (27)].

Für den homogenen Teil der 5gliedrigen Elastizitätsgleichung (39) wollen wir der Einfachheit halber die abgekürzte Schreibweise $\Phi_i^0(X_5)$,

(41) $$\Phi_i^0(X_5) = \Phi_i^0(X_{i-2}, X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, X_{i+2}) = \tau_{i,i-2}^0\,X_{i-2} + \tau_{i,i-1}^0\,X_{i-1} + \tau_{i,i}^0\,X_i + \tau_{i,i+1}^0\,X_{i+1} + \tau_{i,i+2}\,X_{i+2},$$

einführen, so daß dann Gl. (39) in der einfachen Form

(42) $$\Phi_i^0(X_5) + B_i^0 = 0$$

dargestellt werden kann. Der Zeiger 5 der Unbekannten X möge andeuten, daß wir es mit einer 5gliedrigen Elastizitätsgleichung zu tun haben. Wird das Belastungsglied $B_i^0 = 0$, dann lautet die zugehörige homogene Elastizitätsgleichung für die Unbekannte X_i

(43) $$\Phi_i^0(X_5) = 0;$$

ist das ganze Tragwerk vollständig lastfrei, dann gilt das homogene Gleichungssystem

(44) $$\Phi_i^0(X_5)\,\Big|_{i=1}^{n} = 0;$$

durch die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems, die in einem übersichtlichen Zahlenbild zusammengefaßt werden soll, sind die elastischen Eigenschaften des federnd gestützten Durchlaufträgers erschöpfend und eindeutig gekennzeichnet.

Anmerkung: Der Maxwellsche Satz von der Gegenseitigkeit der Formänderungen $\tau_{i,k}^0 = \tau_{k,i}^0$ gilt nur für den Fall des Ansatzes einer und derselben virtuellen Belastungsgröße $\overline{M}_i = \text{konst}$ an sämtlichen überzähligen Gelenkstellen des Tragwerks; wir haben bewußt auf diesen Vorteil verzichtet und dafür die einfache Darstellung der Verschiebungsgrößen eingetauscht. Da die Wahl von $\overline{M}_i$ freigestellt bleibt, kann man sich den verschiedensten Sonderfällen stets bequem anpassen. Für den Fall gleicher Spannweiten könnte man beispielsweise $\overline{M}_i = k_0\,l^2$ wählen; unter Aufrechterhaltung der Maxwellschen Beziehungen würden wir dann erhalten:

(45) $$u = \frac{l}{k_{i-1}'}, \quad v = \frac{2\,l}{k_i'}, \quad w = \frac{l}{k_{i+1}'} \;\text{usw.,}\quad a = d = \frac{l^3}{\varepsilon_0}\cdot\frac{\beta}{(EJ)} \;\text{usw.}$$

Ist auch noch die Federkonstante k unveränderlich, dann liefert $\overline{M}_i = k\,l$ die Elementarverformungen

$$(46)\quad \begin{cases} u = l, \quad v = 2\,l, \quad w = l, \quad e = h = 1, \quad f = g = 3, \\ a = d = \dfrac{l^3}{\varepsilon_0} \cdot \dfrac{\beta}{(EJ)'} \quad \text{usw.} \end{cases}$$

Weitere Sonderfälle: $\beta = 1$ [Gl. (26)] und $(EJ)' = 1$ [Gl. (9)].

2. Reduktion der Elastizitätsgleichungen.

Mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens schalten wir der Reihe nach die Unbekannten X_{i-2}, X_{i-1}, X_{i+2} und X_{i+1} aus und erhalten schließlich die einzige Unbekannte X_i als Funktion der tragwerksbedingten Beiwerte (Lösung des homogenen Systems) und der Belastungsglieder (Einfluß der äußeren Belastung). Die einzelnen Reduktionsstufen werden durch hochgestellte Zeiger angedeutet; nach Ausschaltung der Unbekannten X_{i-2} aus dem ursprünglichen Gleichungssystem

$$(47)\qquad \Phi_i^0(X_5) + B_i^0 = 0 \,\Big|_{i=1}^{n}$$

erhalten wir das einfach reduzierte System

$$(48)\qquad \Phi_i^{\mathrm{I}}(X_4) + B_i^{\mathrm{I}} = 0 \,\Big|_{i=1}^{n},$$

in welchem nur mehr die vier Unbekannten X_{i-1}, X_i, X_{i+1} und X_{i+2} auftreten. Im Zuge der zweiten Reduktion ergibt sich dann nach Ausschaltung von X_{i-1} das zweistufig reduzierte Gleichungssystem

$$(49)\qquad \Phi_i^{\mathrm{II}}(X_3) + B_i^{\mathrm{II}} = 0 \,\Big|_{i=1}^{n},$$

in welchem also nur mehr die drei Unbekannten X_i, X_{i+1} und X_{i+2} erscheinen.

Eine weitere Reduktion im gleichen Sinne wäre gegenstandslos, da in der nächsten Stufe die Hauptunbekannte X_i selbst verschwinden würde. Die dritte und vierte Reduktionsstufe erstrecken sich daher auf die Ausschaltung der nachgeordneten Unbekannten X_{i+2} und X_{i+1}. Während die beiden untersten Reduktionsstufen I und II simultan angesetzt werden müssen, erfolgen die weiteren dann schrittweise; wir erhalten also schließlich die Gleichungssysteme

$$(50)\qquad \Phi_i^{\mathrm{III}}(X_i, X_{i+1}) + B_i^{\mathrm{III}} = 0 \,\Big|_{i=1}^{n} \quad \text{und}$$

$$(51)\qquad \Phi_i^{\mathrm{IV}}(X_i) \qquad + B_i^{\mathrm{IV}} = 0 \,\Big|_{i=1}^{n}.$$

Beim Vertauschen der Reduktionsrichtung, wenn wir also zuerst mit der Ausschaltung von X_{i+2} beginnen,

$$(52)\qquad {}^{\mathrm{I}}\Phi(X_4) + {}^{\mathrm{I}}B_i = 0 \,\Big|_{i=1}^{n},$$

und X_{i+1}, X_{i-2} bzw. X_{i-1} folgen lassen, setzen wir die oberen Reduktionszeiger sinngemäß auf die andere Seite. Bei symmetrischer Bauart können die gegenläufigen Reduktionen selbstverständlich eingespart werden. Gesetzmäßigkeiten im Aufbau des Tragwerks drücken sich auch in den Reduktionen aus; bei regelmäßigen Systemen brauchen diese also nur so weit verfolgt zu werden, als sich die Einflüsse der gestörten Bereiche (Randbedingungen) im Rahmen der vorgeschriebenen Genauigkeit noch bemerkbar machen.

Wir wollen die mathematische Operation der Gleichungsreduktion auch im Hinblick auf ihre statische Bedeutung verfolgen, da sich hieraus beachtenswerte Einblicke in das Wesen des allgemeinen Auflösungsverfahrens für lineare Gleichungssysteme ergeben werden.

Zu diesem Zwecke wollen wir uns zunächst vergegenwärtigen, daß die Selbstspannungszustände $\overline{M}_i$ in sich vollkommen abgeschlossene Gleichgewichtsgruppen darstellen und daß sie daher als solche mit jedem beliebigen anderen Selbstspannungszustand überlagert bzw. kombiniert werden können, ohne hierbei ihre Wesensart einzubüßen. Da die Arbeitsbeiträge der überzähligen Größen nur von den Knickstellen der virtuellen Verformungszustände herrühren [vgl. Bild 4 und Arbeitsgleichung (39)], entspricht dem mathematischen Vorgang der Elimination einer Unbekannten, z. B. X_k, der statische Vorgang der Beseitigung einer solchen Knickstelle k mit dem Knickwinkel τ_k; dieses Ziel erreicht man ganz allgemein stets durch einfache Überlagerung mit einem geeigneten anderen (unabhängigen) virtuellen Verformungszustand Φ_k^h, der an der Stelle k einen gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Knick $(-\tau_k)$ aufweist. Wir erhalten auf diese Weise einen neuen (kombinierten) virtuellen Verformungszustand Φ_i^{I}, der an der betreffenden Stelle k durchaus stetig verläuft. Legen wir nun diesen letzteren Zustand Φ_i^{I} der Arbeitsgleichung zugrunde, so liefern im allgemeinen wohl die übrigen Gelenkstellen s (mit den veränderten Knickwinkeln τ_s^{I}) nach wie vor Beiträge der unbekannten Momente X_s zur zugehörigen Arbeitsgleichung, die Unbekannte X_k selbst aber tritt in dieser „reduzierten" Elastizitätsgleichung nicht mehr auf, da ihr Arbeitsbeitrag verschwindet. Es ist darauf zu achten, daß

1. die Überlagerung nur mit einem bereits voll entwickelten, also seinem Gesamtverlauf nach bekannten Verformungszustand Φ_k^h des Grundsystems oder auch des bereits reduzierten Hauptsystems erfolgen darf, und daß
2. unerwünschte zusätzliche Knickstellen und damit vor allem die bereits eliminierten Unbekannten in der reduzierten Gleichung nicht mehr auftreten dürfen.

Wenn man sich also den jeweiligen Hilfszustand Φ_k^h bildlich vorstellen kann, dann bereitet die Aufstellung des reduzierten Gleichungssystems gedanklich keinerlei Schwierigkeiten. Die Knickstellen der Hilfsfunktion Φ_k^h liefern mit ihren Winkelgrößen τ_k^h die erforderlichen Reduktionsbeiträge Δ_i^{I},

$$(53)\qquad \Delta_i^{\mathrm{I}} = \tau_k^h,$$

für die ursprünglichen Beiwerte τ_i^0, so daß die reduzierten Beiwerte τ_i^{I}, z. B.

$$(54)\qquad \tau_{is}^{\mathrm{I}} = \tau_{is}^0 + \Delta_{is}^{\mathrm{I}} = \tau_{is}^0 + \tau_{ks}^h,$$

durch einfache algebraische Addition dieser beiden Größen τ an der jeweiligen Stütze s erhalten werden.

Dasselbe gilt für die Verschiebungsordinaten δ_i^{I} und damit auch für den gesamten Verformungszustand Φ_i^{I}, der, ebenso wie der Ausgangszustand Φ_i^0 am Grundsystem, ganz allgemein als Funktion der Abszissenwerte x betrachtet werden kann. Der so gefundene neue Verformungszustand Φ_i^{I},

$$(55)\qquad \Phi_i^{\mathrm{I}} = \Phi_i^0 + \Phi_k^h,$$

entspricht in statischer Hinsicht der Biegelinie infolge $\overline{M}_i$ am statisch unbestimmten Hauptsystem, das aus dem statisch bestimmten Grundsystem dadurch hervorgegangen ist, daß die Gelenkstelle k — neben allen übrigen, bereits bei der Hilfsfunktion Φ_k^h ausgeschalteten — geschlossen wurde.



Bild 7. Virtueller Verformungszustand Φ_{i-2}^{II} des reduzierten Hauptsystems (Hilfsfunktion für die erste Reduktionsstufe).

Diese allgemeinen Überlegungen übertragen wir nunmehr auf unser Gleichungssystem (47) $\Phi_i^0(X_5) + B_i^0 = 0 \,\big|_{i=1}^{n}$; nehmen wir an, wir hätten die zweistufig reduzierten Gleichungen

$$(56)\qquad \Phi_{i-2}^{\mathrm{II}}(X_3) + B_{i-2}^{\mathrm{II}} = 0 \quad \text{und}$$

$$(57)\qquad \Phi_{i-1}^{\mathrm{II}}(X_3) + B_{i-1}^{\mathrm{II}} = 0$$

irgendwie — durch Reduktion oder aus den gegebenen Randbedingungen — bereits gefunden. Diesen Gleichungen, in denen nur noch die nachgeordneten Unbekannten auftreten, entsprechen die Verformungszustände Φ_{i-2}^{II} und Φ_{i-1}^{II} der Bilder 7 und 8; der Verformungszustand Φ_i^0 des statisch bestimmten Grundsystems ist in Bild 9 nochmals angedeutet worden.

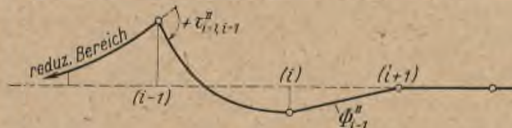


Bild 8. Virtueller Verformungszustand Φ_{i-1}^{II} des reduzierten Hauptsystems (Hilfsfunktion für die zweite Reduktionsstufe).

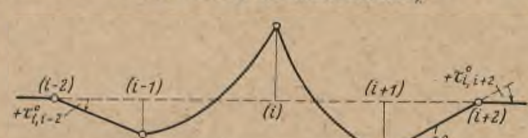


Bild 9. Virtueller Verformungszustand des statisch bestimmten Grundsystems.

Die erste Stufe der Gleichungsreduktion erstreckt sich auf die Beseitigung der Unbekannten X_{i-2} in Gl. (42). In Bild 9 tritt an der Stelle $(i-2)$ der Knickwinkel $\tau_{i,i-2}^0$ auf; wir sehen sofort, daß der Zustand Φ_{i-2}^{II} von Bild 7 als Hilfsfunktion in Frage kommt, da er außer an der gleichen Stütze $(i-2)$ nur noch an den Stützen $(i-1)$ und i Knickstellen — mit abklingenden Winkelwerten — aufweist; aber der Maßstab stimmt noch nicht. Wir behaften diesen Zustand daher mit einem solchen Maßstab m_i^{I}, daß der Winkel $\tau_{i-2,i-2}^{\mathrm{II}}$ die gewünschte Größe $-\tau_{i,i-2}^0$ annimmt. Der Divisor m_i^{I},

$$(58)\qquad m_i^{\mathrm{I}} = -\left(\tau_{i-2,i-2}^{\mathrm{II}} : \tau_{i,i-2}^0\right),$$

liefert alsdann sämtliche Reduktionsbeiträge dieser ersten Reduktionsstufe, die ihrerseits durch den Gesamtverlauf der Funktion Φ_{i-2}^{II} gekennzeichnet sind. Vor allem aber interessiert im Augenblick der reduzierte Winkelwert $\tau_{i,i-1}^{\mathrm{I}}$ an der Stütze $(i-1)$,

$$(59)\qquad \tau_{i,i-1}^{\mathrm{I}} = \tau_{i,i-1}^0 + \frac{\tau_{i-2,i-1}^{\mathrm{II}}}{m_i^{\mathrm{I}}},$$

da anschließend auch diese Knickstelle noch beseitigt werden soll. Es geschieht dies im Zuge der zweiten Reduktionsstufe unter Zuhilfenahme der Funktion Φ_{i-1}^{II}; der Reduktionsmaßstab m_i^{II},

$$(60)\qquad m_i^{\mathrm{II}} = -\left(\tau_{i-1,i-1}^{\mathrm{II}} : \tau_{i,i-1}^{\mathrm{I}}\right),$$

liefert in einfachster Weise die zugehörigen Beiträge.

Der zweistufig reduzierte Verformungszustand Φ_i^{II} ist somit eindeutig gekennzeichnet durch den Zustand Φ_i^0 des statisch bestimmten Grundsystems und durch dessen Überlagerung mit den gleichfalls zweistufig reduzierten Zuständen Φ_{i-1}^{II} und Φ_{i-2}^{II} der beiden linken Nachbarstützen; der Außenstütze $(i-2)$ wird der Maßstab m_i^{I}, der inneren Stütze $(i-1)$ dagegen der Maßstab m_i^{II} zugeordnet. Das Entwicklungsgesetz der zweistufigen Reduktion kann somit ganz allgemein durch die zweistufige Rekursionsformel

$$\Phi_i^{\text{II}} = \Phi_i^0 + \frac{\Phi_{i-2}^{\text{II}}}{m_i^{\text{I}}} + \frac{\Phi_{i-1}^{\text{II}}}{m_i^{\text{II}}} = \Phi_i^0 + \Delta_i^{\text{I}} + \Delta_i^{\text{II}} \tag{61}$$

dargestellt werden; die Verzerrungsmaßstäbe m_i^{I} und m_i^{II} der Hilfsfunktionen Φ_{i-2}^{II} und Φ_{i-1}^{II} sind durch Gl. (58) und (60) gegeben; die Reduktionsbeiträge Δ_i^{I} und Δ_i^{II} selbst sind durch den Gesamtverlauf der reduzierten Verformungszustände Φ_{i-2}^{II} und Φ_{i-1}^{II} festgelegt.

An der Stelle i setzt der Einfluß des Zustandes Φ_{i-2}^{II} aus (Bild 7), an der Stelle $(i+1)$ jener des Zustandes Φ_{i-1}^{II} (Bild 8); von den ursprünglichen Winkelgrößen (Bild 9) erhält auf diese Weise nur eine einzige, nämlich $\tau_{i,i}^0$ an der Stütze i, alle beiden Korrekturen Δ_i^{I} und Δ_i^{II},

$$\tau_{i,i}^{\text{II}} = \tau_{i,i}^0 + \frac{\tau_{i-2,i}^{\text{II}}}{m_i^{\text{I}}} + \frac{\tau_{i-1,i}^{\text{II}}}{m_i^{\text{II}}}; \tag{62}$$

die nächstfolgende Knickstelle $(i+1)$ erhält nur mehr einen einzigen Reduktionsbeitrag Δ_i^{II},

$$\tau_{i,i+1}^{\text{II}} = \tau_{i,i+1}^0 + \frac{\tau_{i-1,i+1}^{\text{II}}}{m_i^{\text{II}}}, \tag{63}$$

während der letzte Knick an der Stelle $(i+2)$ im Zuge dieser zweistufigen Reduktion unverändert erhalten bleibt,

$$\tau_{i,i+2}^{\text{II}} \equiv \tau_{i,i+2}^0. \tag{64}$$

Der Einfluß der Verschiebungen setzt noch früher aus; beide Einflüsse erscheinen noch an der Stelle $(i-1)$,

$$\delta_{i,i-1}^{\text{II}} = \delta_{i,i-1}^0 + \frac{\delta_{i-2,i-1}^{\text{II}}}{m_i^{\text{I}}} + \frac{\delta_{i-1,i-1}^{\text{II}}}{m_i^{\text{II}}}; \tag{65}$$

an der Stütze i erhalten wir eine einfache Korrektur,

$$\delta_{i,i}^{\text{II}} = \delta_{i,i}^0 + \frac{\delta_{i-1,i}^{\text{II}}}{m_i^{\text{II}}}, \tag{66}$$

während die folgende Stütze $(i+1)$ von der Reduktion bereits unberührt bleibt,

$$\delta_{i,i+1}^{\text{II}} \equiv \delta_{i,i+1}^0. \tag{67}$$

Da das gleiche Entwicklungsgesetz (61) auch für die Belastungsglieder gilt, können wir den Ausdruck für das zweistufig reduzierte Belastungsglied B_i^{II} unmittelbar anschreiben,

$$B_i^{\text{II}} = B_i^0 + \frac{B_{i-2}^{\text{II}}}{m_i^{\text{I}}} + \frac{B_{i-1}^{\text{II}}}{m_i^{\text{II}}}; \tag{68}$$

durch rückläufige Substitution dieser reduzierten Belastungsglieder in das reduzierte Gleichungssystem

$$\Phi_i^{\text{II}}(X_s) + B_i^{\text{II}} = 0 \,\Big|_{i=1}^{n} \tag{69}$$

könnte z. B. der Momentenverlauf infolge einer beliebigen Mehrfeld- oder Vollbelastung sehr leicht ermittelt werden, sobald die Lösung des homogenen Gleichungssystems $\Phi_i^{\text{II}}(X_s) = 0$ (im Zahlenbild) vorliegt.

(Schluß folgt.)

Anleitung für die strenge Trägerrostberechnung.

Von Dr.-Ing. Ullrich Thran, Grünberg in Schlesien.

(Schluß aus Heft 23/24.)

3. Gruppenlast ③.

Wird derselbe Rechnungsgang wie oben bei der Gruppenlast ② für die Gruppenlast ③ durchgeführt, so wird unter Beachtung der Vorzeichen dieselbe Gleichung (5, 5) für φ und dieselben Größen für die Federkonstanten (5, 7) und (5, 8) erhalten.

Das Belastungsbild für die Systeme II und III, die sich mit den Systemen II und III der Gruppenlast ② decken, hat nachstehendes Aussehen (Bild 19):

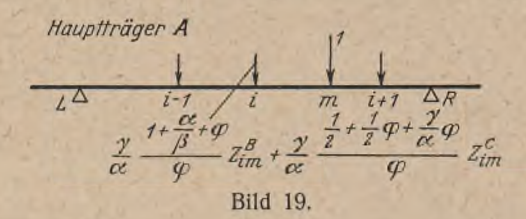
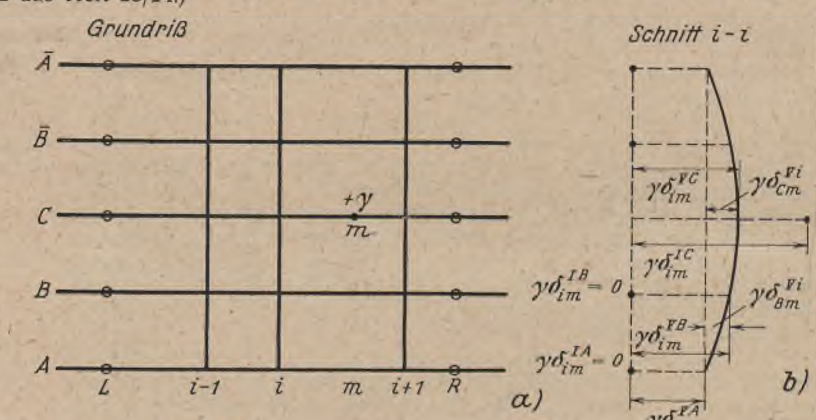
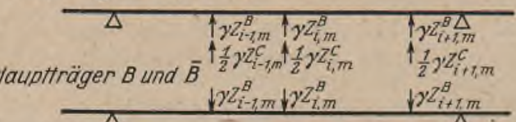


Bild 19.

Hierin ist φ wieder für System II durch φ_{II} und für System III durch φ_{III} zu ersetzen.

Die Momente in den Hauptträgern A, B und C infolge der Gruppenlast ③ lassen sich in derselben Form aus den Momenten der Systeme I, II und III zusammensetzen.





Hauptträger C

c)

Bild 18a bis c.

$$(5,\,10)\quad \begin{cases} M_{n③}^{\text{V}\,A} = \gamma\, M_{nm}^{\text{V}\,A} = \alpha \cdot \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\beta}(\varphi_{\text{III}} - \varphi_{\text{II}})\, M_{nm}^{\text{I}} - \left(\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \varphi_{\text{III}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\beta}\right)\varphi_{\text{II}}\, M_{nm}^{\text{II}} + \left(\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \varphi_{\text{II}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\beta}\right)\varphi_{\text{III}}\, M_{nm}^{\text{III}}}{\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\gamma}\right)(\varphi_{\text{III}} - \varphi_{\text{II}})} \\[2ex] M_{n③}^{\text{V}\,B} = \gamma\, M_{nm}^{\text{V}\,B} = \alpha \cdot \dfrac{\frac{1}{2}(\varphi_{\text{III}} - \varphi_{\text{II}})\, M_{nm}^{\text{I}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \varphi_{\text{III}} + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \varphi_{\text{III}}\right)\varphi_{\text{II}}\, M_{nm}^{\text{II}} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \varphi_{\text{II}} + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \varphi_{\text{II}}\right)\varphi_{\text{III}}\, M_{nm}^{\text{III}}}{\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\gamma}\right)(\varphi_{\text{III}} - \varphi_{\text{II}})} \\[2ex] M_{n③}^{\text{V}\,C} = \gamma\, M_{nm}^{\text{V}\,C} = \alpha \cdot \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\alpha}(\varphi_{\text{III}} - \varphi_{\text{II}})\, M_{nm}^{\text{I}} - \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} + \varphi_{\text{III}}\right)\varphi_{\text{II}}\, M_{nm}^{\text{II}} + \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} + \varphi_{\text{II}}\right)\varphi_{\text{III}}\, M_{nm}^{\text{III}}}{\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\gamma}\right)(\varphi_{\text{III}} - \varphi_{\text{II}})}. \end{cases}$$

4. Gruppenlast ④.

Die Gruppenlast ④ entspricht der Gruppenlast ③ beim Trägerrost mit vier Hauptträgern (D, 3). Nur greifen hier die Übertragungskräfte Z^B in den Viertelpunkten der Querscheibe an. Die Übertragungskraft Z^C wird aus Symmetriegründen gleich Null.

Mit Hilfe des im Teil D, 3 gezeigten Gedankenganges erhält die Federkonstante für das hier vorliegende System IV die Größe:

$$c_④ = \frac{1 + 4 \cdot \frac{\alpha}{\beta}}{4\, \delta_{B④}^{oi}}, \tag{5, 11}$$

worin $\delta^{oi}_{B④}$ die Durchbiegung des Punktes B der auf den Hauptträgern A und $\bar{A}$ gestützten, von den Hauptträgern B, C und $\bar{B}$ gelösten Querscheibe unter dem Kräftepaar $Z^B = 1$ ist.

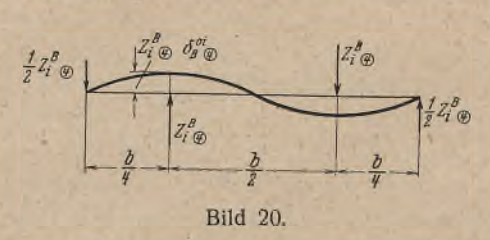


Bild 20.

[Für $\alpha = \beta$ und $J^Q =$ konst wird

$$c_{④} = \frac{480}{b^3} \cdot \frac{J^Q}{J^A_c} \Big]. \tag{5, 11}$$

Die endgültigen Momente der Gruppenlast ④ betragen unter Benutzung des Systems I und IV

$$(5,\ 12)\quad \begin{cases} M^{VA}_{n④} = \alpha\, M^{VA}_{nm} = \alpha \cdot \dfrac{4 \cdot \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot M^{I}_{nm} + M^{IV}_{nm}}{1 + 4 \cdot \dfrac{\alpha}{\beta}} \\[2ex] M^{VB}_{n④} = \alpha\, M^{VB}_{nm} = \alpha \cdot \dfrac{2\, M^{I}_{nm} - 2\, M^{IV}_{nm}}{1 + 4 \cdot \dfrac{\alpha}{\beta}} \\[2ex] M^{VC}_{n④} = \alpha\, M^{VC}_{nm} = 0. \end{cases}$$

5. Endgültiges System V.

Die Momente im endgültigen System V sind nun nach (5, 1) aus M^{I} bis M^{IV} zusammenzusetzen. Die Momente für die Belastung des Hauptträgers $\bar{B}$ und $\bar{A}$ sind spiegelbildlich zu denen des Hauptträgers B bzw. A, ebenso wie in Tafel 1 und 3 (Tafel 4). Auch für die Querkräfte gilt sinngemäß Tafel 4.

Tafel 4

$N_2 = \dfrac{1}{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}}$ $\qquad N_3 = \dfrac{1}{\varphi_{III} - \varphi_{II}}$ $\qquad N_4 = \dfrac{1}{1 + 4\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$

Zustandslinien ↓ — Einflußlinien →

Faktor	Durch die Last 1 im Punkt m des Hauptträgers A	B	C	$\bar{B}$	$\bar{A}$	wird das Moment im Punkt n des Hauptträgers
M^{I}_{nm}	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(2\frac{\alpha}{\beta}+8\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}+5\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)N_2N_4$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}+6\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}+3\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)N_2N_4$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\cdot N_2$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}-2\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)N_2N_4$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(2\cdot\frac{\alpha}{\beta}+3\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)N_2N_4$	A
M^{II}_{nm}	$+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)(1+\varphi_{II})N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)N_2N_3$	$-\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)\varphi_{II}N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)(1+\varphi_{II})N_2N_3$	
M^{III}_{nm}	$-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)(1+\varphi_{III})N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)N_2N_3$	$+\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)\varphi_{III}N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)(1+\varphi_{III})N_2N_3$	
M^{IV}_{nm}	$+\ \frac{1}{2}\cdot N_4$	$-\ \frac{\alpha}{\beta}\cdot N_4$	0	$+\ \frac{\alpha}{\beta}\cdot N_4$	$-\ \frac{1}{2}\cdot N_4$	
M^{I}_{nm}	$+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}+6\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}+3\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)N_2N_4$	$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}+5\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}+2\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)N_2N_4$	$+\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\cdot N_2$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}-3\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)N_2N_4$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}-2\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)N_2N_4$	B
M^{II}_{nm}	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)(1+\varphi_{II})N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)N_2N_3$	$+\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)\varphi_{II}N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)(1+\varphi_{II})N_2N_3$	
M^{III}_{nm}	$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)(1+\varphi_{III})N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)N_2N_3$	$-\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)\varphi_{III}N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)(1+\varphi_{III})N_2N_3$	
M^{IV}_{nm}	$-\ N_4$	$+\ 2\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot N_4$	0	$-\ 2\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot N_4$	$+\ N_4$	
M^{I}_{nm}	$+\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot N_2$	$+\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot N_2$	$+\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot N_2$	$+\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot N_2$	$+\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot N_2$	C
M^{II}_{nm}	$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{III}\right)(1+\varphi_{II})N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{III}\right)N_2N_3$	$-\frac{\alpha}{\gamma}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{III}\right)\varphi_{II}N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{III}\right)N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{III}\right)(1+\varphi_{II})N_2N_3$	
M^{III}_{nm}	$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{II}\right)(1+\varphi_{III})N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{II}\right)N_2N_3$	$+\frac{\alpha}{\gamma}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{II}\right)\varphi_{III}N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{II}\right)N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{II}\right)(1+\varphi_{III})N_2N_3$	
M^{IV}_{nm}	0	0	0	0	0	
M^{I}_{nm}	$-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}-2\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)N_2N_4$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}-3\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)N_2N_4$	$+\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\cdot N_2$	$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}+5\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}+2\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)N_2N_4$	$+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}+6\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}+3\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)N_2N_4$	$\bar{B}$
M^{II}_{nm}	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)(1+\varphi_{II})N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)N_2N_3$	$+\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)\varphi_{II}N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)(1+\varphi_{II})N_2N_3$	
M^{III}_{nm}	$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)(1+\varphi_{III})N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)N_2N_3$	$-\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)\varphi_{III}N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)(1+\varphi_{III})N_2N_3$	
M^{IV}_{nm}	$+\ N_4$	$-\ 2\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot N_4$	0	$+\ 2\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot N_4$	$-\ N_4$	
M^{I}_{nm}	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(2\cdot\frac{\alpha}{\beta}+3\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)N_2N_4$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}-2\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)N_2N_4$	$+\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\cdot N_2$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}+6\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}+3\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)N_2N_4$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(2\cdot\frac{\alpha}{\beta}+8\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}+5\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)N_2N_4$	$\bar{A}$
M^{II}_{nm}	$+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)(1+\varphi_{II})N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)N_2N_3$	$-\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)\varphi_{II}N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)(1+\varphi_{II})N_2N_3$	
M^{III}_{nm}	$-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)(1+\varphi_{III})N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)N_2N_3$	$+\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)\varphi_{III}N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\right)(1+\varphi_{III})N_2N_3$	
M^{IV}_{nm}	$-\ \frac{1}{2}\cdot N_4$	$+\ \frac{\alpha}{\beta}\cdot N_4$	0	$-\ \frac{\alpha}{\beta}\cdot N_4$	$+\ \frac{1}{2}\cdot N_4$	

Tafel 5

$N_2 = \dfrac{1}{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}}$ $\qquad N_3 = \dfrac{1}{\varphi_{III} - \varphi_{II}}$ $\qquad N_4 = \dfrac{1}{1 + 4\cdot\frac{\alpha}{\beta}}$

Einflußlinien →

Faktor	Durch die Last 1 im Punkt m des Hauptträgers A	B	C	$\bar{B}$	$\bar{A}$	wird die Übertragungskraft im Punkt i des Hauptträgers
A^{II}_{im}	$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)(1+\varphi_{II})N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)N_2N_3$	$-\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)\varphi_{II}N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)(1+\varphi_{II})N_2N_3$	B
A^{III}_{im}	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)(1+\varphi_{III})N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)N_2N_3$	$+\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)\varphi_{III}N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)(1+\varphi_{III})N_2N_3$	
A^{IV}_{im}	$+\ N_4$	$-\ 2\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot N_4$	0	$+\ 2\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot N_4$	$-\ N_4$	
A^{II}_{im}	$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{III}\right)(1+\varphi_{II})N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{III}\right)N_2N_3$	$+\frac{\alpha}{\gamma}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{III}\right)\varphi_{II}N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{III}\right)N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{III}\right)(1+\varphi_{II})N_2N_3$	C
A^{III}_{im}	$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{II}\right)(1+\varphi_{III})N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{II}\right)N_2N_3$	$-\frac{\alpha}{\gamma}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{II}\right)\varphi_{III}N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{II}\right)N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\varphi_{II}\right)(1+\varphi_{III})N_2N_3$	
A^{IV}_{im}	0	0	0	0	0	
A^{II}_{im}	$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)(1+\varphi_{II})N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)N_2N_3$	$-\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)\varphi_{II}N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{III}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{III}\right)(1+\varphi_{II})N_2N_3$	$\bar{B}$
A^{III}_{im}	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)(1+\varphi_{III})N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)N_2N_3$	$+\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)\varphi_{III}N_2N_3$	$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)N_2N_3$	$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\varphi_{II}+\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\varphi_{II}\right)(1+\varphi_{III})N_2N_3$	
A^{IV}_{im}	$-\ N_4$	$+\ 2\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot N_4$	0	$-\ 2\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot N_4$	$+\ N_4$	

Die Übertragungskräfte Z_{im}^{VB}, Z_{im}^{VC} und $Z_{im}^{V\bar{B}}$ werden wie bisher aus der Differenz der Querkräfte rechts und links vom Querscheibenanschlußpunkt i bestimmt. Es ist:

$$(5, 13)\quad \begin{cases} Z_{im}^{VB} = Q_{im}^{VB} - Q_{i+1,m}^{VB} \text{ bzw.} \\ Z_{im}^{VC} = Q_{im}^{VC} - Q_{i+1,m}^{VC} \text{ bzw.} \\ Z_{im}^{V\bar{B}} = Q_{im}^{V\bar{B}} - Q_{i+1,m}^{V\bar{B}}. \end{cases}$$

Die Querkräfte können aus Tafel 4 entnommen werden unter Beachtung, daß

$$(5, 14)\quad \begin{cases} Q_{im}^{I} = Q_{i+1,m}^{I} \quad \text{und} \quad Q_{i+1,m}^{II} - Q_{im}^{II} = A_{im}^{II} \\ Q_{i+1,m}^{III} - Q_{im}^{III} = A_{im}^{III} \\ \text{und} \quad Q_{i+1,m}^{IV} - Q_{im}^{IV} = A_{im}^{IV} \text{ ist.} \end{cases}$$

Die Schlußformeln für die Übertragungskräfte sind in Tafel 5 zusammengestellt.

Damit sind alle Größen zur Berechnung eines Trägerrostes mit fünf Hauptträgern gegeben.

F. Anleitung zur Aufstellung einer Festigkeitsberechnung.

Die praktische Aufstellung einer Festigkeitsberechnung soll an obigem Beispiel erläutert werden. Der in Bild 21a im Grundriß dargestellte Trägerrost mit drei Hauptträgern über neun Öffnungen ist $3 \cdot 8 + 19 = 43$fach statisch unbestimmt. Nach Teil C ist jedoch nur das 8fach unbestimmte System I und das $8 + 19 = 27$fach unbestimmte System II zu berechnen. Die Verhältnisse der Trägheitsmomente wurden nach einer Vorberechnung mit $\alpha = 1{,}08$; $\beta = 1{,}00$ und $\frac{J_c^A}{J^Q} = 6{,}3$ festgesetzt, und ebenso wurden die Verhältnisse der Hauptträger-Trägheitsmomente über die ganze Brückenlänge ermittelt.

auf elastischen Stützen γ_{mi}^0 zusammen. ε_{mi}^0 wird wiederum mit W-Gewichten errechnet, wobei gleichzeitig die Endtangentenausschläge $\alpha_{i-1,i}^0$, β_{ii}^0, α_{ii}^0 und $\beta_{i+1,i}^0$ als Auflagerdrücke der W-Gewichte entstehen.

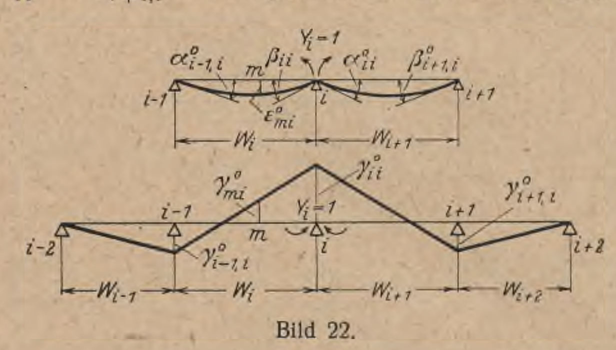


Bild 22.

Die Hebungen und Senkungen der elastischen Stützen ergeben sich aus

$$\gamma_{i-1,i}^0 = +\frac{1}{c\,w_i}$$

$$\gamma_{ii}^0 = -\frac{1}{c\,w_i} - \frac{1}{c\,w_{i+1}}$$

$$\gamma_{i+1,i}^0 = +\frac{1}{c\,w_{i+1}}.$$

Die Zwischenordinaten γ_{mi}^0 sind geradlinig einzuschalten. Die hierbei auftretenden Querschnittsdrehungen sind zu den Auflagerdrücken der W-Gewichte zu addieren, um die Vorzahlen der Elastizitätsgleichungen δ_{ik}^0 zu erhalten.

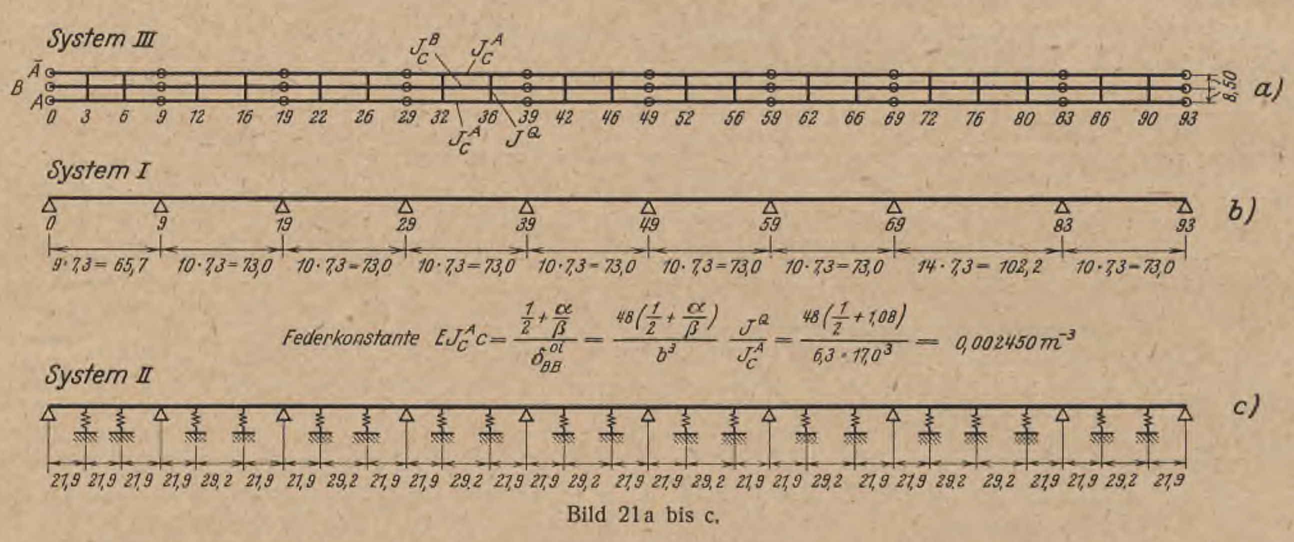


Bild 21a bis c.

1. Einflußlinien der Momente.

Die Einflußlinien der Momente werden wie üblich aus Momentenlinien für die Last 1 (Zustandslinien) entwickelt. Werden nämlich die Zustandslinien in die Reihen einer Tabelle geschrieben, so stehen in den Spalten die Einflußlinien. Dieses Verfahren gestattet in einfachster Weise eine geradlinige Zwischenschaltung der Einflußlinien für die Punkte zwischen den Knickpunkten der Zustandslinien.

a) System I.

Die Biegelinien des Systems 0 (statisch bestimmtes Hauptsystem) werden mit Hilfe der W-Gewichte ermittelt. Dabei werden auch sogleich die Vorzahlen δ_{LR}^0 der Elastizitätsgleichungen X als Auflagerdrücke der W-Gewichte gefunden. Die acht Elastizitätsgleichungen werden zur β_{LR}-Matrix aufgelöst und durch Einsetzen der Biegelinien in die β_{LR}-Matrix die Einflußlinien für die Stützmomente X_L berechnet. Außerdem werden die Spitzenordinaten der Einflußlinien η_{mm}^I ermittelt. Auf diese Weise sind alle Knickpunkte der Zustandslinien bekannt. Durch geradlinige Einschaltung der Querscheibenanschlußpunkte in die Zustandslinien für Lastangriff an allen Punkten werden die Einflußlinien für alle Querscheibenanschlußpunkte, η_{im}^I, erhalten.

Die Einflußlinien der Querträgeranschlußpunkte η_{nm}^I brauchen nicht berechnet zu werden, da sie sich im endgültigen System III durch geradlinige Einschaltung zwischen die Querscheibenanschlußpunkte ergeben. (Dieser Rechnungsgang benötigte einschließlich Einleitung 54 DIN-Seiten.)

b) System II.

Nach Bestimmung der Federkonstanten mit Hilfe von (3, 5) werden wiederum die Biegelinien δ_{mi}^0 des statisch bestimmten Hauptsystems ermittelt. Diese setzen sich aus den Biegelinien des elastischen Balkens auf starren Stützen ε_{mi}^0 und den Verschiebungen des starren Balkens

$$\delta_{i-2,i}^0 = +\frac{\gamma_{i-1,i}^0}{w_{i-1}}$$

$$\delta_{i-1,i}^0 = +\mathfrak{A}_{i-1,i} - \frac{\gamma_{i-1,i}^0}{w_{i-1}} + \frac{\gamma_{ii}^0 - \gamma_{i-1,i}^0}{w_i}$$

$$\delta_{ii}^0 = +\mathfrak{B}_{ii} + \mathfrak{A}_{ii} - \frac{\gamma_{ii}^0 - \gamma_{i-1,i}^0}{w_i} + \frac{\gamma_{i+1,i}^0 - \gamma_{ii}^0}{w_{i+1}}$$

$$\delta_{i+1,i}^0 = +\mathfrak{B}_{i+1,i} - \frac{\gamma_{i+1,i}^0 - \gamma_{ii}^0}{w_{i+1}} + \frac{-\gamma_{i+1,i}^0}{w_{i+2}}$$

$$\delta_{i+2,i}^0 = -\frac{-\gamma_{i+1,i}^0}{w_{i+2}}.$$

(In diesem Falle konnte ohne Einschränkung der Genauigkeit das System II durch Fortlassen der drei mittelsten Hauptträgeröffnungen so vereinfacht werden, daß es nur 18fach statisch unbestimmt war.) Die 18 Elastizitätsgleichungen werden zu der β_{ik}-Matrix aufgelöst und durch Einsetzen der Biegelinien in die β_{ik}-Matrix die Einflußlinien für die Stützmomente Y_i bestimmt. Auch die Spitzenordinaten der Einflußlinien η_{mm}^{II} werden berechnet (78 DIN-Seiten).

Für Trägerroste mit mehr als drei Hauptträgern werden die Federkonstanten nach (4, 5) und (4, 12) bei vier und (5, 7), (5, 8) und (5, 11) bei fünf Hauptträgern bestimmt. Bei fünf Hauptträgern ist vorher noch φ_{II} und φ_{III} nach (5, 5) zu ermitteln. Für mehr als fünf Hauptträger sind sinngemäß neue Ausdrücke zu entwickeln.

Da sich die Systeme III, IV usw. nur durch die Federkonstante vom System II unterscheiden, bleibt der Anteil ε_{mi}^0 aller Biegelinien gleich. Es ist daher nur der Anteil γ_{mi}^0 neu zu bestimmen, die Elastizitätsgleichungen neu aufzulösen und die neuen Einflußlinien für die Stützmomente zu berechnen.

c) Endgültiges System III.

Die endgültigen Einflußlinien werden
nach Tafel 1 bei drei
„ „ 3 „ vier und
„ „ 4 „ fünf Hauptträgern
aus dem System I und den Systemen II bis römisch ($t-1$) zusammengesetzt.

Zunächst werden hieraus die endgültigen Einflußlinien η_{im}^{III} der Querscheibenanschlußpunkte ermittelt, und zwar alle Äste der Einflußlinien, da sich diese über alle Hauptträger erstrecken. Die Einflußlinien für die Querträgeranschlußpunkte ergeben sich hieraus wieder durch geradlinige Einschaltung. Nur für die Spitzen der Einflußlinien müssen zunächst die endgültigen Spitzenordinaten aus den Spitzenordinaten der Systeme I und II zusammengesetzt werden. Für Trägerroste mit drei Hauptträgern ist zweckmäßig hierbei Tafel 2 zu verwenden. Zur Prüfung der Ergebnisse mag noch die Angabe dienen, daß für die endgültigen Einflußlinien in den Systemen römisch t

$$\eta_{mB}^{tA} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \eta_{mA}^{tB} \qquad \eta_{mC}^{tA} = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \eta_{mA}^{tC}$$

$$\eta_{mC}^{tB} = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \eta_{mB}^{tC} \text{ usw. ist.}$$

Durch geschickte Anordnung der Tabellen (siehe Tafel 2) läßt sich dadurch manche Rechenvereinfachung schaffen. (Für die Ermittlung der endgültigen Einflußlinien wurden in obigem Beispiel 372 DIN-Seiten benötigt.)

3. Grenzmomente.

Die Auswertung der Einflußlinien ist bei Trägerrosten besonders umständlich, weil für jeden Querschnitt eines Hauptträgers ein Einflußkörper zu belasten ist. Hinzu kommt, daß für den äußeren Hauptträger eine Querlastscheide besteht, die nur bei drei Hauptträgern über das ganze Bauwerk konstant ist. Bei mehr als drei Hauptträgern wäre streng genommen für jeden Einflußquerschnitt bei der Bestimmung eines bestimmten Moments zunächst die Querlastscheide und daraus die Größe der Knotenlast zu errechnen. Also bei m Punkten eines Hauptträgers sind m^2 Querlastscheiden und Knotenlasten zu ermitteln. Da jedoch die Querlastscheide nur wenig wandert, wird sie zweckmäßigerweise auf ein Mittelmaß festgelegt. (Im vorliegenden Beispiel sind zur Bestimmung der Grenzmomente 99 DIN-Seiten benötigt.)

4. Querkräfte und Auflagerdrücke.

Bei Blechträgern genügt im Gegensatz zu den Momenten, deren Verlauf über die ganze Bauwerkslänge gesucht wird, die Kenntnis der Querkräfte an einigen bestimmten Punkten. Außer der absolut größten Querkraft werden die Querkräfte nur in den Feldern benötigt, in denen die Stegblechdicke, die Nietteilung oder die Aussteifungsanordnung wechselt. Bei vorliegendem Beispiel war daher nur die Ermittlung der Querkraft in 15 von 93 Feldern notwendig. Trotzdem die Querkraftseinflußlinien im System I und II für alle Öffnungen berechnet waren (für jede Öffnung eine Querkraftslinie), da sie für die Berechnung der Auflagerdruckeinflußlinien benötigt wurden, waren für ihre Ermittlung sowie für die 15 endgültigen Querkraftseinflußlinien samt ihrer Auswertung 119 DIN-Seiten notwendig. Die Ermittlung der Einflußlinien vollzieht sich sinngemäß der Ermittlung der Momenteneinflußlinien. Die Auflagerdruckeinflußlinien werden durch einfache Addition aus den Querkraftseinflußlinien gebildet.

5. Übertragungskräfte.

Die Einflußlinien für die Übertragungskräfte sind mit (3, 12), (4, 18) bzw. Tafel 5 gegeben. Sie gelten für mittelbare Belastung der Hauptträger, die baupraktisch so vorzustellen ist, daß die Querscheiben keine Last von den Längsträgern oder unmittelbar von der Fahrbahnplatte erhalten. Die Einflußlinien der Übertragungskräfte werden aus den Einflußlinien für die Auflagerdrücke der Systeme II, III, IV usw. erhalten. Da alle Querscheiben gleich ausgebildet werden, genügt die Ermittlung der Einflußlinien für die am stärksten belastete Querscheibe. Die Einflußlinien für die Querscheibe selbst ermitteln sich aus den Einflußlinien der Übertragungskräfte auf einfachste Weise, wozu keine Erklärung notwendig ist, da alle Momente und Querkräfte nur von den Übertragungskräften abhängen.

Werden auch die Querscheiben selbst unmittelbar belastet, so werden die vorher aus Geraden sich zusammensetzenden Quereinflußlinien leicht gekrümmte, stetige Kurven. Wenn auch die Ermittlung der genauen Form dieser Kurven noch rechnerisch zu bewältigen ist, so ist ihre Kenntnis praktisch völlig unnötig, da die Auswertung der gekrümmten Einflußkörper doch nicht mehr mit angemessener Rechenarbeit erfaßt werden kann. Die Wirkung der unmittelbaren Querscheibenbelastung ist daher stets zu vernachlässigen, besonders da ihr Einfluß innerhalb der möglichen Rechengenauigkeit liegt. Nur die Quereinflußlinie der betrachteten Querscheibe selbst wird verändert. Bei dieser kommt zu der Einflußlinie bei mittelbarer Belastung noch die Einflußlinie des Querträgers hinzu, d. h. die Einflußlinie des Einfeldbalkens, der auf den dem betrachteten Punkt der Querscheibe benachbarten Hauptträgern frei aufliegt. (In obigem Beispiel wurden für die Ermittlung der Übertragungskräfte 21 DIN-Seiten benötigt, wobei jedoch nur vier Übertragungskräfte ermittelt wurden.)

6. Biegelinien.

Für die Überhöhung des Bauwerks wird die Biegelinie aus ständiger Last benötigt. Da die endgültigen Momente aus ständiger Last bekannt sind, ermittelt sich die Biegelinie unter dieser Last mit Hilfe von W-Gewichten einfach nach dem Reduktionssatz.

Die Einflußlinie für die Durchbiegung eines Punktes, die nach dem Maxwellschen Satz gleich der Biegelinie bei Belastung des betrachteten Punktes mit einer Last 1 ist, wird mit W-Gewichten nach dem Reduktionssatz errechnet.

Durch die Kenntnis der Einflußlinien ist ja die Momentenlinie infolge der Last 1 bekannt. Ebenso sind die Biegelinien für die Einheitsstützmomente durch die frühere Berechnung gegeben, so daß sie vorteilhaft mitbenutzt werden können (34 DIN-Seiten).

7. Einfluß von Wärme und Stützensenkungen.

Der Einfluß von Belastungen, die nicht von Einflußlinien erfaßt werden, wie die Wirkung von ungleicher Erwärmung und von Stützensenkungen, wird ebenfalls mit Hilfe von Gruppenlasten verfolgt. Bei der Annahme ungleicher Erwärmung ist darauf zu achten, daß im allgemeinen nur ein äußerer Hauptträger Temperaturunterschiede in seinen Gurtungen aufweisen wird; denn ungleiche Erwärmung kann im allgemeinen nur durch Sonnenbestrahlung entstehen, und die mittleren Hauptträger liegen stets im Schatten der Fahrbahndecke. Daher erhalten auch Trägerroste über einer Öffnung Wärmespannungen. Die Gruppenlasten für die ungleiche Erwärmung eines äußeren Hauptträgers gehen aus Bild 23 hervor. Wärmegruppenlast ② entspricht der Gruppenlast ②;

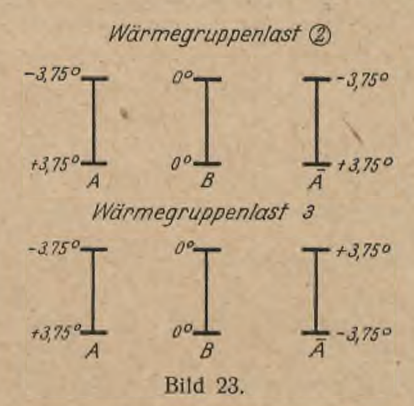


Bild 23.

die Wärmegruppenlast ③ entspricht der Gruppenlast ③ beim Trägerrost mit drei Hauptträgern. Die Summe beider Gruppenlasten liefert die vorschriftsgerechte Belastungsannahme eines Wärmeunterschiedes von 15°. Die Momente werden sinngemäß nach Tafel 1, 3 bzw. 4 erhalten. Bei Trägerrosten über einer Öffnung ist $M^I = 0$.

Stützensenkungen sind ebenso in Gruppensenkungen aufzuspalten, deren Behandlung in gleicher Weise erfolgt.

Im vorliegenden Beispiel benötigte dieser Rechnungssatz 7 DIN-Seiten.

8. Einflußlinien.

Schließlich seien einige Einflußlinien des durchgesprochenen Beispiels gezeigt (Bild 24).

In Bild 24d u. e sind die endgültigen Einflußlinien für die Momente in den Punkten 4 (Querträgeranschlußpunkt) und 76 (Querscheibenanschlußpunkt) den entsprechenden Einflußlinien der Systeme I und II (Bild 24b u. c) gegenübergestellt. Eine Zeichnung der Quereinflußlinien ist nicht erforderlich, da die Querscheiben und Querträger als nicht direkt belastet angenommen worden sind. Die Quereinflußlinien würden sich im anderen Fall durch das Umklappen der Einflußordinaten an den Querscheibenanschlußpunkten in die Ebene der Querscheiben ergeben. Für die Belastung der Fußwegkonsolen sind die Quereinflußlinien geradlinig über die Hauptträger A und $\bar{A}$ zu verlängern.

In Bild 24h ist die endgültige Einflußlinie für die Querkraft in den Feldern 7 bis 9 den entsprechenden Einflußlinien der Systeme I und II (Bild 24f) gegenübergestellt. Da die Einflußlinie für alle Felder einer Öffnung des Systems II gleich ist, ergibt sich auch im endgültigen System nur eine Einflußlinie für dieselben Felder. Die Form der endgültigen Querkrafteinflußlinie unterscheidet sich mehr als die endgültige Momenteneinflußlinie von den gewohnten Formen der Einflußlinien eines Einzelbalkens.

Die Einflußlinie der Übertragungskraft (Bild 24i), die sich aus der Einflußlinie für den Auflagerdruck der elastischen Stütze des Systems II (Bild 24g) entwickelt, hängt in ihrer Form stark von der Steifigkeit der Querscheibe ab. Es kann daher auch in einer Öffnung ein Wechsel der Vorzeichen eintreten.

In Bild 24k u. l sind die Grenzmomentenlinien der Hauptträger A und B dargestellt. Wie es auch nicht anders zu erwarten ist, stimmt die Form der Grenzmomentenlinie des Trägerrostes mit der des Einzelbalkens praktisch vollkommen überein. Es sind also keine Abweichungen gegenüber der gewohnten Form festzustellen. Dieses ist auch nicht weiter verwunderlich, da der Einfluß der Regelfahrzeuge (Einzellasten) nur einen geringen Anteil an den Grenzmomenten hat. Nur Einzellasten vermögen den Momentenlinien die Form zu geben, mit der Leonhardt[12]) die Andersartigkeit und Wirtschaftlichkeit der Trägerroste begründet. Jedoch soll gerade diese jedem Praktiker geläufige Tatsache noch einer genaueren Untersuchung vorbehalten bleiben.

[12]) In dem in Fußnote 8 angeführten Aufsatz, S. 541.

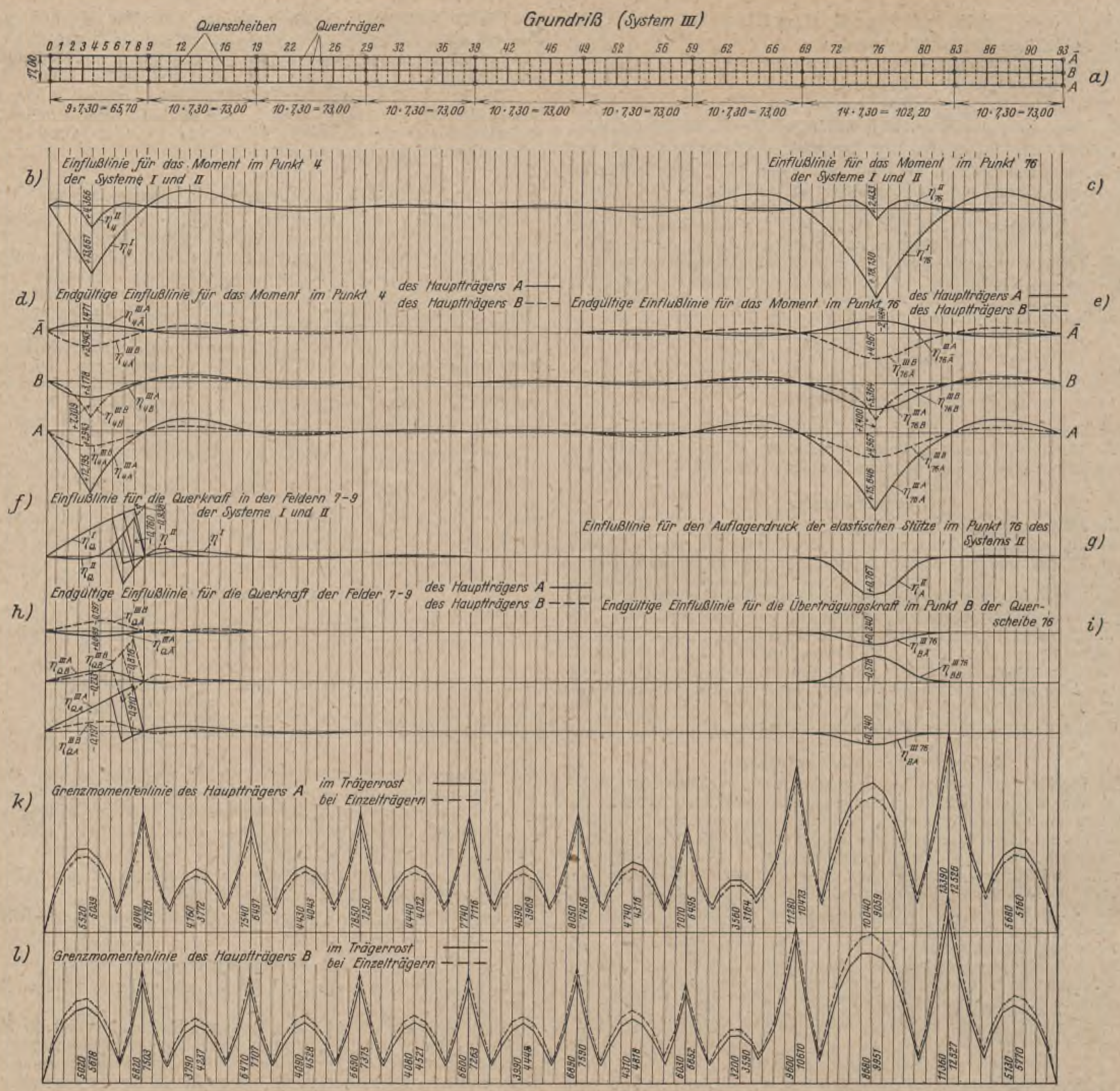


Bild 24a bis l.

G. Zusammenfassung.

Die hier dargestellte Anleitung zur strengen Trägerrostberechnung gibt die fertigen Schlußformeln für die Berechnung von Trägerrosten mit drei, vier und fünf Hauptträgern[13]). Diese sind durch die Angabe der Federkonstanten, des Unabhängigkeitsfaktors φ bei fünf Hauptträgern und schließlich durch die Formeln der Tafeln 1, 3 und 4 festgelegt. Der praktische Rechnungsgang für das Beispiel eines Trägerrostes mit drei Hauptträgern und über neun Öffnungen ist durchgesprochen worden, und der Arbeitsaufwand bis zur Ermittlung der maßgebenden Grenzmomente, Grenzquer- und Übertragungskräfte sowie der Ermittlung der Durchbiegungen mit 784 DIN-Seiten angegeben. Als Vergleich für den Arbeitsaufwand mag die Zahl der benötigten DIN-Seiten für die Berechnung des Tragwerks ohne Berücksichtigung der Verbundwirkung gelten. Hierfür würden 125 DIN-Seiten benötigt werden.

[13]) Während der Drucklegung dieses Aufsatzes erschien die Arbeit von E. Melan und R. Schindler „Die genaue Berechnung von Trägerrosten“, Wien 1942, Springer-Verlag. Beiden Untersuchungen liegt der gleiche Grundgedanke, der ähnliche Verlauf der Trägheitsmomente aller Hauptträger, zugrunde. Daher kommen beide Arbeiten auch auf den gleichen Lösungsweg des Hilfssystems mit elastischer Stützung. Die Arbeit von Melan-Schindler ist jedoch noch allgemeiner gehalten, die Herleitung der Lösung geschieht im wesentlichen auf mathematischem Wege. Dagegen sind im obigen Aufsatz die Schlußformeln auf gleiche Querträger- und Hauptträgerabstände beschränkt, ihre Ableitung erfolgt nur nach rein statischen Erwägungen. Sie dürfte daher wohl gut in das Problem der genauen Trägerrostberechnung einführen.

Wenn einerseits bei kleinsten Brücken der Normalausführung Festigkeitsberechnungen mit praktisch weit übertriebener Rechengenauigkeit gefordert und aufgestellt werden, so ist andererseits nicht einzusehen, weshalb bei wirklich großen Brücken, deren System statisch schwieriger zu erfassen ist, vereinfachte Berechnungsverfahren zugelassen werden sollen. Besonders ist es nicht vertretbar, mit vereinfachten Annahmen, deren allgemeine Gültigkeit kaum beweisbar sein dürfte, Einflußlinien aufzustellen und auszuwerten[8]). Die Vorarbeit zur Berechnung richtiger Einflußlinien ist im Vergleich zu ihrer Aufstellung und Auswertung denkbar gering. Sie beträgt im vorliegenden Falle nur 17 % der gesamten Rechenarbeit. Jede noch so vereinfachende Annahme kann nur hieran etwas ersparen, wobei dann in Kauf genommen wird, daß bei den übrigen 83 % eine nicht vorhandene Richtigkeit und Genauigkeit vorgetäuscht wird.

Ob allerdings für den erfahrenen Ingenieur das Bedürfnis zu einer derartig weit gesteigerten Rechengenauigkeit vorliegt und ob das System des Trägerrostes überhaupt vorteilhaft angewendet wird, soll einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben.

Nachdem hier die Grundlagen für die einwandfreie Berechnung gelegt sind, können auf ihnen die über den Trägerrost verbreiteten Ansichten einer Überprüfung unterzogen werden.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

Ende des Jahrgangs 1942.

